43. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1993/1994

35. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
6. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

JEDNOTA SLOVENSKÝCH MATEMATIKOV A FYZIKOV

S prispením spolupracovníkov spracovali
RNDr. Ondrej Demáček, RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská

©Richard Kollár za kolektív, 1994

Po rokoch z prastarých makier ako-tak spatlal Mišo Forišek, 2003

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

O priebehu 43. ročníka matematickej olympiády

Súťaž s názvom Matematická olympiáda usporadúva pre žiakov stredných a základných škôl Ministerstvo školstva a vedy SR v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. Súťaž riadi Ústredný výbor matematickej olympiády (ÚV MO) prostredníctvom oblastných a okresných výborov MO.

Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. V školskom roku 1993/1994 sa uskutočnil už jej 43. ročník. Tento ročník MO bol prvým, v ktorom, prebehla sútaž samostatne v SR aj ČR. Úlohy olympiád však v oboch krajinách po vzájomnej dohode aj naďalej zostávajú rovnaké, nebola prerušená kontinuita súťaže a tohotoročná MO je naozaj 43. v poradí.

Ústredný výbor MO pracoval v zložení, v ktorom bol na návrh JSMF menovaný Ministerstvom školstva a vedy SR. Predsedom ÚV MO bol doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., z MFF UK v Bratislave. Ďalšími členmi Ústreného výboru matematickej olympiády (ÚV MO) boli:

RNDr. Juraj Balázs, PF UPJŠ Košice,

RNDr. Andrej Blaho, MFF UK Bratislava,

RNDr. Jaroslava Brincková, UMB FHPV Banská Bystrica,

RNDr. Vladimír Burjan, Bratislava,

RNDr. Milan Cirjak, Met. centrum Prešov,

RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava,

Mgr. Milan Demko, PedF UPJŠ Prešov,

Mgr. Vojtech Filín, Gym. Trenčín,

RNDr. Jozef Fulier, CSc., Vysoká škola pedagogická Nitra,

RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického Revúca,

Mgr. Jozef Mészáros, Gym. s vyuč. jaz. maď. Galanta,

Vlasta Michálková, IUVENTA Bratislava,

RNDr. Gabriela Monoszová, UMB FHPV Banská Bystrica,

Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., VŠDS Žilina,

doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,

PhDr. Milan Ščastný, CSc., ZŠ Bratislava,

RNDr. Juraj Vantuch, CSc., PedF UK Bratislava,

Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

Členmi ÚV MO boli aj predsedovia oblastných výborov MO:

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., Vysoká škola pedagogická Nitra,

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., StF VŠDS Žilina,

RNDr. Božena Miháliková, CSc., PF UPJŠ Košice,

Mgr. Jozef Kollár, StF STU Bratislava.

Zástupcom MŠaV v ÚV MO bol

PhDr. Oto Klosterman, MŠaV SR Bratislava.

V priebehu 43. ročníka MO sa konalo jedno plenárne zasadanie ÚV MO a 5 zasadaní Predsedníctva ÚV MO. Prejednalo sa hodnotenie priebehu súťaže, organizácia ďalších kôl, zabezpečenie prípravných sústredení pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) a prípravy súťažných úloh. Na príprave súťažných úloh sa zo Slovenska podielali členovia Úlohovej komisie MO: RNDr. Pavol Černek, doc. RNDr. Tomáš Hecht, Csc. a Richard Kollár.

V samotnej organizácii súťaže tento rok nedošlo k žiadnej zmene. Pre žiakov základných škôl bola súťaž rozdelená do piatich kategórií: Z4 – Z8, ktoré boli určené žiakom 4. až 9. ročníkov ZŠ a im odpovedajúcim ročníkom viacročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriach: A,B,C a P. Kategória A bola určená žiakom 3. a 4. ročníkov, kategória B žiakom 2. ročníkov a kategória C bola určená pre žiakov 1. ročníkov stredných škôl. Pre žiakov všetkých ročníkov bola určená kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii, ako im prislúchala. Týka sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A,B,C a P. Viacero žiakov takúto možnosť využilo.

V kategóriách A,B,C má prvé kolo dve časti. V prvej časti riešia súťažiaci 6 úloh doma alebo v matematických krúžkoch, môžu sa pritom radiť so svojími učiteľmi, vedúcimi krúžkov a pod. Druhá časť má formu klauzúrnej práce. Žiaci riešia v obmedzenom čase 4 hodiny 3 úlohy. Uspešní riešitelia prvého kola sú pozvaní do druhého (oblastného) kola súťaže, kde riešia 4 úlohy v časovom limite 4 hodiny.

V kategóriách B,C týmto kolom súťaž končí, ale v kategóriách A a P sa koná ešte tretie (republikové) kolo. Tento rok bolo doň pozvaných v kategórii A 39 najlepších a v kategórii P 24 najlepších riešiteľov z druhých kôl súťaže príslušnej kategórie podľa poradia zostaveného po koordinácii bodového hodnotenia. Vlastná súťaž je rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite vždy dve úlohy.

Republikové kolo 43. ročníka sa uskutočnilo v Bratislave v dňoch 24.-27.4. (kat. A) a 27.-30.4.1994 (kat. P) v zariadení IUVENTY. Na zabezpečení súťaže, vrátane spoločenského programu, sa obetavo podieľali pracovníci usporiadajúceho Centra voľného času IUVENTA a pracovníci a študenti Matamaticko-fyzikálnej fakulty UK v Bratislave. Za všetkých menujme aspoň predsedu ÚV MO doc. RNDr. Tomáša Hechta, Csc. ,Vlastu Michálkovú z IUVENTY. a Richarda Kollára z MFF UK.

Dvanásť najúspešnejších riešiteľov III. kola MO bolo pozvaných na výberové sústredenie pred MMO, ktoré sa konalo v dňoch 2.-8.5. v Bratislave. Zúčastnilo sa ho 9 študentov (zvyšní traja sa v tom istom čase zúčastnili na prípravnom sústredení pred medzinárodnou fyzikálnou olympiádou). Na základe výsledkov tohto sústredenia a výsledkov tretieho a druhého kola MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré reprezentovalo SR na MMO. Pre toto družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie, a to v dňoch 27.6-1.7.1994 na MFF UK v Bratislave. Pre desať najlepších riešiteľov kategórie P bolo organizované v dňoch 30.5.-5.6.1994 výberové sústredenie na MFF UK v Bratislave, po ktorom bolo na základe jeho výsledkov a výsledkov III. a II. kola vybrané štvorčlenné družstvo, ktoré reprezentovalo SR na medzinárodnej olympiáde z informatiky. Obom medzinárodným súťažiam sú venované samostatné kapitoly.

Výsledky celoštátneho kola 43. ročníka MO kategórie A

Por.	Meno	Ročník, Škola	1	2	3	4	5	6	Súčet
1.	Miloš Gáj	4 D.Tatarku Poprad	7	6	7	7	7	6	40
2.	Martin Niepel	4 Gröss. Bratislava	7	7	7	7	3	7	38
3.	Andrej Zlatoš	4 Gröss. Bratislava	7	6	7	7	7	3	37
4.	Lajos Ódor	4 Komárno maď.	7	1	7	0	2	7	24
5.	Michal Kovár	3 Gröss. Bratislava	7	2	7	7	0	0	23
	Patrik Horník	3 Gröss. Bratislava	7	2	7	7	0	0	23
7.	Ivan Cimrák	2 V.Okružná Žilina	7	2	7	5	0	1	22
	Peter Macák	3 J.Hronca Bratislava	7	3	7	5	0	0	22
	Martin Pál	3 J.Hronca Bratislava	0	7	7	7	0	1	22
10.	Roman Rückschloss	4 J.G.Taj. B.Bystrica	7	0	6	7	0	1	21
	Pavel Ondrejovič	4 Gröss. Bratislava	6	2	6	7	0	0	21
	Radoslav Vaľovský	4 Horova Michalovce	6	2	7	6	0	0	21
13.	Boris Krupa	2 Gröss. Bratislava	7	2	3	7	1	0	20
14.	Ivana Brudňáková	3 Konštantína Prešov	7	5	0	7	0	0	19
	Ján Bábeľa	3 Poštová Košice	4	2	6	7	0	0	19
16.	Štefan Godiš	2 V.Okružná Žilina	7	4	2	5	0	0	18
17.	Ivona Bezáková	3 Gröss. Bratislava	7	3	3	4	0	0	17
18.	Eugen Kováč	2 Stropkov	7	2	0	7	0	0	16
	Martin Makúch	3 J.Hronca Bratislava	7	1	7	1	0	0	16
	Daniel Pastor	4 Gröss. Bratislava	7	2	2	5	0	0	16
	Martin Plesch	2 J.Hronca Bratislava	6	3	3	3	0	1	16
22.	Martin Gažák	4 V.Okružná Žilina	0	5	6	4	0	0	15
23.	Vladimír Marko	1 J.Hronca Bratislava	0	1	7	4	2	0	14
	Mikuláš Madaras	4 Poštová Košice	4	0	5	4	0	1	14
25.	Martin Irman	2 Gröss. Bratislava	0	2	3	6	0	0	11
26.	Ivan Kabát	4 J.G.Taj. B.Bystrica	0	0	3	6	0	0	9
	Daniel Pártoš	2 Gröss. Bratislava	6	1	2	0	0	0	9
28.	Alexander Erdélyi	2 Gröss. Bratislava	0	1	7	0	0	0	8
	Kamila Černeková	2 Gröss. Bratislava	0	1	7	0	0	0	8
	Radoslav Tausinger	3 J.Hronca Bratislava	0	1	2	5	0	0	8
	Miroslav Hroššo	4 Párovská Nitra	0	0	3	5	0	0	8

Por.	Meno	Ročník, Škola	1	2	3	4	5	6	Súčet
32.	Miklós Mácza	3 Komárno maď.	3	4	0	0	0	0	7
	Laszló Szabó	3 Šamorín maď.	2	2	3	0	0	0	7
34.	Martin Čaprnda	3 J.Hronca Bratislava	3	0	2	0	1	0	6
35.	Ján Ťapuška	3 J.Hronca Bratislava	0	3	2	0	0	0	5
36.	Peter Somora	4 Gröss. Bratislava	0	0	3	0	0	0	3
	Ivan Kráner	4 J.G.Taj. B.Bystrica	0	1	2	0	0	0	3
38.	Tünde Keszeghová	4 Komárno maď.	0	0	2	0	0	0	2
	Tomáš Šipöcz	2 Gröss. Bratislava	0	0	2	0	0	0	2

Prvých 12 súťažiacich bolo vyhlásených za víťazov a prvých 21 súťažiacich za úspešných riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie A. Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

počet bodov	spolu	číslo úlohy					
		1	2	3	4	5	6
7 bodov	49	17	2	14	12	2	2
6 bodov	13	3	2	4	3	0	1
5 bodov	9	0	2	1	6	0	0
4 body	8	2	2	0	4	0	0
3 body	17	2	4	8	1	1	1
2 body	23	1	11	9	0	2	0
1 bod	17	0	8	0	1	2	6
0 bodov	98	14	8	3	12	32	29
Spolu	234	39	39	39	39	39	39

Výsledky celoštátneho kola 43. ročníka MO kategórie P

Por.	Meno	Ročník, Škola	1	2	3	4	Súčet
1.	Martin Irman	2 G Grösslingová, Bratislava	10	10	10	8	38
2.	Peter Lalík	3 G Novohradská, Bratislava	9	10	10	8	37
3.	Peter Žuffa	4 G Grösslingová, Bratislava	9	7	10	10	36
4.	Martin Makúch	3 G Novohradská, Bratislava	10	10	9	6	35
5.	Bronislava Brejová	4 G Novohradská, Bratislava	7	10	9	8	34
	Tomáš Vinař	4 G Šrobárova, Košice	4	10	10	10	34
	Martin Plesch	2 G Novohradská, Bratislava	10	9	6	9	34
	Andrej Zlatoš	4 G Grösslingová, Bratislava	10	6	10	8	34
9.	Miroslav Dudík	1 G Trebišov	10	5	10	8	33
	Martin Niepel	4 G Grösslingová, Bratislava	10	10	5	8	33
11.	Juraj Gottweis	2 G Grösslingová, Bratislava	10	8	9	4	31
12.	Martin Pál	3 G Novohradská, Bratislava	7	6	10	7	30
13.	Dušan Bezák	2 G Grösslingová, Bratislava	3	7	10	7	27
14.	Radoslav Tausinger	3 G Novohradská, Bratislava	1	6	10	8	25
15.	Martin Vagaský	4 G Grösslingová, Bratislava	1	5	10	7	23
16.	Patrick Sučanský	4 G Novohradská, Bratislava	9	6	0	7	22
17.	Vladimír Chovanec	4 G Zvolen	3	5	10	3	21
18.	Peter Koleni̇̌c	2 G Konštantínova, Prešov	3	5	10	2	20
19.	Marián Varga	4 G Novohradská, Bratislava	4	0	9	6	19
	Radoslav Vaľovský	4 G P.Horova, Michalovce	4	4	1	10	19
21.	Martin Gažák	4 G V. Okružná, Žilina	4	6	1	6	17
22.	Gabriela Mišunová	3 G Párovská, Nitra	3	4	0	9	16
23.	Tamás Varga	2 G maď. Komárno	1	1	0	7	9
24.	Michaela Áčová	2 G Novohradská, Bratislava	1	1	0	4	6

Prvých 8 súťažiacich bolo vyhlásených za víťazov a prvých 14 súťažiacich za úspešných riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie P.

Najúspešnejší riešitelia II.kola MO v kategóriach A, B, C, Z8, P

Z každej oblasti a z každej z kategórii A, B, C a P sú uvedení všetci úspešní riešitelia, príp. aspoň prvých 20 úspešných riešiteľov. V kategórii Z8 sú uvedení vždy aspoň najlepší traja riešitelia. V kategóriach B a C ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1. ročníkov. Gymnázia zo zameraním na matematiku, študíjny odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnazium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnazium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Bratislavská oblasť

Kategória A

1.-4. *Andrej Zlatoš*, 4, G Grösslingová
Martin Niepel, 4, G Grösslingová
Martin Pál, 3, G Novohradská
Martin Makúch, 3, G Novohradská
5.-6. *Peter Macák*, 3, G Novohradská
Ján Ťapuška, 3, G Novohradská
7.-8. *Vladimír Marko*, 1, G Novohradská
Daniel Pastor, 4, G Grösslingová
9.-11. *Radoslav Tausinger*, 3, G Novohradská
Martin Plesch, 2, G Novohradská
Daniel Pártoš, 2, G Grösslingová

Kategória B

1. *Vadovič Peter*, G Grösslingová
2.-3. *Danko Pavol*, G Grösslingová
Hatalová Marcela, G Metodova

4. *Áčová Michaela*, G Novohradská
5.-6. *Bezák Dušan*, G Grösslingová
Plesch Martin, G Novohradská
7.-8. *Lipka Ján*, G Grösslingová
Pártoš Daniel, G Grösslingová
9.-10. *Hulín Richard*, G Grösslingová
Marko Martin, G Novohradská

Kategória C

1.-2. *Vladimír Marko*, G Novohradská
Martin Vrbovský, G Novohradská
3.-5. *Martin Pekár*, G Grösslingová
Andrea Mesiarová, G Grösslingová
Katarína Antoničová, G Grösslingová
6.-7. *Roland Rablanský*, G Dunajská
Ladislav Kovár, G Grösslingová
8. *Michal Bajcsy*, G Grösslingová
9.-11. *Marián Ivančo*, G Grösslingová
Juraj Mäsiar, G Grösslingová
Vladimír Zajac, 6, G Grösslingová

Kategória Z8

1. *Peter Šefčík*, G Grösslingová
2. *Zuzana Nieplová*, G Grösslingová
3. *Ján Kováčik*, G Grösslingová

Kategória P

1. *Bronislava Brejová*, 4, G Novohradská
2. *Martin Vagaský*, 4, G Grösslingová
3. *Martin Pál*, 3, G Novohradská
4. *Martin Niepel*, 4, G Grösslingová
5.-6. *Patrick Sučanský*, 4, G Novohradská
Marián Varga, 4, G Novohradská
7. *Martin Makúch*, 3, G Novohradská
8. *Juraj Gottweis*, 2, G Grösslingová
9.-14. *Dušan Bezák*, 2, G Grösslingová
Martin Plesch, 2, G Novohradská
Michaela Áčová, 2, G Novohradská

Peter Lalík, 3, G Novohradská
Radoslav Tausinger, 3, G Novohradská
Martin Irman, 2, G Grösslingová

Západoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Lajos Ódor*, 4, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
2. *Miroslav Hroššo*, 4, G Párovská, Nitra
3. *Tünde Keszeghová*, 4, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno

4.-5. *Miklós Mácza*, 3, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
László Szabó, 3, G s vyuč. jaz. maďarským, Šamorín

6. *Stanislav Gronský*, 4, G Skalica

7.-10. *Matúš Kirchmayer*, 4, G Modra
Ján Ulický, 3, G Hviezdoslavova, Trnava
Zoltán Fazekas, 2, G Nové Zámky
Daniel Bajčan, 4, G Párovská, Nitra

Kategória B

1. *Peter Richtárik*, G Párovská, Nitra
2. *Tamás Varga*, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
3. *Zuzana Andrássyová*, G s vyuč. jaz. maď., Dunajská Streda
4. *Marek Ondík*, G Levice

5.-8. *Judita Mészarosová*, G s vyuč. jaz. maďarským, Galanta
Judita Kucserová, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
Tamás Nagy, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
Juraj Poljovka, G Párovská, Nitra

