Toto sú návodné úlohy k domácemu kolu 39. ročníka Olympiády v informatike. Ide teda o sadu ľahších úloh, ktoré tematicky súvisia so súťažnými úlohami. Riešenie týchto úloh môže byť dobrou prípravou na riešenie súťažných úloh. Za riešenia týchto návodných úloh nie sú žiadne body do súťaže.

Návodné úlohy k domácemu kolu OI: kategória A

A-I-1 Potrubná pošta

1. Strom je súvislý graf, v ktorom existuje pre každé dva vrcholy práve jeden spôsob, ako sa dostať z jedného do druhého (ak nechceme žiadnou hranou prechádzať viackrát).

   Aký súčet stupňov vrcholov môže mať n-vrcholový strom? Prečo?

2. Mali sme voľakedy retiazku v tvare kruhu tvoreného n očkami. Niekto sa s ňou ale potom hral a niektoré dvojice očiek rozpojil, takže teraz máme niekoľko samostatných kúskov retiazky.

   Očká sú očíslované od 1 po n, nie však nutne v poradí, v ktorom ležali na retiazke. Na vstupe je zoznam dvojíc očiek, ktoré ostali prepojené.

   Napíšte program, ktorý vypíše jeden možný zoznam dvojíc očiek, ktoré ešte treba prepojiť, aby sme opravili retiazku.

   Napr. ak $n = 5$ a spojené dvojice očiek sú $(1, 4)$, $(1, 3)$ a $(2, 5)$, jeden spôsob, ako opraviť retiazku, je prepojiť očko 3 s očkom 5 a následne očko 4 s očkom 2.

3. V krajine je n miest (očíslovaných od 1 po n) a žiadne cesty medzi nimi. Cesty treba postaviť tak, aby každá cesta spájala nejaké dve mestá, žiadne dve cesty nespájali tú istú dvojicu miest, a aby sa dalo po cestách dostať z každého mesta do každého iného.

   Chceli by sme, aby z čo najviac miest viedli práve tri cesty.

   Ako je optimálne postaviť cesty, ak máme navyše podmienku, že ich musíme dokopy postaviť presne $n - 1$?

4. Ako je v predchádzajúcej úlohe optimálne postaviť cesty, ak si počet ciest, ktoré postavíme, môžeme ľubovoľne zvoliť? (Stále je potrebné dodržať všetky podmienky uvedené v prvom odseku zadania predchádzajúcej úlohy.)

A-I-2 Farebný plot

Všetky tri nižšie uvedené návodné úlohy majú riešenie v lineárnom čase, teda s časovou zložitosťou $O(n)$. Pokúste sa nájsť takéto riešenie.

1. Dané je pole $A[0..n - 1]$, ktorého prvky sú **kladné** celé čísla, a číslo s. Napíšte program, ktorý zistí, koľko existuje rôznych úsekov poľa A so súčtom presne s.

2. Dané je pole $A[0..n - 1]$, ktorého prvky sú celé čísla z rozsahu $0..n - 1$. Hodnoty v poli A sa môžu opakovať. Napíšte program, ktorý v tomto poli nájde najdlhší úsek, v ktorom sa vyskytujú nanajvýš dve rôzne hodnoty.

   Napr. pre vstup $(1, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 5, 6, 4)$ ide o úsek $(3, 3, 4, 3, 4)$.

3. Riešte všeobecnejšiu verziu predchádzajúcej úlohy: na vstupe je okrem poľa A dané aj číslo k a treba nájsť najdlhší úsek, v ktorom sa vyskytuje nanajvýš k rôznych hodnôt.

A-I-3 Policajti a zlodej

1. Peter a Zuzka sa hrajú podobnú hru ako v súťažnej úlohe. Hrajú ju na klasickej šachovnici rozmerov 8×8. Peter má len jedného policajta, ten začína v rohu na políčku a1. Zuzka má jedného zlodeja, ten začína v protiľahlom rohu – na políčku h8.