9.-12. *Krisztián Molnár*, G s vyuč. jaz. maďarským, Dunajská Streda
Miroslav Šedivý, G Levice
Peter Schmidt, G Piaristická, Nitra
Miroslav Toma, G Párovská, Nitra

Kategória C

1\. *Alexandra Gronská*, G Skalica
2\. *Andrea Borčinová*, G Párovská, Nitra
3.-6. *Juraj Tóth*, G Párovská, Nitra
Alexander Chudík, G Párovská, Nitra
Jozef Ladický, G Nové Mesto nad Váhom
Marián Trúsik, G Nové Mesto nad Váhom
7.-8. *Ľubomír Schmidt*, G Levice
Ján Pintér, G Párovská, Nitra
9\. *Štefan Goga*, G Levice
10.-13. *Slavomír Seemann*, G Komárno
Hana Konečná, G Nové Mesto nad Váhom
Zdenka Gažová, G Skalica
Ľubomír Krajčovič, G Hollého, Trnava

Kategória P

1.-2. *Gabriela Mišunová*, 3, G Párovská, Nitra
Tamás Varga, 2, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
3\. *Sebestyén Füri*, 4, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno
4.-6. *Zoltán Fazekas*, 2, G Nové Zámky
Július Šiška, 4, Gym. Párovská, Nitra
Milan Procháczka, 4, Gym. Párovská, Nitra
7.-8. *Gregor Krajčovič* , 4, G Hviezdoslavova, Trnava
Viktor Krajčí , 3, G Hviezdoslavova, Trnava
9\. *Ferenc Mizera* , 4, G s vyuč. jaz. maďarským, Komárno

Stredoslovenská oblasť

Kategória A

1\. *Martin Gažák*, 4, G Veľká Okružná, Žilina
2\. *Štefan Godiš*, 2, G Veľká Okružná, Žilina
3\. *Ivan Kabát*, 4, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
4\. *Ivan Kráner*, 4, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.-6. *Ivan Cimrák*, 2, G Veľká Okružná, Žilina
Roman Ruckschloss, 4, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7.-10. *Vladimír Chovanec*, 4, G Zvolen
Ľuboslav Lišaník, 4, G Dubnica

Ľubica Reháková, 4, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Marek Škereň, 3, G Veľká Okružná, Žilina

Kategória B

1. *Štefan Sakáloš*, G V.B.Nedožerského, Prievidza
2. *Juraj Majerský*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

3.-4. *Peter Bezemek*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Henrich Datel, G V.P.Tótha, Martin

5. *Martin Štangel*,G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

6.-7. *Stacho Mudrák*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Rastislav Wratiak, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

8.-10. *Martin Budaj*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Ivan Cimrák, G Veľká Okružná, Žilina
Ján Žebrok, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória C

1. *Ondrej Vacek*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

2.-3. *Pavol Novotný*, 8., ZŠ Hliny, Žilina
Viera Růžičková, 8., ZŠ Hliny, Žilina

4. *Michal Zorkovský*, , G Veľká Okružná, Žilina

5.-6. *Róbert Macho*, G V.B.Nedožerského, Prievidza
Juraj Turek, G Veľká Okružná, Žilina

7.-8. *Ivan Luknár*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Tomáš Mikovíny, G Ružomberok

9.-10. *Viktor Brozovič*, G V.B.Nedožerského, Prievidza
Tibor Zavadil, G Veľká Okružná, Žilina

Kategória P

1. *Martin Gažák*, 4, G Veľká Okružná, Žilina
2. *Vladimír Chovanec*, 4, G Zvolen
3. *Michal Skokan*, 4, G Veľká Okružná, Žilina

Východoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Ján Bábeľa*, 3, G Poštová, Košice
2. *Miloš Gáj*, 4, G D.Tatarku, Poprad
3. *Radoslav Vaľovský*, 4, G P.Horova, Michalovce
4. *Mikuláš Madaras*, 4, G Poštová, Košice
5. *Ivana Brudňáková*, 3, G Koštantínova, Prešov
6. *Eugen Kováč*, 2, G Stropkov
7. *Tomáš Vinář*, 4, G Šrobárová, Košice

8.-10. *Peter Gašpar*, 3, G Jiráskova, Bardejov
Peter Zámborský, 4, G Poštová, Košice
Radovan Jendráľ, 3, G Poštová, Košice

Kategória B

1. *Eugen Kováč*, G Stropkov

2.-4. *Marek Neupauer*, G Stará Ľubovňa
Jaroslav Gajdoš, G Jiráskova, Bardejov
Zuzana Hagarová, G Kežmarok

5.-7. *Peter Ivan*, G Poštová, Košice
Kornel Csach, G Poštová, Košice
Eva Trenklerová, G Poštová, Košice

Kategória C

1.-3. *Ján Svoreň*, G D.Tatarku, Poprad
Jana Fúseková, G D.Tatarku, Poprad
Ján Rusz, G Trebišovská, Košice

4. *Miroslav Dudík*, G Trebišov
5. *Roman Garaj*, G Spišská Nová Ves
6. *Marcel Semančík*, G Alejová, Košice

7.-9. *Peter Kažík*, G Alejová, Košice
Ladislav Kováč, G Poštová, Košice
Andrea Semaničová, G Krompachy

10.-14. *Peter Bohuš*, G Alejová, Košice
Eduard Hagara, 8, ZŠ Kežmarok
Rastislav Krivoš-Belluš, G Poštová, Košice
Slavomír Ondko, G Jiráskova Bardejov
Dominik Tarageľ, G D.Tatarku, Poprad

Kategória Z8

1. *Lucia Mrozová*, ZŠ Dr. Fischera, Kežmarok
2.-4. *Miloš Jančura*, ZŠ Nad Medzou, okr. SNV
Slavomír Nemšák, ZŠ Šmeralova, Prešov
Martin Tamáš, ZŠ T.Ševčenku, Bardejov

Kategória P

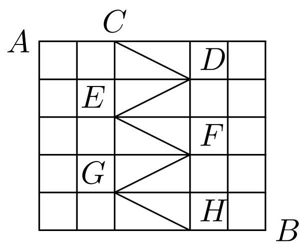
1. *Tomáš Vinař*, 4, G Šrobárová, Košice
2. *Radoslav Vaľovský*, 4, G P.Horova, Michalovce
3. *Martin Domány*, 3, G P.Horova, Michalovce
4. *Peter Gašpar*, 3, G Jiráskova, Bardejov
5.-6. *Ivana Brudňáková*, 3, G Konštantínova, Prešov
Miroslav Dudík, 1, G Trebišov
7. *Tomaš Vnenčák*, 3, G D.Tatarku, Poprad
8. *Ján Svoreň*, 1, G D.Tatarku, Poprad
9.-10. *Peter Koleni*č, 2, G Konštantínova, Prešov
Viktor Kováč, 4, G Opatovská, Košice

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C - I - 1

Pavúk Hubert usúkal pavučinu, ktorej tvar je vyznačený na obrázku 1. Po práci sa oddal zaslúženému odpočinku v jednom rohu pavučiny (A), keď tu sa zrazu v protiľahlom rohu (B) chytila mucha. Koľko ciest najkratšej dĺžky spájajúcich tieto dva rohy má Hubert k dispozícii?



Obr. 1

C - I - 2

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m a n, pre ktoré platí

$$m!n! = (mn)^2.$$

(Číslo $m!$ je súčin všetkých prirodzených čísel i, $1 \leqq i \leqq m$, $1! = 1$.)

C - I - 3

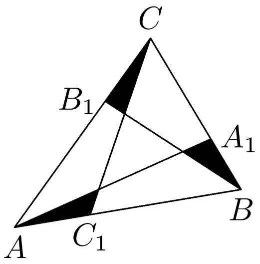
Na šachovom turnaji hranom systémom každý s každým sa zúčastnili len prváci a druháci. Napriek tomu, že druhákov bolo trikrát viac ako prvákov, získali spolu len o 3 body viac ako prváci. Koľko žiakov sa zúčastnilo turnaja?

C - I - 4

V meste Little York je 10 severojužných ulíc a 10 východozápadných ulíc, ktoré sa pretínajú v sto križovatkách. Autobus má po uzavretom okruhu prejsť všetky križovatky. Navrhnite jeho trasu tak, aby počet zmien smeru jazdy bol čo najmenší.

C - I - 5

Na stranách BC, CA, AB trojuholníka ABC sú zostrojené body A_1, B_1, C_1 tak, že $|AC_1| = \frac{1}{3}|AB|$, $|BA_1| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB_1| = \frac{1}{3}|CA|$. Nech P, Q, R sú vzájomné priesečníky priamok AA_1, BB_1 a CC_1. Porovnajte obsah trojuholníka PQR so súčtom obsahov trojuholníkov vyznačených na obrázku 2.



Obr. 2

C - I - 6

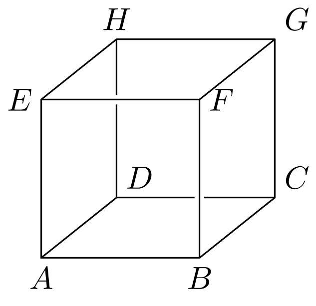
Uvažujme trojuholník ABC, pre ktorého priesečník výšok M platí $|AB| = |CM|$. Vypočítajte veľkosť uhla pri vrchole C trojuholníka ABC.

C - S - 1

Nájdite všetky prirodzené čísla x, y, pre ktoré platí:

$$24x^2 = y! - x!$$

C - S - 2



Obr. 3

Na zimu sa pavúk Hubert uchýlil do kabinetu matematiky. Objavil v ňom drôtený model kocky (pozri obrázok) s dĺžku hrany 20 cm. Na tomto modeli najprv napäl vlákna pozdĺž všetkých stenových uhlopriečok, a potom vláknami navzájom pospájal všetky stredy stien. Raz sa chcel dostať z vrcholu B do vrcholu H. Zvolil si cestu po drôte BF a vlákne FH. Poraďte mu v tejto„preliezačke“ z drôtov a vláken kratšiu cestu na návrat z H do B. Určte tiež počet najkratších ciest z H do B.

C - S - 3

Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s obsahom $100\,\mathrm{cm}^2$. Označme stredy strán AB, BC, CD, DA po rade E, F, G, H. Vypočítajte súčet obsahov trojuholníkov ABF, BCG, CDH a ADE .

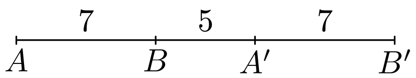
C - II - 1

Určte všetky trojice prirodzených čísel x, y a z, pre ktoré platí:

$$x! - y! = 5 \cdot z! + 96 \ .$$

C - II - 2

Na zemi leží ťažká kovová 7-metrová tyč. Jeden človek s ňou môže pohnúť iba tak, že zodvihne jeden koniec tyče a otáča ju okolo druhého konca ležiaceho na zemi. Najmenej koľkokrát musí zodvihnúť a otáčať tyč, aby ju z polohy AB posunul o 12 metrov v smere polpriamky AB do polohy $A'B'$? (Koniec A prejde do A', koniec B do B'.) Popíšte postup s najmenším počtom otáčaní a ukážte, že menší počet otáčaní nestačí. Vzájomná poloha a vzdialenosti bodov A, B, A', B' sú uvedené na obrázku 4.



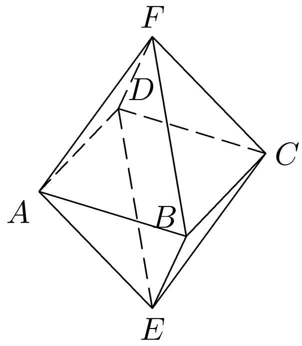
Obr. 4

C - II - 3

Vo vnútri obdĺžnika $ABCD$ ležia body X a Y tak, že celý obdĺžnik je rozdelený na dva trojuholníky ADX, BCY s rovnakým obsahom a dva konvexné štvoruholníky $ABYX$ a $CDXY$ tiež s rovnakým obsahom. Dokážte, že potom úsečka XY prechádza stredom obdĺžnika.

C - II - 4

Tentokrát si náš starý známy pavúk Hubert vybral na svoje hry v kabinete matematiky drôtený model pravidelného osemstena. Jeho steny tvoria 8 rovnostranných trojuholníkov (pozri obrázok). Na každej stene pospájal Hubert vláknami stredy príslušných hrán. Z koľkých ciest najkratšej dĺžky si môže Hubert vybrať, aby sa v takto vzniknutej sieti pavučín a drôtov dostal z vrcholu E do vrcholu F?



Obr. 5

Kategória B

B - I - 1

Pre ktoré reálne čísla a má rovnica

$$x^4 + 6x^3 + ax^2 + 6x + 1 = 0$$

štyri rôzne korene v obore reálnych čísel?

B - I - 2

Ak pre kladné reálne čísla a, b, c platí $c > a + b$, potom

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc > 2(a + b)^2 c.$$

Dokážte.

B - I - 3

Nech P je mnohočlen s celočíselnými koeficientami a nech $P(13) = 8\,046$. Dokážte, že súčet koeficientov mnohočlena P nie je prvočíslo.

B - I - 4

V pravouhlom trojuholníku ABC s odvesnami dĺžok $|AC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 4\,\mathrm{cm}$ označme M priesečník osi uhla ACB a prepony AB. Dokážte, že vzdialenosť stredov O_1, O_2 kružníc vpísaných trojuholníkom AMC, BMC je $\frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}}$ cm.

B - I - 5

Určte najväčší možný počet častí, na ktorý n kružníc rozdelí rovinu (n je prirodzené číslo).

B - I - 6

Určte najväčší možný objem štvorbokého ihlana $ABCDV$, ktorého základňou je kosoštvorec $ABCD$ so stranou dĺžky a, a ktorého stenové výšky z vrchola V na hrany AB, CD majú dĺžku h.

B - S - 1

Pre ktoré reálne čísla a majú rovnice

$$x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x = a - 2,$$
$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x = 1 - 2a$$

aspoň jeden spoločný reálny koreň?

B - S - 2

Nájdite všetky celé čísla x, ktoré vyhovujú rovnici

$$19^x + 94^x = x^{1994}.$$

B - S - 3

V pravouhlom trojuholníku ABC s odvesnami dĺžok $|AC| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm označme D pätu výšky z vrcholu C na preponu AB. Určte vzdialenosť stredov O_1, O_2 kružníc vpísaných trojuholníkom ACD, BCD.

B - II - 1

Určte všetky hodnoty reálnych čísel a, b, pre ktoré je riešením sústavy rovníc

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$
$$y^4 + by^3 + ay^2 + by + 1 = 0$$

jediná dvojica reálnych čísel x, y, keď viete, že platí $xy < 0$.

B - II - 2

Nájdite všetky prirodzené čísla m, pre ktoré číslo $998^m - 1$ delí číslo 1994^m.

B - II - 3

Na prepone AB pravouhlého trojuholníka ABC je daný bod M taký, že kružnice vpísané trojuholníkom CAM a BCM majú rovnaký polomer. Rozhodnite, čo je väčšie: obsah trojuholníka ABC, alebo obsah štvorca so stranou $|CM|$?

B - II - 4

Každý z bodov kocky s hranou dĺžky a ofarbíme práve jednou z troch farieb. Dokážte, že potom medzi týmito bodmi existujú dva rovnakej farby, ktorých vzdialenosť je väčšia ako $\frac{7}{5}a$.

Kategória A

A - I - 1

Prirodzené číslo $m > 1$ nazveme k-násobným deliteľom prirodzeného čísla n, ak platí rovnosť $n = m^k q$, kde q je celé číslo, ktoré nie je násobkom čísla m. Určte, koľko sedemnásobných deliteľov má číslo $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$.

A - I - 2

Základňou trojbokého hranola $ABCA'B'C'$ je pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s odvesnami AB, AC danej dĺžky a. Bočné hrany AA', BB', CC' zvierajú s rovinami základní uhol 60^o. Uhlopriečka BC' bočnej steny $BCC'B'$ má dĺžku $a\sqrt{6}$ a je kolmá na hranu AC. Určte objem hranola.

A - I - 3

Daný je trojuholník ABC, ktorého uhol ACB má veľkosť 140^o. Označme X priesečník osi uhla ABC so stranu AC a Y bod strany AB, pre ktorý má uhol YCB veľkosť 100^o. Určte veľkosť uhla YXB.

A - I - 4

Pre ktoré celé $n > 2$ existujú racionálne čísla p a q také, že $\sqrt[3]{n} = p + q\sqrt[3]{2}$?

A - I - 5

Nájdite najmenšie reálne číslo p, pri ktorom nerovnosť

$$a + b - p \cdot \sqrt{ab} \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$$

platí pre ľubovoľnú dvojicu kladných čísel a, b.

A - I - 6

Zistite všetky čísla, ktoré sú cifernými súčtami druhých mocnín prirodzených čísel (zapísaných v desiatkovej sústave).

A - S - 1

Uveďte príklad prirodzeného čísla n, pre ktoré má číslo 2^n práve 1 993 rôznych 1 994-násobných deliteľov.

A - S - 2

Daný je trojuholník ABC a bod M na polpriamke opačnej k polopriamke AB. Bodom M veďte priamku $p \neq AB$ tak, aby jej priesečníky P, Q s priamkami AC, BC určili trojuholník PQC, ktorý má rovnaký obsah ako trojuholník ABC.

A - S - 3

V rovine je nakreslený konvexný n-uholník ($n \geqq 3$) a niektoré jeho uhlopriečky tak, že žiadne dve vyznačené uhlopriečky sa nepretínajú. Dokážte, že jeho vrcholy je možné ofarbiť pomocou troch farieb tak, že žiadne dva vrcholy spojené stranou alebo nakreslenou uhlopriečkou nemajú rovnakú farbu.

A - II - 1

Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktoré má práve päť dvojnásobných deliteľov.

A - II - 2

Uvažujme trojuholník ABC s uhlom 100^o pri vrchole A a označme po rade D, E priesečníky osí uhlov pri vrcholoch B,C s protiľahlými stranami. Určte všetky možné veľkosti uhla ABC, ak viete, že $|BE| = |CD|$.

A - II - 3

V rovine uvažujme systém n navzájom rôznych priamok p_1, p_2, …, p_n. Každý bod, ktorým prechádzajú práve tri z týchto priamok, ofarbime na červeno a označme a_i počet červených bodov na priamke p_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Rozhodnite, či existuje systém

a) 4 priamok, pre ktorý $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 2)$.
b) 6 priamok, pre ktorý $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$,
c) 9 priamok, pre ktorý $(a_1, a_2, \dots, a_9) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3)$,
d) 9 priamok, pre ktorý $(a_1, a_2, \dots, a_9) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3)$.

A - II - 4

Rozhodnite, či existuje kubická rovnica

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

s celočíselnými koeficientami p, q a r, ktorá má v obore reálnych čísel jediný koreň $x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

A - III - 1

Nech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je ľubovoľná funkcia na množine prirodzených čísel, ktorá spĺňa nerovnosť

$$f(x) + f(x+2) \leqq 2f(x+1)$$

pre každé prirodzené číslo x. Dokážte, že potom v rovine existuje priamka, na ktorej leží nekonečne veľa bodov s kartézskymi súradnicami $[n, f(n)]$.

A - III - 2

V kvádri s objemom V je umiestnený konvexný mnohosten M. Kolmý priemet mnohostena M na každú stenu kvádra je totožný s touto stenou. Aký najmenší objem môže mať M?

A - III - 3

V rovine je nakreslený konvexný 1 994-uholník M a niektoré jeho uhlopriečky tak, že z každého vrcholu vychádza práve jedna nakreslená uhlopriečka. Dĺžkou uhlopriečky rozumieme počet strán mnohouholníka M, ktoré táto uhlopriečka od M odrezáva (minimum dvoch možných čísel). Označme $(d_1, d_2, \dots, d_{997})$ dĺžky nakreslených uhlopriečok, usporiadané zostupne podľa veľkosti. Rozhodnite, či je možné uhlopriečky nakresliť tak, aby

a) $(d_1, d_2, \dots, d_{997}) = (\underbrace{3, \dots, 3}_{991}, \underbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2}_{6})$,
b) $(d_1, d_2, \dots, d_{997}) = (\underbrace{8, 8, 8, 8}_{4}, \underbrace{6, \dots, 6}_{985}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_{8})$.

A - III - 4

Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť prirodzených čísel taká, že pre každé n je číslo $(a_n-1)(a_n-2)\dots(a_n-n^2)$ celým kladným násobkom čísla n^{n^2-1}. Potom pre každú konečnú množinu prvočísel P platí nerovnosť

$$\sum_{p\in P}\frac{1}{\log_p a_p}<1.$$

Dokážte.

A - III - 5

Označme A_1, B_1, C_1 päty výšok ostrouhlého trojuholníka ABC a V ich priesečník. Ak majú trojuholníky AC_1V, BA_1V, CB_1V rovnaký obsah, plynie odtiaľ, že trojuholník ABC je rovnostranný?

A - III - 6

Dokážte, že z každej štvorice rôznych čísel ležiacich v intervale $(0,1)$ možno vybrať dve čísla $a\neq b$ tak, aby platila nerovnosť

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}>\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab-\frac{1}{8ab}.$$

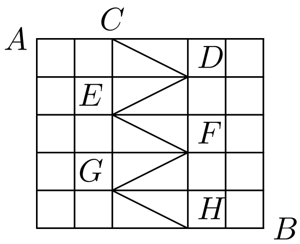
Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

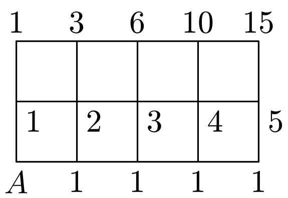
Cesty najkratšej dĺžky vedúce z bodu A do bodu B sú troch druhov: **1.** tie, ktoré vedú po úsečke CD, **2.** tie, ktoré vedú po úsečke EF a **3.** tie, ktoré vedú po úsečke GH (obr. 1). Ak počet najkratších ciest medzi dvoma bodmi X a Y Hubertovej pavučiny označujeme $p(X,Y)$, potom počet ciest najkratšej dĺžky medzi A a B je

$$p(A,B) = p(A,C)\cdot p(D,B) + p(A,E)\cdot p(F,B) + p(A,G)\cdot p(H,B).$$



Obr. 6

Ostáva teda spočítať počet ciest najkratšej dĺžky medzi dvoma vrcholmi štvorcovej siete. Po chvíli experimentovania zistíme, že každá cesta najkratšej dĺžky z bodu so súradnicami $[0,0]$ do bodu so súradnicami $[m,n]$, $m > 0$, $n > 0$, vedie buď cez bod $[m-1,n]$, alebo cez bod $[m,n-1]$. Preto ich počet je daný súčtom $p([0,0],[m-1,n]) + p([0,0],[m,n-1])$.



Obr. 7

Ak uplatňujeme toto pravidlo postupne na ľavej tretine pavučiny, dostávame počty najkratších ciest tak, ako je uvedené na obr. 2. Preto $p(A,C) = p(H,B) = 1$, $p(A,E) = p(F,B) = 6$, $p(A,G) = p(D,B) = 15$. Celkový počet ciest je teda $1\cdot 15 + 6\cdot 6 + 15\cdot 1 = 66$.

C – I – 2

Rovnicu po delení mn upravíme na tvar

$$(m-1)!\,(n-1)! = mn \tag{1}$$

(kladieme $0!=1$). Všimneme si, že pre každé celé $k \geqq 4$ platí $(k-1)! > k$, lebo

$$(k-1)! = 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1) \geqq 2(k-1) = k + (k-2) > k.$$

Preto nemôžu byť obidve čísla m, n väčšie ako 3: vynásobením nerovností $(m-1)! > m$ a $(n-1)! > n$ by sme dostali spor s rovnicou (1). S ohľadom na symetriu môžeme predpokladať, že napr. $m \leqq 3$. Pre $m = 1$ dostávame $(n-1)! = n$, čo podľa predchádzajúceho znamená, že $n \leqq 3$; preskúmaním možností $n = 1, 2, 3$ zistíme, že rovnici vyhovuje len $n = 1$. Pre $m = 2$ dostávame $(n-1)! = 2n$, čo pre $n \leqq 4$ zrejme nenastane; pre $n \geqq 5$ ale platí

$$(n-1)! \geqq 2 \cdot 3 \cdot (n-1) = 6(n-1) = 2n + (4n-6) > 2n. \qquad (2)$$

Konečne pre $m = 3$ dostávame $2(n-1)! = 3n$, čo v prípade $n < 5$ platí len pre $n = 4$; pre $n \geqq 5$ ale podľa (2) platí $2(n-1)! > 4n > 3n$. Hľadané dvojice (m, n) sú $(1, 1)$, $(3, 4)$ a $(4, 3)$.

C – I – 3

Označme n počet prvákov, ktorí sa zúčastnili turnaja. Druhákov potom bolo $3n$ a celkový počet žiakov bol $4n$. Tí medzi sebou zohrali spolu $\frac{1}{2} \cdot 4n(4n-1)$ zápasov. Pretože za víťazstvo je jeden bod, za remízu pol boda a za prehru žiadny bod, celkový počet rozdaných bodov je rovný počtu zápasov. Ak teda prváci získali p bodov a druháci d bodov, potom

$$p + d = 2n(4n-1).$$

Druháci získali len o tri body viac ako prváci, teda

$$p = d - 3.$$

Dosadením z druhej rovnice do prvej dostaneme

$$d = n(4n-1) + \frac{3}{2}.$$

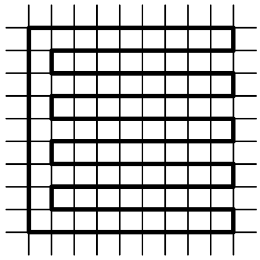
Počet bodov, ktoré získali druháci, je rovný aspoň počtu bodov, ktoré získali vo vzájomných zápasoch medzi sebou. Teda

$$n(4n-1) + \frac{3}{2} \geqq \frac{3n(3n-1)}{2}.$$

Úpravou získame nerovnosť $n + 3 \geqq n^2$. V obore prirodzených čísel ju spĺňajú len čísla $n = 1$, $n = 2$, lebo pre $n \geqq 3$ je $n + 3 \leqq 2n < n \cdot n$.

Turnaja sa teda mohli zúčastniť buď 3 druháci a jeden prvák, alebo 6 druhákov a 2 prváci. V oboch prípadoch sa musíme presvedčiť, že turnaj mohol prebehnúť tak, aby boli splnené podmienky zadania. V prípade štyroch účastníkov získal prvák v zápasoch s druhákmi $1,5$ bodu. Tí potom získali zostávajúceho $4,5$ bodu. V prípade 8 účastníkov vo všetkých zápasoch medzi prvákom a druhákom s výnimkou jedného, ktorý skončil remízou, zvíťazil prvák. Prváci tak získali $12,5$ bodu a druháci $15,5$ bodu.

C – I – 4



Obr. 8

Po chvíli experimentovania prídeme na to, že najmenší možný počet zmien smeru na okruhu je 20. Jeden z viacerých možných návrhov takéhoto okruhu je nakreslený na obrázku 8. Podstatnou časťou riešenia je však dôkaz toho, že na každom okruhu prechádzajúcom cez všetky križovatky je aspoň 20 zmien smeru.

Predpokladajme najprv, že okruh je taký, že autobus ide po každej z desiatich severojužných ulíc. Vždy, keď prechádza na nejakú severojužnú ulicu a vždy, keď z nej odbočuje, musí zmeniť smer. Týchto zmien je teda aspoň $2 \cdot 10 = 20$.

Pokiaľ autobus nejde po niektorej zo severojužných ulíc, musí cez ňu prechádzať na desiatich križovatkách. Ide teda po všetkých desiatich východozápadných uliciach. Rovnakou úvahou, akú sme previedli už skôr, dostávame, že počet zmien smeru je aspoň 20.

C – I – 5

Trojuholník ABC je rozdelený na tri čierne trojuholníky, tri štvoruholníky a trojuholník PQR (pozri obrázok v zadaní úlohy). Súčet obsahov všetkých týchto trojuholníkov a štvoruholníkov je rovný obsahu $\triangle ABC$. Obsahy trojuholníkov ABA_1, BCB_1 a CAC_1 sú rovné jednej tretine obsahu trojuholníka ABC. Preto platí

$$S_{ABA_1} + S_{BCB_1} + S_{CAC_1} = S_{ABC}.$$

V súčte na ľavej strane je obsah každého z čiernych trojuholníkov započítaný dvakrát, obsah štvoruholníkov je započítaný raz, zatiaľčo obsah trojuholníka PQR nie je započítaný ani raz. Odtiaľ plynie, že súčet obsahov vyznačených trojuholníkov je rovný obsahu trojuholníka PQR.

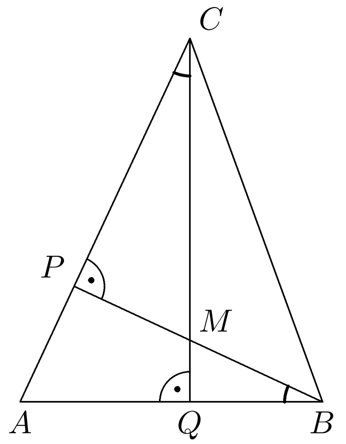
Obsah každého z vyznačených trojuholníkov aj obsah $\triangle PQR$ možno vypočítať pomocou obsahu $\triangle ABC$.

C – I – 6

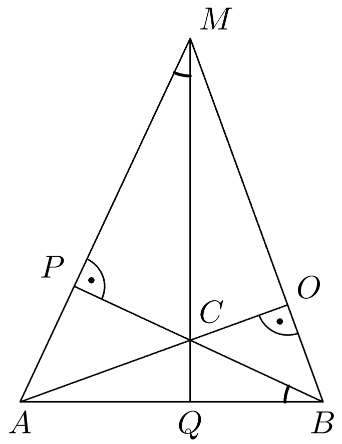
Označme O pätu výšky z vrcholu A, P pätu výšky z vrcholu B a Q pätu výšky z vrcholu C. Trojuholníky ABP a MCP majú pravé uhly pri vrchole P. V prípade, že uhol pri vrchole C je ostrý, zhodujú sa tiež v uhloch pri vrcholoch B a C. Pre ostrouhlý trojuholník (pozri obrázok 9) to dokážeme takto:

$$|\measuredangle ABP| = 90^\circ - |\measuredangle QMB| = 90^\circ - |\measuredangle PMC| = |\measuredangle PCM|.$$

(Dôkaz pre trojuholník s neostrým uhlom pri vrchole A alebo B preveďte sami!) Pretože $|AB| = |CM|$, sú oba trojuholníky zhodné. Špeciálne $|CP| = |BP|$, pravouhlý trojuholník BCP je rovnoramenný a uhol pri vrchole C je teda rovný $45°$.



Obr. 9



Obr. 10

V prípade, že uhol pri vrchole C je tupý (môže byť pravý?), dokážeme analogicky, že $\triangle ABP \cong \triangle CMP$. (Preveďte podrobne!) Odtiaľ plynie, že $|MP| = |PB|$, a teda v trojuholníku BMP je uhol pri vrchole M rovný $45°$. Uhol pri vrchole C je preto rovný $135°$, ako sa presvedčíme výpočtom v štvoruholníku $COMP$. Pozri obrázok 10.

C – S – 1

Ľavá strana rovnice je kladné číslo, preto $y \geqq x + 1$. Odtiaľ plynie, že

$$24x^2 = y! - x! \geqq (x+1)! - x! = x!(x+1-1) = x!x.$$

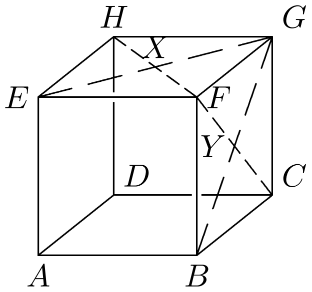
Po vydelení kladným číslom x^2 dostávame $24 \geqq (x-1)!$. (Tu kladieme $0! = 1$.) Teda $x \leqq 5$ a súčasne má byť $y! = 24x^2 + x!$. Ak dosadíme za x čísla 1, 2, 3, 4, 5, zistíme, že predchádzajúca rovnica má riešenie len pre $x = 5$, a to $y = 6$.

Riešením rovnice je jediná dvojica $(x, y) = (5, 6)$.

C – S – 2

Cesta z B do H po drôte BF a uhlopriečke FH má dĺžku $20\bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)$. Označme X stred steny $EFGH$ a Y stred steny $BCGF$. Každá z úsečiek HX, XY a YB má dĺžku polovice stenovej uhlopriečky kocky, t.j. $20 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Preto cesta z H do B po vláknach HX, XY a YB má dĺžku $20 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} < 20\bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)$. Dokážeme, že táto cesta je aj cestou najkratšej dĺžky.

Každá cesta z H do B, ktorá vedie cez nejaký vrchol kocky, má dĺžku aspoň $20\bigl(1 + \sqrt{2}\bigr)$. Preto cesty najkratšej dĺžky musia nutne viesť cez stredy stien. Nech teda cesta z H vedie po polovici uhlopriečky do stredu steny s vrcholom H. Ďalej môžu nastať tieto možnosti:



Obr. 11

1. Cesta vedie ďalej do steny, ktorej vrcholom nie je bod B. Potom je jej dĺžka väčšia ako $20\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+1\right)$.
2. Cesta pokračuje do stredu protiľahlej steny a jej dĺžka je aspoň $20\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.
3. Cesta vedie do stredu steny s vrcholom B. Ak vedie z tohoto stredu priamo do B, má dĺžku $20\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Tretí prípad dáva popis všetkých ciest z H do B najkratšej dĺžky. Ich počet je $3\cdot 2=6$. Z bodu H má pre výber prvého úseku cesty najkratšej dĺžky Hubert 3 možnosti, pre výber druhého úseku cesty má 2 možnosti a pre výber posledného úseku len jedinú možnosť.

C – S – 3

Obsah trojuholníka XYZ budeme označovať S_{XYZ}, obsah štvoruholníka $ABCD$ označujeme S. Pretože F je stredom BC a H je stredom AD, platí

$$S_{ABF}=\frac{1}{2}S_{ABC},\qquad S_{CDH}=\frac{1}{2}S_{ACD}.$$

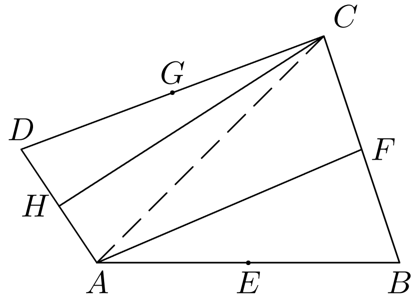
Teda

$$S_{ABF}+S_{CDH}=\frac{1}{2}\left(S_{ABC}+S_{ACD}\right)=\frac{1}{2}S.$$

Úplne rovnako dokážeme

$$S_{BCG}+S_{ADE}=\frac{1}{2}\left(S_{BCD}+S_{ABD}\right)=\frac{1}{2}S.$$

Súčet obsahov trojuholníkov ABF, BCG, CDH a ADE je teda rovný obsahu daného štvoruholníka, t.j. $100\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 12

C – II – 1

Predovšetkým $x! > 96$, a preto $x \geqq 5$. Teda $x!$ je deliteľné 5-timi a pravá strana dáva po delení číslom 5 zvyšok 1. Preto $y!$ musí dávať po delení 5-timi zvyšok 4, čo je možné iba pre $y = 4$. Riešme teda rovnicu:

$$x! = 5 \cdot z! + 120. \tag{1}$$

Môžeme postupovať dvoma rôznymi spôsobmi.