   Petrov policajt sa hýbe ako šachový jazdec. Zuzkin zlodej sa v každom ťahu musí pohnúť o políčko hore, dole, vpravo alebo vľavo. (Obaja sa v každom ťahu musia pohnúť, nesmú ostať stáť na mieste.)

   Rovnako ako v súťažnej úlohe Peter začína a vyhrá, ak sa mu niekedy podarí chytiť zlodeja. Zuzka vyhrá, ak vie túto hru hrať donekonečna a nedať sa chytiť.

   Kto z nich má vyhrávajúcu stratégiu, prečo a akú?

2. Čo by sa zmenilo v predchádzajúcej úlohe, ak by Zuzka mohla hýbať zlodejom ako šachovým kráľom?

3. Čo by sa zmenilo v prvej úlohe, ak by si Zuzka mohla zvoliť políčko, kde začína, ale Peter by následne mohol hýbať policajtom ako šachovou dámou?

4. Vyriešte rovnakú úlohu ako súťažná úloha, s jedinou zmenou: Obaja policajti sa hýbu ako šachové veže. (Naďalej platí, že policajti smú stáť na tom istom políčku. Zuzkin zlodej sa smie hýbať rovnako ako v súťažnej úlohe.)

A-I-4 O Vekslákbotovi a Pokladničke

1. Napíšte program pre delenie siedmimi: na začiatku je v Pokladničke c červených žetónov, na konci má v nej byť p purpurových a z zelených, pričom musí platiť $z < 7$ a $7p + z = c$. (Inými slovami, p je celočíselný podiel a z je zvyšok po delení.)

2. Vyriešte predchádzajúcu úlohu s tým, že váš program pre Pokladničku musí obsahovať obmedzenie „zelena ≤ 6“.

3. V Pokladničke je na začiatku $c > 0$ červených a $m > 0$ modrých žetónov.

   Napíšte program pre Pokladničku, ktorý sa bude správať nasledovne: Ak $c \geq m$, na konci musí byť v Pokladničke to, čo na začiatku: c červených a m modrých žetónov. Ak $c < m$, treba počty vymeniť – na konci musí v Pokladničke byť m červených a c modrých.

   (V oboch prípadoch smie v Pokladničke na konci byť aj ľubovoľne veľa žetónov iných farieb.)

4. Program z predchádzajúcej úlohy vlastne dve čísla (počet červených a počet modrých) usporiada podľa veľkosti.

   Keď vieme usporiadať dve čísla, vieme usporiadať aj tri: usporiadame prvé dve, potom druhé a tretie, a potom znova prvé a druhé. Rozmyslite si, prečo tento postup funguje.

   Napíšte program pre Pokladničku, ktorý usporiada počty červených, modrých a zelených žetónov tak, že postupne trikrát použije riešenie predchádzajúcej úlohy.

Návodné úlohy k domácemu kolu OI: kategória B

B-I-1 Volebný bazén

1. Skupina n ľudí sa chce tento piatok stretnúť. Každý človek má v piatok presne jeden interval, kedy má čas na stretnutie: človek i môže od času a_i po čas b_i vrátane. (Pre jednoduchosť spracovania počítačom sú všetky časy udávané v sekundách od začiatku dňa.)

   Napíšte program, ktorý zistí, či existuje moment, kedy sa všetkých n ľudí vie stretnúť.

2. Ľudia z predchádzajúcej úlohy by chceli, aby stretnutie trvalo aspoň hodinu. Upravte svoje riešenie tak, aby zistilo, či a kedy sa vie všetkých n ľudí stretnúť na aspoň hodinu. (Stretnutie nemusí začínať „o celej“, len musí mať dĺžku aspoň 3600 sekúnd.)

3. Ťažšia verzia predchádzajúcej úlohy: Napíšte program, ktorý navyše v situácii, kedy sa nevie stretnúť všetkých n ľudí, nájde najväčšie k také, že niektorých k spomedzi našich n ľudí sa vie na hodinu stretnúť.

4. Na vstupe je jediné celé číslo n, pričom platí $2 \leq n \leq 10^{15}$. Napíšte program, ktorý skontroluje, či je n prvočíslo.