1. Z rovnice plynie, že $x \geqq z + 1$. Teda $(z+1)! \leqq 5 \cdot z! + 120$ a odtiaľ:

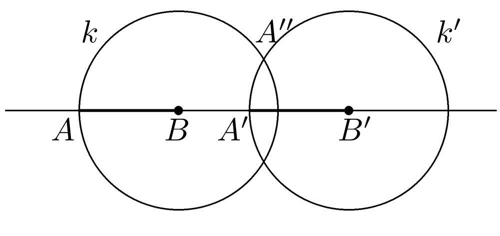
   $$120 \geqq (z+1)! - 5 \cdot z! = (z-4) \cdot z!$$

   Preto $z \leqq 5$. Preverením všetkých piatich možností $z = 1, 2, 3, 4, 5$ zistíme, že rovnici (1) vyhovuje iba jediné z, a to $z = 5$. Pritom $x = 6$.
2. Z rovnice (1) plynie, že $x! > 120$, teda $x \geqq 6$. Číslo $x!$ je preto deliteľné 16-timi. Číslo 120 dáva po delení 16-timi zvyšok 8, preto $z!$ nemôže byť deliteľné 16-timi, a teda $z \leqq 5$. Ďalej postupujeme rovnako ako v (1).

Úloha má jediné riešenie $(x, y, z) = (6, 4, 5)$.

C – II – 2

Pri každom otáčaní tyče zostáva jeden jej koniec na mieste. Preto k premiestneniu tyče z polohy AB do polohy $A'B'$ nám jedno otáčanie nestačí. Nestačia ani dve otáčania, pretože prvým otáčaním nepremiestnime koniec A alebo B do bodov A' alebo B'. Ukážeme, ako premiestnenie možno previesť pomocou troch otáčaní.

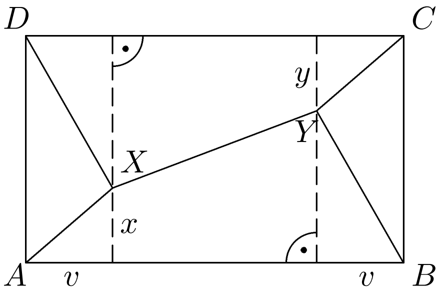


Obr. 13

Uvažujme kružnicu k so stredom B a kružnicu k' so stredom B', obe s polomerom 7 m (viď obr. 13). Tieto kružnice sa pretnú v dvoch bodoch. Ktorýkoľvek z nich označme A''. Najprv tyč otočíme okolo bodu B tak, aby koniec A prešiel do bodu A''. Druhýkrát otočíme tyč okolo bodu A'' tak, aby sa koniec B premiestnil do bodu B'. Nakoniec otočíme tyč okolo bodu B' tak, aby sa druhý koniec tyče dostal do bodu A'.

C – II – 3

Nech $|AB| = a$, $|BC| = b$. Trojuholníky ADX a BCY majú rovnaký obsah, a preto vzdialenosť bodu X od AD je rovná vzdialenosti bodu Y od BC. Označme túto vzdialenosť v. Označme x vzdialenosť X od AB a y vzdialenosť Y od CD.



Obr. 14

Obsah štvoruholníka $ABYX$ je rovnaký ako súčet obsahov dvoch pravouhlých trojuholníkov a lichobežníka (pozri obr. 14) a rovná sa:

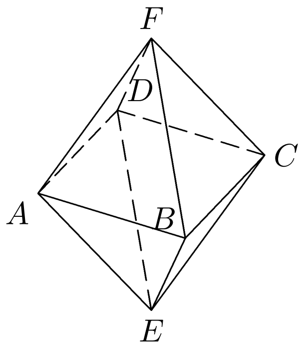
$$\frac{1}{2}\,vx + \frac{1}{2}\,(b-y)v + \frac{1}{2}\,(x+b-y)(a-2v) = \frac{1}{2}\,(a-v)(b+x-y)\ .$$

Rovnako spočítame obsah štvoruholníka $CDXY$:

$$\frac{1}{2}\,vy + \frac{1}{2}\,(b-x)v + \frac{1}{2}\,(b-x+y)(a-2v) = \frac{1}{2}\,(a-v)(b+y-x)\ .$$

Pretože $a > v$, plynie z rovnosti obsahov oboch štvoruholníkov rovnosť $b+x-y = b+$ $+\,y-x$, čo je $x = y$. Bod Y je teda obrazom bodu X pri stredovej súmernosti podľa stredu obdĺžnika. Tým je dokázané, že úsečka XY prechádza stredom obdĺžnika.

C – II – 4



Obr. 15

Predpokladajme, že hrany osemstena majú dĺžku 1. Každá cesta z E do F musí zrejme viesť buď niektorým z vrcholov A, B, C, D, alebo stredom niektorej z hrán AB, BC, CD, DA (pozri obr. 15). Pritom najkratšia cesta z bodu E do každého z týchto bodov má dĺžku 1. Počet najkratších ciest z bodu E do každého z vrcholov A, B, C, D je rovný 1 a do každého zo stredov hrán AB, BC, CD, DA je rovný 2. Rovnaké sú aj počty najkratších ciest z týchto ôsmich bodov roviny $ABCD$ do bodu F. Preto je počet najkratších ciest z E do F rovný:

$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 = 20\ .$$

B – I – 1

Rovnica zrejme nemá koreň 0. Po vydelení oboch strán rovnice číslom x^2 ju upravíme na tvar

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + a = 0.$$

Položme $u = x + \dfrac{1}{x}$, potom $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$ a rovnicu prepíšme na tvar

$$u^2 + 6u + a - 2 = 0. \tag{1}$$

Zo substitučného vzťahu dostávame

$$x^2 - ux + 1 = 0. \tag{2}$$

Ak má mať pôvodná rovnica štyri rôzne reálne korene, potom rovnica (1) musí mať dva rôzne korene (označme ich u_1 a u_2), rovnako ako každá z oboch rovníc (2) pre $u = u_1$, resp. $u = u_2$ musí mať dva rôzne reálne korene, t.j. diskriminanty týchto rovníc sú kladné. Dostávame podmienky

$$a < 11 \quad \text{a zároveň} \quad |u_1| > 2 \text{ a } |u_2| > 2. \tag{3}$$

Predpokladajme, že u_1, u_2 sú korene rovnice (2), a nech $u_1 < u_2$. Z Viètových vzťahov zistíme, že $2u_1 < u_1 + u_2 = -6$, takže $u_1 < -3$. Pre koreň u_1 teda platí vzťah (3) automaticky, pre druhý koreň musí platiť buď $u_2 < -2$, alebo $u_2 > 2$. Ak si predstavíme graf a korene kvadratickej funkcie $f(u) = u^2 + 6u + a - 2$, potom to znamená, že $f(-2) > 0$, alebo $f(2) < 0$. Odtiaľ $a > 10$, alebo $a < -14$. Teda $a \in M = (-\infty, -14) \cup (10, 11)$.

Ukážeme ešte, že pre každé $a \in M$ má pôvodná rovnica štyri navzájom rôzne korene. Pre $a \in M$ má rovnica (1) dva rôzne korene u_1, u_2, ktorých absolútne hodnoty sú väčšie ako 2. Preto každá z oboch rovníc $x + \dfrac{1}{x} = u_i$ má dva rôzne reálne korene x_i a $\dfrac{1}{x_i}$ $(i = 1, 2)$, čo sú korene pôvodnej rovnice. Medzi číslami x_1, $\dfrac{1}{x_1}$, x_2, $\dfrac{1}{x_2}$ však nemôžu byť dve rovnaké (keby $\left\{x_1, \dfrac{1}{x_1}\right\} \cap \left\{x_2, \dfrac{1}{x_2}\right\} \neq \emptyset$, potom $\left\{x_1, \dfrac{1}{x_1}\right\} = \left\{x_2, \dfrac{1}{x_2}\right\}$ a $u_1 = u_2$).

B – I – 2

Položme $x = c - a - b$. Potom $x > 0$ a $c = a + b + x$. Jednoduchými algebraickými úpravami možno overiť, že

$$\begin{aligned} F &= a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 2(a+b)^2c = \\ &= a^3 + b^3 + \big((a+b)+x\big)^3 + 3ab(a+b+x) - 2(a+b)^2(a+b+x) = \\ &= x(a+b)(a+b+3x) + x(x^2+3ab) > 0, \end{aligned}$$

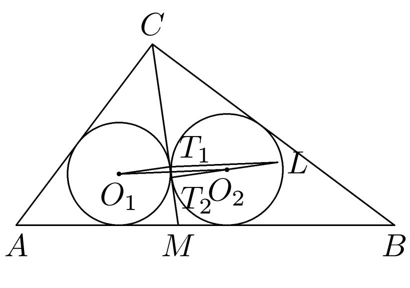
lebo všetky členy posledného výrazu sú kladné. Tým je daná nerovnosť dokázaná.
Iné riešenie. Spočíva v tom, že výraz F budeme považovať za polynóm s premennou c. Dosadením $c = a + b$ sa po úprave presvedčíme, že $F(a+b) = 0$, t.j. $a+b$ je koreňom polynómu, a preto je tento polynóm deliteľný koreňovým činiteľom $c - (a+b)$ a platí: $F(c) = \big(c - (a+b)\big)(c^2 + ac + bc - a^2 + ab - b^2)$. Výraz v prvej zátvorke je pre $c > a+b$ kladný, výraz v druhej zátvorke je tiež kladný, pretože $c^2 + (a+b)c - a^2 + ab - b^2 > > 2(a+b)^2 - a^2 + ab - b^2 = (a+b)^2 + 3ab > 0$.

B – I – 3

Označme s súčet koeficientov daného polynómu. Zrejme je $s = P(1)$. Pre každé dve rôzne celé čísla a, b a ľubovoľný polynóm Q s celočíselnými koeficientami platí, že číslo $Q(a) - Q(b)$ je deliteľné číslom $a - b$. Preto $12 \mid \big(P(13) - P(1)\big)$. Existuje teda celé číslo k také, že $8\,046 - s = 12k$, odtiaľ $s = 8\,046 - 12k = 6(1\,341 - 2k)$. Súčet koeficientov daného polynómu je deliteľný šiestimi, a teda nie je prvočíslo.

B – I – 4

Z Pytagorovej vety určíme $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$. Zo známych vlastností trojuholníka je $|AM| : : |BM| = |AC| : |BC| = 3 : 4$, odtiaľ $|AM| = \frac{3}{7}|AB| = \frac{15}{7}\,\mathrm{cm}$, $|BM| = \frac{20}{7}\,\mathrm{cm}$. Pre trojuholníky ABC, AMC, BMC označme (v danom poradí) S, S_1, S_2 ich obsahy, r, r_1, r_2 polomery vpísaných kružníc a s, s_1, s_2 polovice ich obvodov. Platí $S = = \frac{1}{2}|AC|\,|BC| = 6\,\mathrm{cm}^2$, $S_1 : S_2 = |AM| : |BM| = 3 : 4$, lebo trojuholníky AMC, BMC majú rovnakú výšku z vrchola C. Platí teda $S_1 = \frac{18}{7}\,\mathrm{cm}^2$, $S_2 = \frac{24}{7}\,\mathrm{cm}^2$. Zo vzťahu $S_1 = \frac{1}{2}|CM|\,|CA| \sin 45^o$ vyplýva, že $|CM| = \frac{12}{7}\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.



Obr. 16

S využitím známych vzorcov ďalej dostávame $r_1 = \dfrac{S_1}{s_1} = \dfrac{9 - 3\sqrt{2}}{7}$ cm, $r_2 = \dfrac{S_2}{s_2} = = \dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{7}$ cm a $|CT_1| = s_1 - |AM|$, $|CT_2| = s_2 - |BM|$ (obr. 16). Odtiaľ $|T_1T_2| =$

$= |CT_2| - |CT_1| = s_2 - s_1 + |AM| - |BM| = \frac{1}{7}$ cm.

Označme ďalej KL obraz úsečky O_1O_2 v posunutí o vektor $\overrightarrow{O_1T_1}$ $(K = T_1)$. Z pravouhlého trojuholníka KT_2L potom dostávame $|O_1O_2| = |KL| = \sqrt{|T_1T_2|^2 + |LT_2|^2} = \sqrt{|T_1T_2|^2 + (r_1 + r_2)^2} = \frac{1}{7}\sqrt{340 - 170\sqrt{2}}$ cm.

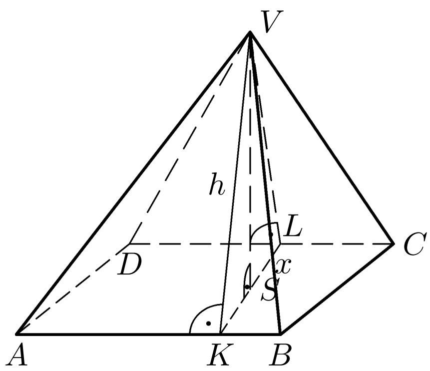
B – I – 5

Pre $n = 1$ je hľadaný počet $P(1) = 2$. n-tá kružnica pretne $n - 1$ kružníc v nanajvýš $2(n-1)$ bodoch. Počet častí roviny sa teda pridaním n-tej kružnice zvýši tiež nanajvýš o $2(n - 1)$. Pre počet $P(n)$ častí roviny dostávame

$$P(n) \leqq 2(n-1) + P(n-1) \leqq 2(n-1) + 2(n-2) + P(n-2) \leqq \ldots \leqq$$
$$\leqq 2(n-1+n-2+\ldots+1) + P(1) = n(n-1) + 2.$$

Vhodným príkladom sa presvedčme, že pre $P(n)$ platí rovnosť $P(n) = n(n-1) + 2$. Nech k_1 je jednotková kružnica so stredom O a nech A je pevne zvolený bod tejto kružnice. Označme k_i obraz kružnice k_1 v posunutí o vektor $(i-1)\frac{\overrightarrow{OA}}{n}$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom sústava kružníc $k_1, k_2, \ldots, k_n$ delí rovinu na $n(n-1) + 2$ častí.

B – I – 6



Obr. 17

Označme K, L päty kolmíc z V na hrany AB, CD. Priamka AB je kolmá na rovinu KLV, pretože je kolmá na priamky KV, LV (obr. 17). Odtiaľ $KL \perp AB$. Výška kosoštvorca $ABCD$ je $|KL| = 2x$. Päta výšky ihlana leží v rovine KLC a je zrejme totožná so stredom S úsečky KL. Z pravouhlého trojuholníka KSV je táto výška $v = \sqrt{h^2 - x^2}$. Objem ihlana je teda

$$V = \frac{2}{3}ax\sqrt{h^2 - x^2} = \frac{2}{3}a\sqrt{x^2h^2 - x^4}.$$

Objem bude maximálny, práve keď bude maximálny výraz pod odmocninou

$$U = x^2h^2 - x^4 = \frac{1}{4}h^4 - \left(x^2 - \frac{1}{2}h^2\right)^2.$$

Maximum hľadáme na intervale $0 < x < \frac{1}{2}a$, pretože výška kosoštvorca $2x$ je menšia ako veľkosť a jeho strany. Kvadratická funkcia U premennej $t = x^2$ nadobúda absolútne maximum pre $x = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, preto ďalšia diskusia závisí od toho, či bod $\dfrac{h}{\sqrt{2}}$ padne do intervalu $(0, \frac{1}{2}a)$, alebo nie. Pre $h\sqrt{2} < a$ je teda maximálny objem ihlana $V_{\max} = \frac{1}{3}ah^2$.

Pre $a \leqq h\sqrt{2}$ je kvadratická funkcia U v intervale $(0, \frac{1}{2}h^2)$ rastúca, a preto objem ihlana v tomto prípade nemá maximum, ale neohraničene sa blíži k hodnote $V_{\max} = a^2\dfrac{\sqrt{4h^2 - a^2}}{6}$ (pre $x = \frac{1}{2}a$ dostaneme štvorcovú podstavu, tu predpokladáme, že podľa bežne užívanej definície štvorec nie je kosoštvorec).

B – S – 1

Sčítaním dvojnásobku prvej rovnice s druhou odstránime parameter a a dostávame rovnicu

$$3x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0$$

pre spoločný koreň x . Iba korene tejto rovnice môžu byť spoločnými koreňmi zadaných rovníc. Túto rovnicu môžeme riešiť aj ako reciprokú, aj znižovaním rádu. Má totiž racionálne korene $x = 3, x = \frac{1}{3}$. Riešme ju ako reciprokú:

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0,$$

$$\text{po substitúcii} \qquad x + \frac{1}{x} = s,$$

$$\text{dostávame} \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = s^2 - 2,$$

$$3s^2 - 7s - 10 = 0.$$

Posledná rovnica má 2 korene. Pre $s_1 = -1$ nedostávame žiadne reálne riešenie x , koreň $s_2 = \frac{10}{3}$ vedie k riešeniam:

$$x_1 = 3, \quad \text{pre} \quad a = -13,$$
$$x_2 = \frac{1}{3}, \quad \text{pre} \quad a = \frac{91}{81}.$$

Úloha má dve riešenia $a = 13, a = \frac{91}{81}$.

B – S – 2

Riešenie rozdelíme na dve časti, pre nezáporné celé a záporné celé x . Čísla 19 a 94 dávajú po delení tromi zvyšok 1 . Sú preto tvaru $3k+1$. Vieme, že $3|(3k+1)-1$ ($a|b$ označuje a delí b).

$$(3k+1)^x - 1 = (3k+1-1)\left((3k+1)^{x-1} + (3k+1)^{x-2} + \ldots + 1\right).$$

Preto $3|(3k+1)^x - 1$, teda $3|19^x - 1$ aj $3|94^x - 1$. Čísla 19^x a 94^x dávajú preto po delení tromi zvyšok 1 , a ich súčet zvyšok 2 . Lenže druhé mocniny celých čísel tvaru $3k$ majú po delení tromi zvyšok 0 a druhé mocniny celých čísel tvaru $3k \pm 1$ majú zvyšok 1 , lebo

$$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1.$$

Avšak 1994-tá mocnina je aj druhou mocninou, a preto, ako sme ukázali, má po delení len zvyšky $0, 1$. Preto rovnica nemá riešenie pre nezáporné celé čísla x . V záporných celých číslach rovnica nemá riešenie, lebo ľavá strana je menšia ako 1 a väčšia ako 0 , kým pravá je väčšia alebo rovná 1 .

B – S – 3

Ľahko vypočítame $|CD| = 2,4$, $|AD| = 1,8$, $|BD| = 3,2$. Označme P_1, P_2 päty kolmíc vedených z bodov O_1, O_2 na úsečku AB . Z Pytagorovej vety dostávame:

$$|O_1O_2| = \sqrt{(|O_2P_2| - |O_1P_1|)^2 + |P_1P_2|^2} = \sqrt{(\varrho_2 - \varrho_1)^2 + (\varrho_1 + \varrho_2)^2} =$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2},$$

kde ϱ_1, ϱ_2 sú polomery príslušných vpísaných kružníc. Vieme, že polomer vpísanej kružnice trojuholníka sa rovná dvojnásobku podielu jeho obsahu a obvodu ($\varrho = 2\frac{S}{o}$). Preto

$$\varrho_1 = \frac{1,8 \cdot 2,4}{1,8 + 2,4 + 3} = 0{,}6,$$
$$\varrho_2 = \frac{3,2 \cdot 2,4}{3,2 + 2,4 + 4} = 0{,}8.$$

Po dosadení $|O_1O_2| = \sqrt{2}$.

B – II – 1

Ak je u koreň niektorej z dvoch zadaných rovníc, potom $u \neq 0$ a $\dfrac{1}{u}$ je koreň tej istej rovnice. Preto $u = \dfrac{1}{u}$, takže $u = \pm 1$. Nech teda číslo 1, resp. -1 je koreňom prvej, resp. druhej rovnice (inak vymeníme navzájom čísla a, b). Zo sústavy rovníc

$$1 + a + b + a + 1 = 0 \quad \text{a} \quad 1 - b + a - b + 1 = 0$$

plynie $a = -\frac{6}{5}$ a $b = \frac{2}{5}$. Skúmané rovnice sú potom

$$(x-1)^2\Big(x^2 + \frac{4}{5}x + 1\Big) = 0 \ \text{ a } \ (x+1)^2\Big(x^2 - \frac{8}{5}x + 1\Big) = 0,$$

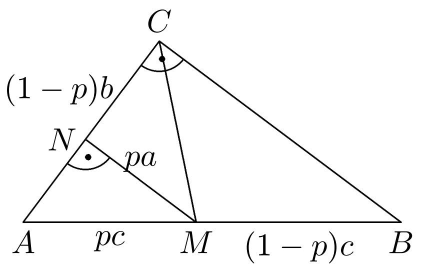
t.j. majú jediné reálne korene, lebo diskriminanty oboch trojčlenov $x^2 + \frac{4}{5}x + 1$ a $x^2 - \frac{8}{5}x + 1$ sú záporné. Hľadané dvojice (a, b) sú $(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ a $(\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$.

B – II – 2

Zrejme $m = 1$ je riešením a ukážeme, že $m = 1$ je jediné prirodzené číslo, pre ktoré tvrdenie platí. Naozaj, ak $998^m - 1$ delí $1994^m = 2^m \cdot 997^m$, tak $998^m - 1$ delí aj 997^m, čo je možné len pre $m = 1$, pretože inak je $998^m - 1$ väčšie ako 997^m.

B – II – 3

Nech $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a $|AM| = pc$, kde $0 < p < 1$ (pozri obrázok 18).



Obr. 18

Trojuholníky CAM a BCM majú obsahy v pomere $p : (1-p)$, t.j. sú rovné $\frac{1}{2}pab$, resp. $\frac{1}{2}(1-p)ab$, takže rovnosť polomerov príslušných vpísaných kružníc možno zapísať takto:

$$\frac{pab}{b + pc + x} = \frac{(1-p)ab}{a + (1-p)c + x},$$

kde sme označili $x = |CM|$. Odtiaľ po úprave plynie

$$pa - (1-p)b = (1-2p)x. \tag{1}$$

Na druhej strane podľa Pytagorovej vety pre trojuholník CMN platí

$$x^2 = p^2a^2 + (1-p)^2b^2.$$

Preto z (1) plynie umocnením na druhú

$$\big(pa-(1-p)b\big)^2=(1-2p)^2\big(p^2a^2+(1-p)^2b^2\big),$$

odkiaľ po roznásobení a úprave dostaneme

$$2p(1-p)\big[p^2a^2+(1-p)^2b^2\big]=p(1-p)ab.$$

Pretože $p(1-p)\neq 0$ a výraz v hranatej zátvorke je x^2, dostávame rovnosť $x^2=\frac{1}{2}ab$, ktorá znamená, že štvorec so stranou x má rovnaký obsah ako trojuholník ABC.

Poznámka. Hodnotu p nie je nutné určovať. Je to koreň kvadratickej rovnice

$$p^2a^2+(1-p)^2b^2=\frac{ab}{2},$$

ktorá má vždy dva korene. Vybrať ten „pravý“ je možné na základe diskusie o znamienkach oboch strán rovnosti (1).

B – II – 4

Označme vrcholy danej kocky obvyklým spôsobom A, B, C, D, E, F, G, H. Ak je vrchol A ofarbený jednou z troch farieb a niektorý z vrcholov C, F, H má tú istú farbu, sme hotoví, lebo $|AC|=|AF|=|AH|=a\sqrt{2}>1{,}41a>\frac{7}{5}a$. V opačnom prípade musia byť uvedené tri vrcholy rovnostranného trojuholnika CFH ofarbené najviac dvoma rôznymi farbami, takže aspoň dva z bodov C, F, H majú tú istú farbu. Ich vzdialenosť je väčšia ako $\frac{7}{5}a$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Kategória A

A – I – 1

Odvodíme najprv všeobecný vzorec pre počet $P_k(n)$ všetkých k-násobných deliteľov čísla n s rozkladom $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_N^{a_N}$, kde p_i sú navzájom rôzne prvočísla a exponenty a_i sú prirodzené čísla. Platí $m^k\mid n$, práve keď m je tvaru $p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_N^{b_N}$, kde celé b_i spĺňajú $0\leqq b_i\leqq\dfrac{a_i}{k}$ pre každé i. Preto je takých čísel m práve $\prod\limits_{i=1}^{N}\Big(1+\Big[\dfrac{a_i}{k}\Big]\Big)$. Hodnotu $P_k(n)$ určíme, keď od počtu čísel m s vlastnosťou $m^k\mid n$ odčítame počet tých z nich, pre ktoré dokonca platí $m^{k+1}\mid n$, takže

$$P_k(n)=\prod_{i=1}^{N}\Big(1+\Big[\frac{a_i}{k}\Big]\Big)-\prod_{i=1}^{N}\Big(1+\Big[\frac{a_i}{k+1}\Big]\Big). \tag{1}$$

Ľahko uvážime, že prvočíslo p má v rozklade čísla $n!$ exponent rovný

$$\Big[\frac{n}{p}\Big]+\Big[\frac{n}{p^2}\Big]+\Big[\frac{n}{p^3}\Big]+\Big[\frac{n}{p^4}\Big]+\dots \tag{2}$$

Ľahko uvážime, že prvočíslo p má v rozklade čísla $n!$ exponent rovný

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \left[\frac{n}{p^4}\right] + \dots \tag{2}$$

(len konečný počet sčítancov je nenulových). Takto môžeme stanoviť prvočíselný rozklad $100! = 2^{97}\,3^{48}\,5^{24}\,7^{16}\,11^{9}\,13^{7}\,17^{5}\dots$, kde bodky vyznačujú ďalšie prvočísla, ktorých exponenty sú menšie ako 7, a teda neovplyvnia hodnotu

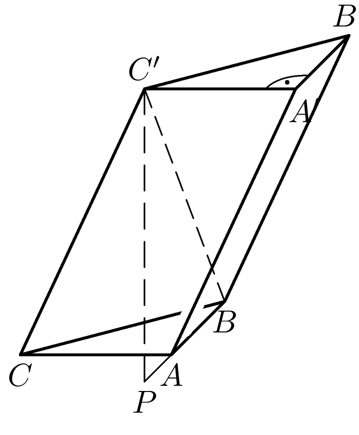
$$\begin{aligned}P_7(100!) = {}&\left(1+\left[\frac{97}{7}\right]\right)\left(1+\left[\frac{48}{7}\right]\right)\left(1+\left[\frac{24}{7}\right]\right)\left(1+\left[\frac{16}{7}\right]\right)\left(1+\left[\frac{9}{7}\right]\right)\left(1+\left[\frac{7}{7}\right]\right) - \\ &- \left(1+\left[\frac{97}{8}\right]\right)\left(1+\left[\frac{48}{8}\right]\right)\left(1+\left[\frac{24}{8}\right]\right)\left(1+\left[\frac{16}{8}\right]\right)\left(1+\left[\frac{9}{8}\right]\right) = \\ &= 14\cdot 7\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 - 13\cdot 7\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 4\,704 - 2\,184 = 2\,520.\end{aligned}$$

A - I - 2

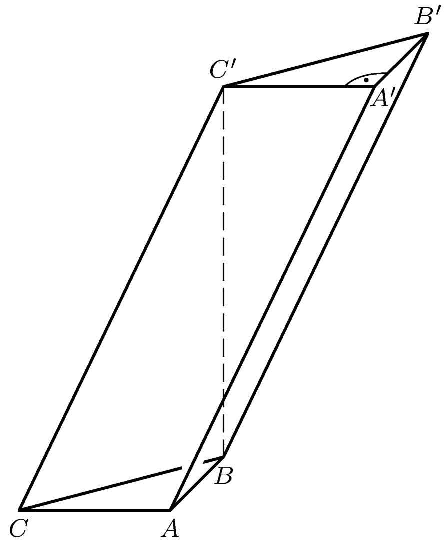
Objem nášho hranola je $V = \frac{1}{2}a^2 v$, kde v je neznáma vzdialenosť jeho podstáv. Obidve priamky BC' a AB, a teda aj rovina ABC' sú kolmé na priamku AC. Ak je P kolmý priemet bodu C' na priamku AB, potom obidve priamky AB a AC, a teda aj rovina ABC, sú kolmé na priamku $C'P$. Hľadaná vzdialenosť v je preto rovná $|C'P|$ a oba uhly CPC', APC' sú pravé. Naviac $|\angle PCC'| = 60^o$, takže $v = |CP|\sqrt{3}$. Označme x súradnicu bodu P na priamke AB v sústave, v ktorej $A = [0]$ a $B = [-a]$ (t.j. $x = \pm|AP|$, kde znamienko $-$, resp. $+$ vezmeme podľa toho, či P padne na polpriamku AB, či na polpriamku k nej opačnú.) Potom z $\triangle ACP$ plynie $|CP|^2 = a^2 + x^2$, takže $v^2 = 3(a^2 + x^2)$. Pretože $|BC'| = a\sqrt{6}$, má Pytagorova veta pre $\triangle BPC'$ tvar $6a^2 = (a+x)^2 + 3(a^2 + x^2)$. Táto rovnica má dva korene $x_1 = \frac{1}{2}a$, $x_2 = -a$. Podmienky úlohy preto spĺňajú dva hranoly (obr. 19, 20) s výškami

$$v_1 = \sqrt{3\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a\sqrt{15}}{2}, \quad \text{resp.} \quad v_2 = \sqrt{3(a^2 + a^2)} = a\sqrt{6}.$$

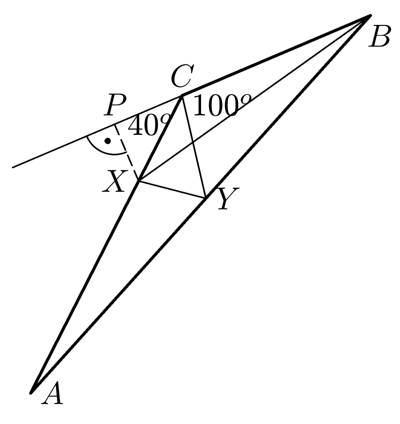
Ich objemy sú $V_1 = \frac{1}{4}a^3\sqrt{15}$, resp. $V_2 = \frac{1}{2}a^3\sqrt{6}$.



Obr. 19



Obr. 20



Obr. 21

A - I - 3

Nech P označuje kolmý priemet bodu X na priamku BC (obr. 21). Pretože platí $|\measuredangle XCY| = 40^o = |\measuredangle XCP|$, leží bod X nielen na osi uhla ABC, ale tiež na osi uhla YCP. Preto má bod X rovnakú vzdialenosť od troch priamok AB, BC a CY, takže leží aj na osi uhla AYC, t.j. $|\measuredangle AYX| = \frac{1}{2}|\measuredangle AYC|$. Ak označíme $\beta = |\measuredangle ABC|$, potom $|\measuredangle CYB| = 80^o - \beta$, $|\measuredangle AYC| = 100^o + \beta$ a $|\measuredangle AYX| = 50^o + \frac{\beta}{2}$, teda $|\measuredangle XYB| = 130^o - \frac{\beta}{2}$. Z $\triangle XYB$ konečne plynie, že $|\measuredangle YXB| = 180^o - \left(130^o - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = 50^o$.

A - I - 4

Umocnením na tretiu dostaneme ekvivalentnú rovnosť

$$n = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2\sqrt[3]{4}. \tag{1}$$

Zaoberajme sa najprv prípadom $n = 4$. Ak je $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$, potom z (1) plynie

$$4 = (p^3 + 2q^3) + 3p^2q\sqrt[3]{2} + 3pq^2(p + q\sqrt[3]{2}), \tag{2}$$

alebo $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = \sqrt[3]{2}(3p^2q + 3pq^3)$. Pretože $\sqrt[3]{2}$ je iracionálne číslo, je posledná rovnosť možná, len keď $4 - p^3 - 2q^3 - 3p^2q^2 = 0$ a $3pq(p + q^2) = 0$. Z druhej rovnice plynie $p = 0$, $q = 0$ alebo $p = -q^2$, dosadením do prvej potom po rade $q^3 = 2$, $p^3 = 4$, resp. $q^6 + q^3 - 2 = 0$. Pretože čísla p a q sú racionálne, je z poslednej trojice splniteľná len tretia podmienka, ktorá znamená, že $q^3 = -2$, alebo $q^3 = 1$. Dostávame tak jedinú dvojicu $(p, q) = (-1, 1)$, pre ktorú síce platí (2), nie však $\sqrt[3]{4} = p + q\sqrt[3]{2}$. Preto poslednú rovnosť nesplĺňajú žiadne racionálne p a q.

Vo všeobecnom prípade ukážeme, že ak platí (1) pre niektoré racionálne n, p a q, potom koeficient $3pq^2$ pri člene $\sqrt[3]{4}$ musí byť rovný nule. Inak by totiž bolo možné z (1) vyjadriť

$$\sqrt[3]{4} = \frac{n - p^3 - 2q^3}{3pq^2} - \frac{p}{q} \cdot \sqrt[3]{2},$$

čo by bol spor s tým, že číslo 4 nie je riešením. Preto platí $3pq^2 = 0$, t.j. $p = 0$ alebo $q = 0$. Potom však $n = p^3$ alebo $n = 2q^3$. Ak je naviac číslo n celé, musia byť v posledných dvoch rovnostiach aj čísla p, q celé. Odpoveď: $n = k^3$ alebo $n = 2k^3$, kde $k > 1$ je celé číslo.

A - I - 5

Označme rovnosť zo zadania ako (1). Ak dosadíme do (1) $a = b = 1$, dostaneme nutnú podmienku pre číslo p: $p \geqq 2 - \sqrt{2}$ (> 0). Ukážme, že pre $p = 2 - \sqrt{2}$ nerovnosť (1) platí. Pre $p > 0$ možno nerovnosť $a + b \leqq p \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 + b^2}$ ekvivalentne umocniť na druhú, po úprave dostaneme $(2 - p^2)ab \leqq 2p\sqrt{ab(a^2 + b^2)}$. Ak sem dosadíme $p = 2 - \sqrt{2}$, dostaneme (po delení dvomi) nerovnosť $2\big(\sqrt{2} - 1\big)ab \leqq \big(2 - \sqrt{2}\big)\sqrt{ab(a^2 + b^2)}$. Pretože $2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}\big(\sqrt{2} - 1\big)$, je možné poslednú nerovnosť po delení kladným výrazom $\big(\sqrt{2} - 1\big)\sqrt{2ab}$ zjednodušiť na $\sqrt{2ab} \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$. Táto nerovnosť platí pre ľubovoľné kladné a, b, lebo je ekvivalentná s $2ab \leqq a^2 + b^2$, alebo $0 \leqq (a - b)^2$. Hľadané najmenšie p je teda rovné $2 - \sqrt{2}$.