   (Pripomíname, že podľa definície je n prvočíslo práve vtedy, ak má v prirodzených číslach práve dvoch deliteľov: jednotku a seba. Program, ktorý postupne pre každé d od 2 po $n - 1$ overí, že toto d nedelí n, by teda túto úlohu vyriešil korektne… ale príliš pomaly. Ako ho vieme zrýchliť? Kedy stačí prestať kontrolovať a prečo?)

5. Na vstupe je jediné celé číslo n, pričom platí $2 \leq n \leq 10^{15}$. Napíšte program, ktorý spočíta, koľko má toto číslo rôznych deliteľov.

   (Napr. delitele čísla 18 sú 1, 2, 3, 6, 9 a 18, pre vstup 18 je teda správny výstup 6.)

B-I-2 Kopa kníh

1. Vyriešte súťažnú úlohu za predpokladu, že otáčacie rameno vôbec nepoužívame. Akú dátovú štruktúru je vhodné použiť pre reprezentáciu kopy kníh?

2. Na poličke sú knižky, jedna vedľa druhej. Občas niekto príde a z ľavého alebo pravého konca jednu zoberie, alebo naopak na ľavý alebo pravý koniec novú knižku pridá. Napíšte program, ktorý bude efektívne simulovať takéto operácie. Akú dátovú štruktúru je vhodné použiť pre reprezentáciu police kníh?

3. Prečítajte si v súťažnej úlohe pozorne sekciu Obmedzenia a hodnotenie, obsahuje dve návodné úlohy: môžete súťažnú úlohu samostatne vyriešiť pre vstupy 1-3 (menej efektívnym programom) aj pre vstupy 4-6 (využiť jednoduchšie správanie ramena).

4. Odhadnite, ako dlho by program, ktorým ste vyriešili prvé tri vstupy, bežal pre tie ostatné.

B-I-3 Pyramída z kociek

1. Napíšte program, ktorý vypočíta a vypíše prvých 20 poschodí našej pyramídy. Vypíšte si ich a pozrite sa na ne.

2. Ako presne vyzerá poschodie pod poschodím, ktoré je celé červené? A ako vyzerá to nasledujúce?

3. Uvažujme nekonečnú postupnosť núl a jedničiek, ktorá vznikne nasledovne: v prvom kroku napíšeme nulu a v každom ďalšom napíšeme presný opak toho, čo sme napísali dovtedy. (V druhom kroku teda napíšeme 1, čím dostaneme 01. V treťom kroku napíšeme opak 01, čiže 10, takže už máme postupnosť 0110. V štvrtom kroku ju predĺžime na 01101001. A tak ďalej.)

   Napíšte čo najefektívnejší program, ktorý ku danému k zistí, či je na k-tej pozícii v tejto postupnosti nula alebo jednotka. Dobrý program by si mal poradiť aj s $k = 10^{18}$.

B-I-4 Tabuľkový počítač

1. Aký pásik treba vložiť do násobiča, aby na výstupe vrátil súčet vstupov? A aký pásik treba na to, aby sme na výstupe dostali hodnotu z druhého vstupu?

2. Majme tabuľkový počítač s $k = 3$, ktorého prvý násobič má program $(1, 0, 0)$, druhý $(0, 1, 0)$ a tretí $(0, 0, 1)$.

   Aké postupnosti vieme generovať takýmto počítačom? Ako závisí vygenerovaná postupnosť od toho, aký prvý vstupný pásik použijeme?

3. Postupnosť 1, 3, 4, 7, 11, 18, … má rovnakú vlastnosť ako Fibonacciho postupnosť: každý nasledujúci člen je súčtom dvoch predchádzajúcich. Ako túto postupnosť vygenerovať tabuľkovým počítačom?

4. Postupnosť 1, 3, 4, 8, 15, 27, … má vlastnosť, že každý nasledujúci člen je súčtom *troch* predchádzajúcich. Ako túto postupnosť vygenerovať tabuľkovým počítačom?