A - I - 6

Ciferný súčet $S(n)$ každého čísla n dáva pri delení deviatimi ten istý zvyšok ako samotné číslo n. Pretože číslo n^2 je tvaru $9k$ alebo $3k + 1$ (podľa toho, či $3 \mid n$, alebo nie), leží každé číslo $S(n^2)$ v množine $\{9, 18, 27, \dots\} \cup \{1, 4, 7, 10, \dots\}$. Teraz je potrebné zistiť, pre ktoré k majú rovnice $S(n^2) = 9k$, resp. $S(n^2) = 3k + 1$ aspoň jedno riešenie n. Ukážeme, že je tomu tak pre každé k. Najprv $S(1^2) = 1$. Ďalej pozorujme príklady

$$3^2 = 9,\ 33^2 = 1089,\ 333^2 = 110889,\ 3333^2 = 11108889,\ \dots,$$
$$2^2 = 4,\ 32^2 = 1024,\ 332^2 = 110224,\ 3332^2 = 11102224,\ \dots$$

Označme e_k číslo zapísané k jednotkami a vyslovme hypotézu, že $S(n^2) = 9k$ pre $n = 3e_k$ a $S(n^2) = 3k + 1$ pre $n = 3e_k - 1$. K jej dôkazu stačí overiť rovnosti

$$\begin{aligned} (3e_k)^2 &= \underbrace{11\dots1}_{k-1}0\underbrace{88\dots8}_{k-1}9 = 10^{k+1}e_{k-1} + 80e_{k-1} + 9, \\ (3e_k - 1)^2 &= \underbrace{11\dots1}_{k-1}0\underbrace{22\dots2}_{k-1}4 = 10^{k+1}e_{k-1} + 20e_{k-1} + 4. \end{aligned} \tag{1}$$

Aj keď rovnosti (1) je možné overiť dosadením formúl $e_m = \frac{1}{9}(10^m - 1)$ pre $m = k$ a $m = k - 1$, je možný aj iný postup: Pretože $9e_k = 10^k - 1$, platí $9e_k^2 = (10^k - 1)e_k$, a teda

$$\begin{aligned} (3e_k)^2 &= 10^k e_k - e_k, \\ (3e_k - 1)^2 &= 9e_k^2 - 6e_k + 1 = 10^k e_k - 7e_k + 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Dekadický zápis pravých strán (2) už možno ľahko zistiť použitím pravidiel pre písomné sčítanie a odčítanie — preveďte sami.

A - S - 1

Každý deliteľ čísla 2^n je opäť mocninou tvaru 2^x a tá je k-násobným deliteľom, práve keď $kx \leqq n < (k+1)x$, alebo $\frac{n}{k+1} < x \leqq \frac{n}{k}$. Preto je počet k-násobných deliteľov čísla 2^n rovný $\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n}{k+1}\right]$. Príkladom riešenia rovnice

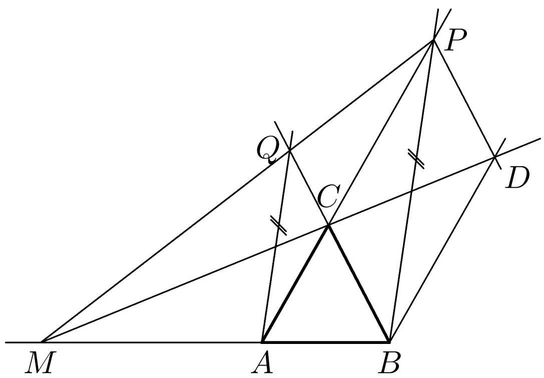
$$\left[\frac{n}{1\,994}\right] - \left[\frac{n}{1\,995}\right] = 1\,993$$

je hodnota $n = 1\,993 \cdot 1\,994 \cdot 1\,995$. Pritom je zrejmé, že pre ľubovoľné celé nezáporné $k < 1\,994$ bude číslo $n = 1\,993 \cdot 1\,994 \cdot 1\,995 + k$ vyhovovať podmienke úlohy.

A - S - 2

Priamka p zrejme musí pretínať polpriamky opačné k CA, CB (inak nemôžeme dostať trojuholník PQC s rovnakým obsahom ako trojuholník ABC).

Kľúčovým momentom je pozorovanie, že musí byť (a stačí) $QA \parallel PB$ – trojuholníky ABC a PQC majú totiž rovnaký obsah, práve keď to isté platí o trojuholníkoch ABP a BPQ (obr. 22), t.j. keď je vzdialenosť bodov Q a A od priamky BP rovnaká.



Obr. 22

Odtiaľ už plynie konštrukcia. Pretože priamka BP je obrazom priamky AQ v rovnoľahlosti so stredom M a koeficientom $\frac{|MB|}{|MA|}$ a bod Q leží na priamke BC, leží bod P na obraze priamky BC v tejto rovnoľahlosti. Vlastnú konštrukciu môžeme previesť napr. tak, že bodom B vedieme priamku q rovnobežnú s AC, jej priesečník s priamkou MC označíme D. Bodom D potom vedieme priamku r rovnobežnú s BC a jej priesečník s priamkou AC označíme P. Z podobnosti trojuholníkov MAC, MBD plynie $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MC|}{|MD|}$ a z podobnosti trojuholníkov MCQ, MDP plynie $\frac{|MC|}{|MD|} = \frac{|MQ|}{|MP|}$, odkiaľ už porovnaním vyplýva $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MQ|}{|MP|}$, a teda $AQ \parallel PB$. Úloha má vždy jediné riešenie.

A - S - 3

Tvrdenie úlohy dokážeme indukciou podľa počtu vyznačených uhlopriečok. Ak nie je vyznačená žiadna, potom vrcholy farbíme 1–2–1–2–. . . –1–2 pre n párne a 1–2–1–2–. . . –1–2–3 pre n nepárne. Pokiaľ je nakreslená aspoň jedna uhlopriečka, vyberieme ľubovoľnú z nich a podľa nej rozdelíme daný n-uholník na dva menšie mnohouholníky, ktoré majú spolu vyznačenú o jednu uhlopriečku menej ako pôvodný mnohouholník. Ich vrcholy ofarbíme podľa indukčného predpokladu. Podstatné je, že koncové vrcholy deliacej uhlopriečky dostanú v každom z oboch ofarbení rôzne farby, takže po prípadnej permutácii farieb možno tieto ofarbenia zjednotiť do ofarbenia celého n-uholníka.

Iné riešenie. Tvrdenie stačí dokázať pre prípad, keď nakreslené uhlopriečky delia vnútro n -uholníka na trojuholníky (taký n-uholník sa nazýva triangulovaný, každý systém nepretínajúcich sa uhlopriečok možno doplniť na trianguláciu). Potom dokazujeme opäť indukciou. Vyberieme vrchol, z ktorého nevychádza žiadna uhlopriečka (taký musí existovať, inak by sa niektoré uhlopriečky pretínali). Po odobratí tohto vrcholu dostávame $(n-1)$-uholník, ktorého vrcholy je podľa indukčného predpokladu možné ofarbiť tromi farbami. Odobraný vrchol má len dvoch susedov, takže vždy pre neho ostáva aspoň jedna voľná farba, ktorou ho ofarbíme.

A - II - 1

Podľa vzorca odvodeného v riešení úlohy A – I – 1 budeme hľadať najmenšie číslo x s prvočíselným rozkladom

$$x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_N^{a_N},$$

ktoré spĺňa podmienku

$$\prod_{k=1}^{N}\left(1+\left[\frac{a_k}{2}\right]\right)-\prod_{k=1}^{N}\left(1+\left[\frac{a_k}{3}\right]\right)=5. \tag{1}$$

Iste môžeme predpokladať, že $a_k \geqq 2$ pre každé k; v prípade $a_k = 1$ by sme totiž mohli činiteľ $p_k^{a_k}$ v rozklade čísla x vynechať bez toho, aby sme narušili podmienku (1). Ďalej rozlíšime prípady $N = 1$, $N = 2$ a $N \geqq 3$.

V prípade $N = 1$ má (1) tvar (pre jednoduchosť píšeme a miesto a_1)

$$\left[\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{a}{3}\right]=5. \tag{2}$$

Ak je $a = 6r + s$, kde $r \geqq 0$ a $0 \leqq s \leqq 5$ sú celé čísla, potom

$$\left[\frac{a}{2}\right]-\left[\frac{a}{3}\right]=r+\left[\frac{s}{2}\right]-\left[\frac{s}{3}\right]\leqq r+1.$$

Preto z (2) plynie $r \geqq 4$, t.j. $a \geqq 24$. Teraz už rýchlo nájdeme najmenšie riešenie (2) $a = 26$. V prípade $N = 1$ je teda najmenšie x rovné 2^{26}.

V prípade $N = 2$ vypíšeme niekoľko najmenších čísel x a pri každom v zátvorke pripojíme počet jeho dvojnásobných deliteľov:

$$\begin{aligned}
&2^2 3^2\ (3),\ 2^2 3^3\ (2),\ 2^2 3^4\ (4),\ 2^2 3^5 > 2^3 3^4,\\
&2^3 3^2\ (2),\ 2^3 3^3\ (0),\ 2^3 3^4 > 2^6 3^2,\\
&2^4 3^2\ (4),\ 2^4 3^3\ (2),\ 2^4 3^4 > 2^3 3^4,\\
&2^5 3^2\ (4),\ 2^5 3^3 > 2^3 3^4,\\
&2^6 3^2 = 576\ (5).
\end{aligned}$$

Každé ďalšie x je aspoň $2^7 3^2$ alebo $2^3 3^4$, teda väčšie ako 576.

V prípade $N \geqq 3$ je každé x aspoň $2^2 3^2 5^2 = 900$, teda číslo väčšie ako 576.

Zhrnieme naše úvahy: pretože platí $2^{26} > 576$, je hľadané najmenšie x rovné 576. (Jeho dvojnásobnými deliteľmi sú práve čísla 3, 6, 8, 12 a 24.)

A - II - 2

Označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$. Pretože os uhla delí protiľahlú stranu v pomere veľkostí priľahlých strán, je

$$|AE| = \frac{bc}{a+b}, \quad |BE| = \frac{ac}{a+b},$$
$$|AD| = \frac{bc}{a+c}, \quad |CD| = \frac{ab}{a+c}$$

a rovnosť $|BE| = |CD|$ je ekvivalentná s rovnosťou

$$\frac{ab}{a+c} = \frac{ac}{a+b},$$

ktorú možno upraviť na tvar

$$a(a+b+c)(b-c) = 0.$$

Pretože $a(a+b+c) > 0$, je $|BE| = |CD|$, práve keď $b = c$, t.j. keď $\triangle ABC$ je rovnoramenný so základňou BC. Uhol pri vrchole B má teda jednoznačne určenú veľkosť 40^o.

A - II - 3

Označme M množinu všetkých červených bodov a $D = \{(x,i)\colon x \in M \wedge x \in p_i\}$ a počítajme prvky množiny D dvoma spôsobmi: každý bod z množiny M leží na troch priamkach, takže $|D| = 3|M|$, pre každú priamku p_i je v D práve a_i dvojíc, alebo $|D| = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Odtiaľ plynie

(i) $\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \pmod 3$,

(ii) $|M| = \frac{1}{3} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Pokiaľ by existovali 4 priamky podľa zadania a), bol by podľa (ii) celkový počet červených bodov rovný dvom a dve z priamok by prechádzali rovnakými dvoma bodmi, boli by teda totožné. To je v spore so zadaním a odpoveď v prípade a) je NIE.

Prípad zo zadania b) možno získať napr. stranami a ťažnicami trojuholníka, tiež stranami a uhlopriečkami štvorca. Odpoveď je v tomto prípade ÁNO.

Prípad zo zadania c) možno získať napr. stranami pravidelného šesťuholníka a uhlopriečkami pretínajúcimi jeho stred. Odpoveď je opäť ÁNO.

V prípade d) je odpoveď NIE, pretože súčet $\sum\limits_{i=1}^{9} a_i = 20$ nie je deliteľný tromi (pozri (i)).

A - II - 4

Postupne spočítajme

$$x_0^2 = 5 + 4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}, \quad x_0^3 = 19 + 15\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{4}.$$

Dosadením do rovnice (1) tak po úprave dostaneme podmienku

$$(19 + 5p + q + r) + (15 + 4p + q)\sqrt[3]{2} + (12 + 3p + q)\sqrt[3]{4} = 0,$$

ktorá je splnená, pokiaľ sú rovné nule všetky tri čísla $19 + 5p + q + r$, $15 + 4p + q$ a $12 + 3p + q$. (Podľa úlohy A – I – 4 domáceho kola je to nielen postačujúca, ale aj nutná podmienka.) Ľahkým výpočtom zistíme jedinú trojicu $(p, q, r) = (-3, -3, -1)$. Zostáva dokázať, že rovnica

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

má jediný reálny koreň. To možno urobiť viacerými spôsobmi (asi nie je príliš vhodné delenie koreňovým dvojčlenom $x - x_0$), napr. takto: pretože $3x^2 + 3x + 1 > 0$ pre každé reálne x, je každý koreň rovnice $x^3 = 3x^2 + 3x + 1 > 0$ kladný; zo zápisu $1 = \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ plynie, že tento koreň je najnajvýš jeden (pravá strana je totiž pre kladné x klesajúca).

Iné riešenie. Platí

$$x_0 = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1^3 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1},$$

takže $\dfrac{1}{x_0} = \sqrt[3]{2} - 1$. Preto je x_0 riešením rovnice

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = 2,$$

pričom je jasné, že táto rovnica má v obore reálnych čísel *jediný* koreň. Pre $x \neq 0$ je však táto rovnica ekvivalentná s $(1 + x)^3 = 2x^3$, čo je po roznásobení hľadaná rovnica.

A - III - 1

Označme $d(x) = f(x+1) - f(x)$. Podľa zadania úlohy je funkcia $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ nerastúca. Funkcia d je ale tiež nezáporná: Keby totiž pre niektoré k bolo $d(k) \leqq -1$, bola by f ostro klesajúca pre $x \geqq k$, a platilo by

$$f\bigl(k + f(k) + 1\bigr) = f(k) + \sum_{i=0}^{f(k)} d(k+i) \leqq$$
$$\leqq f(k) + d(k)\bigl(f(k) + 1\bigr) \leqq f(k) - \bigl(f(k) + 1\bigr) = -1 < 0.$$

Je teda $d(1) \geqq d(2) \geqq \ldots \geqq 0$ a existujú $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $x \geqq n_0$ je $d(x) = c$, alebo $f(x) = f(n_0) + c(x - n_0)$. Potom ale všetky body $[x, f(x)]$, $x \geqq n_0$, ležia na jednej priamke.

A - III - 2

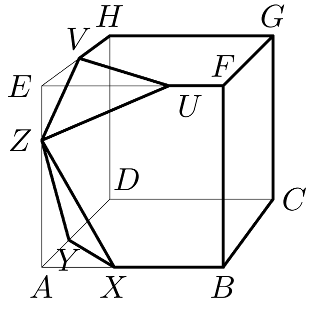
Označme vrcholy jednej podstavy kvádra A, B, C, D a vrcholy v druhej podstave E, F, G, H (tak, že AE, BF, CG, DH tvoria hrany). Prienik mnohostena M s každou hranou kvádra musí byť neprázdny. Vyberme teda na každej hrane kvádra jeden bod patriaci mnohostenu M a označme M' konvexný obal týchto 12 (nie nutne rôznych) bodov. Mnohosten M' vznikne z kvádra odrezaním ôsmich rohových štvorstenov, ktorých objemy odhadneme po zoskupení do dvojíc podľa hrán AE, BF, CG, DH.

Nech X, Y, Z, U, V sú po rade vrcholy mnohostena M' ležiace na hranách AB, AD, AE, EF, EH (obr. 23). Označme $x = |AX|$, $y = |AY|$, $z = |AZ|$, $u = |EU|$, $v = |EV|$, $w = |EZ|$ a $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |AE|$. Pritom $x, u \leqq a$, $y, v \leqq b$ a $z + w = c$. Potom dostávame

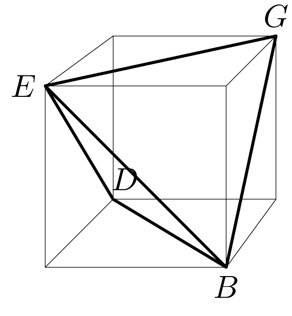
$$V(AXYZ) + V(EUVZ) = \frac{1}{6}(xyz + uvw) \leqq \frac{1}{6}(abz + abw) = \frac{1}{6}ab(z+w) = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}V.$$

Pretože M' vznikol odrezaním štyroch takýchto dvojíc rohových štvorstenov, je

$$V(M) \geqq V(M') \geqq V - \frac{4}{6}V = \frac{1}{3}V.$$



Obr. 23



Obr. 24

Hodnotu $\frac{1}{3}V$ nadobúda napr. objem štvorstena $BDEG$ (obr. 24). Teda $V_{\min} = \frac{1}{3}V$.

A - III - 3

Dokážeme nasledujúce tvrdenie: *nech v $2n$-uholníku je vyznačených n uhlopriečok tak, že z každého vrcholu vychádza práve jedna. Potom počet uhlopriečok párnej dĺžky je párny.*

DÔKAZ: Ofarbime vrcholy $2n$-uholníka striedavo bielou a čiernou, máme teda n bielych a n čiernych vrcholov, každá strana $2n$-uholníka spája jeden biely a jeden čierny vrchol. Uhlopriečky párnej dĺžky spájajú vrcholy rovnakej farby, uhlopriečky nepárnej dĺžky spájajú vrcholy rôznych farieb. Pritom bielo-bielych uhlopriečok je rovnako veľa ako čierno-čiernych (po odstránení vrcholov spojených bielo-čiernymi uhlopriečkami ostane rovnaký počet čiernych aj bielych bodov). Jednofarebných uhlopriečok je teda párny počet.

INÝ DÔKAZ Označme uhlopriečky u_1, u_2, …, u_n. Pretože nám ide o kombinatorické vlastnosti, môžeme predpokladať, že žiadne tri uhlopriečky neprechádzajú jedným bodom. Označme ešte a_i počet uhlopriečok, ktoré pretínajú uhlopriečku u_i, a počítajme celkový počet priesečníkov vyznačených uhlopriečok P. Z počítania dvoma spôsobmi plynie $2P = \sum_{i=1}^{n} a_i$ a nutne je počet uhlopriečok s nepárnym a_i párny. Pritom uhlopriečka u_i dĺžky d_i odrezáva $d_i - 1$ vrcholov, z ktorých vychádza spolu $d_i - 1$ uhlopriečok. Tie z nich, ktoré nepretínajú u_i, využijú každá práve dva z $d_i - 1$ vrcholov. Je teda $a_i \equiv d_i - 1 \pmod 2$, t.j. a_i je nepárne, práve keď d_i je párne.

V prípade b) sa požaduje 985 uhlopriečok dĺžky 6 a 4 uhlopriečky dĺžky 8, to je spolu 989 uhlopriečok párnej dĺžky, a preto je v tomto prípade odpoveď NIE.

Pre prípad a) je odpoveď ÁNO. Označme vrcholy 1 994-uholníka po rade X_1, X_2, …, X_{1994} a vyznačme uhlopriečky:

X_1X_3, X_2X_5, X_4X_6 (jedna dĺžky 3 a dve dĺžky 2);

X_7X_9, X_8X_{10}, $X_{11}X_{13}$, $X_{12}X_{14}$ (štyri uhlopriečky dĺžky 2);

$X_{9+6i}X_{12+6i}$, $X_{10+6i}X_{13+6i}$, $X_{11+6i}X_{14+6i}$, $i = 1, 2, \ldots, 330$ (990 uhlopriečok dĺžky 3).

A - III - 4

Nech $n = p$ je prvočíslo. Z čísel $a_p - 1$, $a_p - 2$, …, $a_p - p^2$ je práve p deliteľných číslom p. Z toho pre $p - 1$ čísel je p^1 najvyššia mocnina p, ktorá ich delí. Práve jedno z čísel $a_p - 1$, $a_p - 2$, …, $a_p - p^2$ je deliteľné p^2, však toto číslo (označme ho napr. $a_p - i$, $a_p - i > 0$) môže byť deliteľné aj vyššou mocninou p. Nech x je také prirodzené číslo, že $p^x | (a_p - i)$ a $p^{x+1} \nmid (a_p - i)$. Najvyššia mocnina p, ktorá delí súčin $(a_p - 1)(a_p - 2)\ldots(a_p - p^2)$, je teda p^{x+p-1}.

Pretože podľa zadania úlohy je číslo $\dfrac{(a_p - 1)(a_p - 2)\ldots(a_p - p^2)}{p^{p^2-1}}$ celé a kladné, je nutne $p^2 - 1 \leqq x + p - 1$, a teda $x \geqq p^2 - p$. Tiež platí $a_p > a_p - i \geqq p^x \geqq p^{p^2-p}$. Preto pre každé prvočíslo p je $\log_p a_p > p^2 - p$.

Pre konečnú množinu prvočísel P označme k jej najväčší prvok. Potom máme

$$\sum_{p\in P}\frac{1}{\log_p a_p}<\sum_{p\in P}\frac{1}{p^2-p}\leqq\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i^2-i}=\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{i(i-1)}=\sum_{i=2}^{k}\Big(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\Big)=1-\frac{1}{k}<1.$$

A - III - 5

Áno. Platí totiž toto tvrdenie: *Ak sa priečky AA_1, BB_1, CC_1 pretínajú v bode V a trojuholníky AC_1V, BA_1V, CB_1V majú rovnaký obsah, je V ťažiskom $\triangle ABC$.* Trojuholník, ktorého ťažnica splýva s výškou, je zrejme rovnoramenný. Trojuholník ABC, ktorého dve ťažnice sú zároveň výškami, je teda rovnostranný.

K dôkazu pomocného tvrdenia označme po rade x, y, z, v obsahy trojuholníkov VBA_1, VBC_1, VCA_1 a VAB_1 (obr. 25). Platí

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{x}{y}=\frac{2x+v}{x+y+z},$$

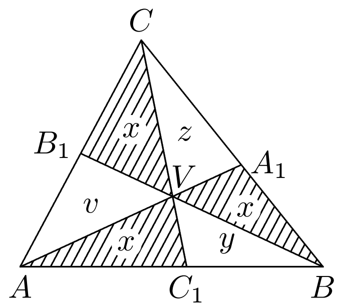
odkiaľ po úprave získame rovnosť

$$x(x+z)=y(x+v).$$

Podobne platí

$$x(x+v)=z(x+y) \quad \text{a} \quad x(x+y)=v(x+z).$$

Predpokladajme bez ujmy na všeobecnosti, že $y\geqq z\geqq v$. Pretože $x+v\leqq x+y$, z rovnosti $x(x+v)=z(x+y)$ plynie $x\geqq z$, a teda $x\geqq v$. Podobne z rovnosti $x(x+y)=v(x+z)$ plynie $x\leqq v$. Je teda $x=z=v$, a teda aj $x=y$. V tom prípade sú ale body A_1, B_1, C_1 stredmi strán trojuholníka ABC a V je jeho ťažiskom.



Obr. 25

A - III - 6

Každé číslo z intervalu $(0,1)$ je tvaru $\cos\alpha$, kde $\alpha\in(0,\frac12\pi)$. Preto z každej štvorice takých rôznych čísel môžeme vybrať $a=\cos\alpha$ a $b=\cos\beta$ tak, aby $0<|\alpha-\beta|<\frac13\cdot\frac12\pi=\frac16\pi$. Nerovnosť $\cos(\alpha-\beta)>\frac12\sqrt3$ môžeme prepísať do tvaru

$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}>\frac{\sqrt3}{2},$$

odkiaľ po umocnení na druhú a úprave dostaneme

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2b^2 - \frac{1}{4},$$

takže po delení číslom $2ab$ dostaneme dokazovanú nerovnosť.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Súvislý úsek v postupnosti celých čísel nazveme hladkým úsekom, ak sa ľubovoľná dvojica čísel, ktorá doň patrí, líši nanajvýš o 1.

Je dané celé číslo N ($N \geqq 1$) a postupnosť N celých čísel. Napíšte program, ktorý určí dĺžku maximálneho hladkého úseku v danej postupnosti čísel. Počet čísel N nie je vopred zhora ohraničený a môže byť veľmi veľký. Pri návrhu programu sa zamerajte na dosiahnutie čo najväčšej rýchlosti výpočtu.

Príklad: Pre $N = 10$ a postupnosť čísel 2 1 2 3 3 4 3 4 6 4 bude výsledkom číslo 5, lebo najdlhší hladký úsek 3 3 4 3 4 je tvorený piatimi číslami (ďalšie hladké úseky, napr. 2 1 2 alebo 2 3 3, sú kratšie).

P – I – 2

V kraji je N miest označených číslami od 1 do N. Medzi mestami je vybudovaná cestná sieť. Každá cesta spája vždy dvojicu miest a je známa jej dĺžka v kilometroch. Všetky cesty sú obojsmerné. Medzi niektorými dvojicami miest priama cesta nevedie, ale z každého mesta je možné dôjsť po cestách do ľubovoľného iného mesta (trebárs aj viacerými rôznymi spôsobmi). Všetky prípadné kríženia ciest mimo mesta sú mimoúrovňové (pomocou mostov) a neumožňujú vozidlám prejsť z jednej cesty na druhú.

Pri veľkej snehovej búrke boli všetky cesty zaviate snehom. Napíšte program, ktorý určí minimálnu celkovú dĺžku ciest, z ktorých je potrebné odhrnúť sneh, aby boli všetky mestá v kraji navzájom pospájané pojazdnými cestami.

Vstupom programu je počet miest N a ďalej zoznam všetkých ciest vedúcich medzi mestami. Každá cesta je určená trojicou čísel: čísla oboch miest spojených cestou a dĺžka cesty.

P – I – 3

Na kôpke je pripravený vopred známy počet N zápaliek. Dvaja hráči hrajú hru, pri ktorej z kôpky striedavo odoberajú zápalky. Hráč, ktorý je na rade, musí v jednom ťahu odobrať buď 3, alebo 5 zápaliek. Prehráva ten hráč, ktorý nemôže previesť svoj ťah, lebo na kôpke už ostali menej ako 3 zápalky.

a) Určte, pre aké hodnoty N má pri správnej hre zabezpečenú výhru ten hráč, ktorý je práve na ťahu. Ako musí v priebehu hry postupovať, aby túto výhru dosiahol? Svoje tvrdenie oddôvodnite.

b) Riešte rovnakú úlohu pre prípad, že hráč môže v jednom ťahu odobrať z kôpky buď 3 alebo 7 zápaliek.

P – I – 4

Konečný sekvenčný stroj je špeciálne výpočtové zariadenie. Má riadiacu jednotku, číta niekoľko vstupných sledov a vytvára jeden výstupný sled. Počet vstupných sledov k je pre každý sekvenčný stroj pevne daný. Sledom tu rozumieme konečnú postupnosť znakov z vopred danej konečnej množiny (tzv. abecedy). Každý vstupný sled je čítaný postupne znak po znaku zľava doprava, žiadny znak zo vstupného sledu nemôže byť prečítaný viackrát.

Riadiaca jednotka má konečnú pamäť; hovoríme, že sa môže nachádzať v jednom z konečne veľa stavov. Programom stroja je sada prechodových pravidiel, ktoré každému vnútornému stavu a k-tici vstupných znakov (z každého vstupného sledu jeden znak) priradia nový vnútorný stav a výstupný znak.

Výpočet stroja prebieha po krokoch. Na začiatku výpočtu je stroj v počiatočnom stave a z každého vstupného sledu bude čítať prvý znak. V jednom kroku stroj prečíta z každého vstupného sledu po jednom znaku, podľa vhodného prechodového pravidla (t.j. podľa svojho programu) zmení svoj vnútorný stav a zapíše nanajvýš jeden znak na výstup. Výpočet končí v okamihu, keď neexistuje prechodové pravidlo, podľa ktorého by výpočet mohol pokračovať.

Teraz popíšeme sekvenčný stroj ešte raz formálnejšie. Konečný sekvenčný stroj s k vstupmi je usporiadaná pätica (V, Y, Q, δ, q_0), kde V, Y, Q sú konečné množiny, $q_0 \in Q$ a δ je parciálne zobrazenie $Q \times (V \cup \varphi)^k \to Q \times (Y \cup \varphi)$. Slovo parciálne znamená, že δ nemusí byť definované pre všetky kombinácie stavov a vstupných symbolov (t.j. v takej situácii nie je určené, ako má výpočet pokračovať). Množina V sa nazýva vstupná abeceda, Y výstupná abeceda, Q je množina stavov, q_0 je počiatočný stav a δ sú prechodové pravidlá. Špeciálne hodnota φ pužitá v definícii prechodových pravidiel znamená, že v príslušnom vstupnom slede už nie je žiadny znak (celý vstupný sled už bol prečítaný), resp. že sa do výstupného sledu v tomto kroku nič nezapíše.

Výpočet stroja začína v stave q_0 a vstupné sledy sú nastavené na čítanie prvých znakov. V každom kroku výpočtu stroj prečíta po jednom znaku z tých vstupných sledov, ktoré ešte neboli prečítané do konca, vypíše jeden (prípadne žiadny) znak do vytváraného výstupného sledu a zmení svoj vnútorný stav. Označme q momentálny stav stroja a a_1, a_2, …, a_k práve čítané znaky vo vstupných sledoch (ak je niektorý vstupný sled už celý prečítaný, bude čítaným znakom φ). V prechodových pravidlách sa vyhľadá hodnota $\delta(q, a_1, a_2, \ldots, a_k) = (q', y)$. Pokiaľ je nájdená, stroj do výstupného sledu zapíše znak y a prejde do stavu q'. Pokiaľ odpovedajúce prechodové pravidlo neexistuje, výpočet stroja končí.

Pomocou sekvenčných strojov budeme spracovávať zápisy celých nezáporných čísel. Zápisom celého nezáporného čísla C v binárnej (dvojkovej) pozičnej sústave je sled znakov $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ z abecedy $\{0, 1\}$ taký, že platí:

1. buď $n = 0$ (t.j. zápis je tvorený jediným znakom), alebo $n > 0$ a pritom $a_n = 1$ (viacznakový zápis začína vždy znakom 1),
2. $$C = \sum_{j=0}^{n} a_j 2^j.$$

Jednotlivé znaky v zápise voláme binárne cifry. Takýto zápis čísla je strojom čítaný, alebo je vytváraný, postupne od najvyšších rádov (a_n) k najnižším (a_0). Zápisom *odzadu* rozumieme zápis cifier v opačnom poradí. Čísla zapísané odzadu teda stroj číta v poradí od najnižších rádov (a_0) k najvyšším (a_n).

Príklad: Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý vytlačí S, pokiaľ je dané číslo párne, a L, pokiaľ je nepárne. Predpokladajte, že vstupný sled obsahuje jedno číslo zapísané v binárnej sústave.

RIEŠENIE: Párnosť alebo nepárnosť vstupného čísla je daná tým, aká je jeho posledná cifra. Sekvenčný stroj bude preto veľmi jednoduchý, postačia len tri vnútorné stavy. Pomocou dvoch z nich bude rozlišovať, akú cifru naposledy prečítal, posledný tretí vnútorný stav bude slúžiť na ukončenie výpočtu (nebude preň definované žiadne prechodové pravidlo). Počas čítania čísla stroj nebude nič zapisovať na výstup. Až po prečítaní celého čísla podľa svojho momentálneho vnútorného stavu vypíše výsledok.

Stav stroja po prečítaní nuly označujeme N, stav po prečítaní jednotky nazveme J. Stav slúžiaci na ukončenie výpočtu nazveme K. Počiatočný stav bude N, pretože nula je tiež párne číslo. Program stroja je určený nasledujúcimi prechodovými pravidlami:

$$\begin{array}{ll} \delta(N,0) = (N,\varphi) & \delta(J,0) = (N,\varphi) \\ \delta(N,1) = (J,\varphi) & \delta(J,1) = (J,\varphi) \\ \delta(N,\varphi) = (K,S) & \delta(J,\varphi) = (K,L) \end{array}$$

Pre zvýšenie prehľadnosti zapisujeme prechodové pravidlá sekvenčného stroja zvyčajne do tabuľky. Práve popísanému sekvenčnému stroju zodpovedá táto tabuľka prechodových pravidiel:

stav	čítaný symbol		
	0	1	φ
N	N/φ	J/φ	K/S
J	N/φ	J/φ	K/L
K	–	–	–

Príklad: Zostavte konečný sekvenčný stroj s dvoma vstupmi, ktorý vytlačí znak P, ak je zápis prvého čísla dlhší, znak S, ak sú zápisy oboch čísel rovnako dlhé, a znak D, ak je zápis druhého čísla dlhší.

RIEŠENIE: Stroj bude čítať súbežne obe vstupné čísla. Nerozlišuje nuly a jednotky na vstupe, len sleduje, kedy ktoré číslo skončí. Podľa toho vytlačí výsledok a ukončí svoju prácu. Navrhovaný stroj má dva stavy, označujeme ich C a X. Počiatočným stavom stroja bude stav C. V tomto stave stroj ostane tak dlho, pokiaľ niektoré zo vstupných čísel neskončí. Potom prejde do stavu X, ktorý slúži k ukončeniu výpočtu.

stav	čítané symboly								
	00	01	10	11	0φ	1φ	$\varphi 0$	$\varphi 1$	$\varphi\varphi$
C	C/φ	C/φ	C/φ	C/φ	X/P	X/P	X/D	X/D	X/S
X	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Súťažná úloha:

a) Zostavte konečný sekvenčný stroj s dvoma vstupmi, ktorý porovná velkosť vstupujúcich čísel . Vytlačí S, pokiaľ sú rovnaké, P pokiaľ je prvé väčšie, a D, pokiaľ je väčšie druhé.

b) Riešte úlohu a) pre prípad, keď sú čísla zapísané odzadu.

c) Zostavte konečný sekvenčný stroj s dvoma vstupmi, ktorý vytlačí súčet vstupujúcich čísel.

d) Riešte úlohu c) pre prípad, keď sú čísla zapísané odzadu.

e) Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý určí, či je vstupné číslo deliteľné tromi. Výstupom bude znak A, pokiaľ je deliteľné tromi, v opačnom prípade bude výstupom znak N.

f) Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý spočíta celočíselný podiel pri delení vstupujúceho čísla tromi.

Vo všetkých úlohách predpokladajte, že čísla sú vo vstupných sledoch zapísané v binárnej pozičnej sústave. Pokiaľ dospejete k názoru, že niektorý zo strojov nemožno zostrojiť, svoje tvrdenie zdôvodnite.

P – II – 1

Súvislý úsek v postupnosti celých čísel nazveme K-hladkým úsekom, ak sa ľubovoľná dvojica čísel, ktorá do neho patrí, líši nanajvýš o K.

Sú dané dve kladné celé čísla N, K a postupnosť N celých čísel. Napíšte program, ktorý určí dĺžku maximálneho K-hladkého úseku v danej postupnosti čísel. Počet čísel N nie je vopred zhora ohraničený a môže byť veľmi vysoký, hodnota K je však nanajvýš 10. Pri návrhu programu sa zamerajte na dosiahnutie čo najväčšej rýchlosti výpočtu.

Príklad: Pre $N = 10$, $K = 2$ a postupnosť čísel 2 1 2 3 3 4 3 4 6 4 bude výsledkom číslo 6, lebo najdlhší 2-hladký úsek 2 3 3 4 3 4 je tvorený šiestimi číslami (ďalšie 2-hladké úseky, napr. 2 1 2 3 3 alebo 4 6 4, sú kratšie).

P – II – 2

V kraji je N miest označených číslami od 1 do N. Medzi mestami je vybudovaná cestná sieť. Každá cesta spája vždy dvojicu miest. Všetky cesty sú obojsmerné. Medzi niektorými dvojicami miest priama cesta nevedie, ale z každého mesta je možné dôjsť po cestách do ľubovoľného iného mesta (trebárs aj viac rôznymi spôsobmi). Všetky prípadné kríženia ciest mimo mesta sú mimoúrovňové (pomocou mostov) a neumožňujú vozidlám prejsť z jednej cesty na druhú.

Napíšte program, ktorý určí, či je možné rozdeliť mestá do dvoch skupín tak, aby každá dvojica miest patriacich do rovnakej skupiny bola spojená priamou cestou (tzn. vnútri každej skupiny vedie priama cesta medzi každými dvoma mestami). Nezáleží pritom na veľkosti jednotlivých skupín (jedna zo skupín môže byť prípadne aj prázdna), ale každé mesto musí byť do niektorej skupiny zaradené.

Vstupom programu je počet miest N a ďalej zoznam všetkých ciest vedúcich medzi mestami. Každá cesta je zadaná dvojicou čísel miest, medzi ktorými vedie.

P – II – 3

Na kôpke je pripravený vopred známy počet N zápaliek. Dvaja hráči hrajú hru, pri ktorej z kôpky striedavo odoberajú zápalky. Hráč, ktorý je na rade, musí v jednom ťahu odobrať taký počet zápaliek, ktorý je celočíselnou mocninou dvoch (t.j. možno ho vyjadriť v tvare 2^K pre vhodné celé nezáporné číslo K). Vyhráva ten hráč, ktorý vezme z kôpky poslednú zápalku.

a) Určte, pre aké hodnoty N má pri správnej hre zaistenú výhru ten hráč, ktorý je práve na ťahu. Ako musí v priebehu hry postupovať, aby naozaj vyhral? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

b) Riešte rovnakú úlohu pre prípad, že počet zápaliek odoberaných v jednom ťahu musí byť tvaru 3^K pre nejaké celé nezáporné číslo K.

P – II – 4

Pomocou sekvenčných strojov (def. pozri v úlohe P – I – 4) budeme v tejto úlohe spracovávať zápisy celých čísiel v tzv. doplnkovom kóde. Na zápis čísel budeme používať abecedu $0, 1$. Celé nezáporné čísla budeme zapisovať vo zvyčajnej dvojkovej sústave s jedinou drobnou úpravou – zápis čísla musí začínať číslicou 0. To možno ľahko dosiahnuť doplnením jednej alebo viacerých núl zľava k zápisu čísla. Každé celé nezáporné číslo má teda nekonečne veľa rôznych zápisov, ktoré sa líšia len počtom úvodných núl.

Zápisy záporných čísel získame nasledujúcim postupom. Zo zápisu absolútnej hodnoty čísla (v dvojkovej sústave s vedúcou nulou) najprv odčítame jednotku a potom vymeníme každú 0 za 1 a každú 1 za 0. Zápisy záporných čísel teda začínajú číslicou 1. Aj každé záporné číslo má viac možných zápisov, tie sa líšia len počtom úvodných jednotiek.

Príklad zápisu čísel v doplnkovom kóde:
$+3$ možno zapísať ako $011, 0011$ alebo tiež 000000000011,
-3 možno zapísať ako $101, 1101$ alebo tiež 111111111101.

Súťažná úloha:

a) Zostavte konečný sekvenčný stroj s dvoma vstupmi, ktorý vytlačí súčet vstupujúcich čísel.

b) Riešte úlohu a) pre prípad, keď sú čísla zapísané odzadu (definícu zápisu *odzadu* tiež nájdete v zadaní úlohy P – I – 4).

c) Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý určí, či je vstupné číslo deliteľné tromi. Výstupom bude znak A, pokiaľ je deliteľné tromi, v opačnom prípade bude výstupom znak N.

d) Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý spočíta celočíselný podiel pri delení vstupujúceho čísla tromi.

Vo všetkých úlohách predpokladajte, že čísla sú vo vstupných sledoch zapísané v doplnkovom kóde. Pokiaľ dospejete k názoru, že niektorý zo strojov nemožno zostrojiť, svoje tvrdenie zdôvodnite.

P – III – 1

Súvislý úsek v postupnosti celých čísel nazveme vybalancovaným úsekom, ak sa počet kladných a počet záporných čísel v úseku rovnajú.

Dané je celé číslo N, $(1 \leqq N \leqq 1000)$ a postupnosť N celých čísel. Napíšte program, ktorý určí dĺžku maximálneho vybalancovaného úseku v danej postupnosti čísel. Pri návrhu programu sa zamerajte na dosiahnutie čo najväčšej rýchlosti výpočtu.

Príklad: Pre $N = 10$ a postupnosť čísel 8 6 4 7 -5 -3 2 0 -1 9 bude výsledkom číslo 7, lebo najdlhší vybalancovaný úsek 4 7 -5 -3 2 0 -1 (prípadne iný rovnako dlhý vybalancovaný úsek 7 -5 -3 2 0 -1 9) je tvorený siedmimi číslami.

P – III – 2

V kraji je N miest označených číslami od 1 do N. Medzi mestami je vybudovaná cestná sieť. Každá cesta spája vždy dvojicu miest. Všetky cesty sú obojsmerné. Medzi niektorými dvojicami miest priama cesta nevedie, ale z každého mesta je možné dôjsť po cestách do ľubovoľného iného mesta (trebárs aj viacerými rôznymi spôsobmi). Všetky prípadné kríženia ciest mimo mesta sú mimoúrovňové (pomocou mostov) a neumožňujú vozidlám prejsť z jednej cesty na druhú.

Cestu nazveme nepostrádateľnou, pokiaľ by sa jej zničením úplne prerušilo cestné spojenie medzi niektorou dvojicou miest.

Napíšte program, ktorý vyhľadá a vypíše všetky nepostrádateľné cesty. Vstupom programu je počet miest N a ďalej zoznam všetkých ciest vedúcich medzi mestami. Každá cesta je zadaná dvojicou čísel miest, medzi ktorými vedie.

P – III – 3

Na kôpke je pripravený vopred známy počet N zápaliek, kde N je nepárne číslo. Dvaja hráči hrajú hru, pri ktorej z kôpky striedavo odoberajú zápalky. Hráč, ktorý je na rade, musí v jednom ťahu odobrať 1, 2 alebo 3 zápalky. Hra skončí, keď je celá kôpka zápaliek rozobraná. Vyhráva ten hráč, ktorý z kôpky celkovo odobral párny počet zápaliek.

a) Určte, pre aké hodnoty N má pri správnej hre zaistenú výhru ten hráč, ktorý je práve na ťahu. Ako musí v priebehu hry postupovať, aby výhru dosiahol? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

b) Riešte rovnakú úlohu pre prípad, že hráč smie v jednom ťahu odobrať z kôpky 1, 2, 3 alebo 4 zápalky.

P – III – 4

Pomocou sekvenčných strojov (pozri definíciu v úlohe P – I – 4) budeme spracovávať zápisy celých čísel. Zápisom celého čísla C v pozičnej sústave so základom (-2) je sled znakov $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ $(n \geqq 0)$ z abecedy $0, 1$ taký, že

$$C = \sum_{j=0}^{n} a_j (-2)^j.$$

Jednotlivým znakom zápisu hovoríme cifry. Takýto zápis čísla je strojom čítaný, alebo je vytváraný, postupne od najvyšších rádov (a_n) k najnižším (a_0). Zápisom odzadu rozumieme zápis cifier v opačnom poradí. Čísla zapísané odzadu teda stroj číta v poradí od najnižších rádov (a_0) k najvyšším (a_n).

Uvedomte si, že popísaným spôsobom možno zapísať ľubovoľné celé číslo, a to až na úvodné nuly práve jedným spôsobom.

Príklad zápisu čísel v pozičnej sústave so základom -2:
$+3$ možno zapísať ako 111, 0111 alebo tiež 0000000000111,
-3 možno zapísať ako 1101, 01101 alebo tiež 00000000001101.

Súťažná úloha:

a) Zostavte konečný sekvenčný stroj s dvomi vstupmi, ktorý porovná vstupujúce čísla podľa veľkosti. Vytlačí S, pokiaľ sú rovnaké, P pokiaľ je prvé väčšie a D, pokiaľ je väčšie druhé.
b) Riešte úlohu a) pre prípad, keď sú čísla zapísané odzadu.
c) Zostavte konečný sekvenčný stroj s dvomi vstupmi, ktorý vytlačí súčet vstupujúcich čísel.
d) Riešte úlohu c) pre prípad, keď sú čísla zapísané odzadu.
e) Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý určí, či je vstupné číslo deliteľné tromi. Výstupom bude znak A pokiaľ je deliteľné tromi, v opačnom prípade bude výstupom znak N.
f) Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý spočíta celočíselný podiel pri delení vstupujúceho čísla tromi.

Vo všetkých úlohách predpokladajte, že čísla sú vo vstupných sledoch zapísané v pozičnej sústave so základom (-2). Pokiaľ dospejete k názoru, že niektorý zo strojov nemožno zostrojiť, svoje tvrdenie zdôvodnite.

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Poznámka o tom, že nepoznáme žiadne predbežné ohraničenie hodnoty N, a že N môže byť veľké, zakazuje použiť v riešení úlohy pole, do ktorého by sme si uložili všetky čísla postupnosti. Také pole by tiež bolo úplne zbytočné, bude nám stačiť konštantný pamäťový priestor (nezávislý od N). Optimálny algoritmus riešenia má lineárnu časovú zložitosť. Lepšia byť ani nemôže, lebo každé z N daných čísel je treba prečítať a spracovať.

Postupne budeme čítať na vstupe čísla tvoriace zadanú postupnosť a budeme ich vyhodnocovať takým spôsobom, aby v nasledujúcich pomocných premenných boli stále aktuálne uložené uvedené údaje:

$CISLO$ – práve prečítané číslo
$PREDCHADZAJUCI$ – predchádzajúce číslo postupnosti
$INDEX$ – poradové číslo práve prečítaného čísla

$HLADKY$	– poradové číslo, kde začína práve sledovaný úsek
$KONSTANTNY$	– poradové číslo, kde začína úsek rovnakých čísel vedúci až k práve prečítanému číslu
H_1	– menšia z hodnôt tvoriacich práve sledovaný úsek
H_2	– väčšia z hodnôt tvoriacich práve sledovaný úsek (tento údaj môžeme ukladať pre prehľadnosť, ale nie je potrebný, lebo pokiaľ $HLADKY = KONSTANTNY$, nie je H_2 definované, inak $H_2 = H_1 + 1$)
MAX	– dĺžka maximálneho dosiaľ nájdeného hladkého úseku

Na začiatku výpočtu prečítame prvé číslo postupnosti a dosadíme do premenných vhodné počiatočné hodnoty. Po prečítaní každého čísla postupnosti sme schopní s využitím zaznamenaných údajov aktualizovať hodnoty všetkých uvedených premenných. Po spracovaní všetkých čísel bude výsledok uložený v premennej MAX.

P – I – 2

Úloha P – I – 2 je jednou z klasických úloh z teórie grafov. Cestná sieť predstavuje súvislý neorientovaný ohodnotený graf, v ktorom vrcholy grafu odpovedajú mestám, hrany grafu cestám a ohodnotením hrán sú dĺžky jednotlivých ciest. Úlohou potom je nájsť minimálnu kostru daného grafu.

Rôzne algoritmy riešenia tejto úlohy možno nájsť v každej základnej učebnici diskrétnej matematiky alebo teórie grafov. Môžeme použiť napríklad tzv. hladný algoritmus. Pred jeho uvedením si ešte pripomeňme, že ľubovoľnú kostru súvislého grafu získame vynechaním čo možno najväčšieho počtu hrán tak, aby graf ostal súvislým. Graf s N vrcholmi môže mať viac rôznych kostier, každá z nich obsahuje presne $N-1$ hrán. Z minimality počtu hrán plynie, že kostra neobsahuje žiadne cykly (tzn. medzi každou dvojicou vrcholov existuje jediná cesta). Minimálnou kostrou grafu nazývame takú kostru grafu, v ktorej je súčet ohodnotení hrán minimálny. Graf môže mať viac rôznych minimálnych kostier. V tejto úlohe hľadáme ľubovoľnú z nich.

Pri riešení úlohy postupujeme nasledovne. Všetky hrany daného grafu usporiadame podľa ich ohodnotenia vzostupne. Na poradí hrán rovnakej dĺžky nezáleží. Kostru potom vytvárame postupne tak, že berieme jednotlivé hrany od najkratšej k najdlhšej, a pre každú z nich skúmame, či ju môžeme zaradiť do vytváranej kostry, t.j. či by jej pridaním nevznikol v kostre cyklus. Pokiaľ cyklus nevznikne, hranu do kostry zaradíme, v opačnom prípade ju vynecháme. Celý výpočet ukončíme vo chvíli, keď do kostry zaradíme potrebných $N-1$ hrán.

K efektívnemu naprogramovaniu uvedeného algoritmu je potrebné zvoliť vhodnú dátovú reprezentáciu. Graf je zadaný zoznamom hrán a ich ohodnotením. Vzhľadom k tomu, že potrebujeme všetky hrany zoradiť, použijeme túto podobu aj pre vnútornú reprezentáciu grafu v programe. V rovnakom tvare, t.j. ako zoznam hrán, budeme vytvárať a ukladať (alebo priamo tlačiť) aj výslednú kostru.

Zostáva nám posledná a najťažšia úloha: Potrebujeme mať možnosť počas výpočtu ľahkým spôsobom testovať, ktorú hranu možno pridať do vytváranej kostry. Bolo by dosť pracné a pomalé prechádzať vždy celý zoznam hrán už zaradených do kostry a skúmať, či spoločne s práve spracovávanou hranou netvorí cyklus. Lepšie je vytvoriť si nejakú pomocnú dátovú štruktúru, v ktorej bude zaznamenané, ktoré vrcholy grafu sú už pospájané hranami zaradenými do kostry. Postupne vytváraná kostra je nesúvislým podgrafom pôvodného grafu, pričom každým zaradením ďalšej hrany do kostry sa o 1 zníži počet komponent súvislosti. Na začiatku výpočtu nie je v kostre ešte žiadna hrana a každý vrchol grafu je izolovaný (tvorí vlastnú komponentu súvislosti). Po zaradení všetkých $N-1$ hrán do kostry bude pospájaných všetkých N vrcholov do súvislého grafu bez cyklov.

Evidenciu priebežne vytváraných komponent súvislosti (t.j. skupín už pospájaných vrcholov) je možné programovo realizovať rôznymi spôsobmi. Jednoduchým, aj keď nie celkom najlepším riešením je použiť pomocné jednorozmerné pole veľkosti N indexované číslami vrcholov od 1 do N. V tomto poli bude pre každý vrchol uložené číslo komponenty, do ktorej momentálne prináleží. Pri spracovaní každej ďalšej hrany potom ľahko otestujeme, či jej krajné vrcholy sú už v tej istej komponente súvislosti, a pri jej pridaní evidenciu aktualizujeme.

P – I – 3

a) Najprv musíme preniknúť do priebehu uvedenej hry tým, že budeme sledovať situáciu pre malé počty zápaliek zostávajúce na kôpke:

zostáva 0	hráč na ťahu prehráva (nemôže brať)
zostáva 1	hráč na ťahu prehráva (nemôže brať)
zostáva 2	hráč na ťahu prehráva (nemôže brať)
zostáva 3	hráč na ťahu vyhráva (vezme 3)
zostáva 4	hráč na ťahu vyhráva (vezme 3)
zostáva 5	hráč na ťahu vyhráva (vezme 3 alebo 5)
zostáva 6	hráč na ťahu vyhráva (vezme 5)
zostáva 7	hráč na ťahu vyhráva (vezme 5)
zostáva 8	hráč na ťahu prehráva (odobratím 3 alebo 5 sa súper dostane do pozície s vyhrávajúcim ťahom)

Po vyšetrení ďalších pozícií zistíme, že vyhrávajúce a prehrávajúce pozície sa pravidielne opakujú (s periódou dĺžky 8). Na základe nášho rozboru môžeme vysloviť nasledujúcu hypotézu. Ak je N tvaru $8k$, $8k+1$ alebo $8k+2$, začínajúci hráč nemôže proti dobrému súperovi vyhrať. Pre ostatné hodnoty N má naopak začínajúci hráč isté víťazstvo, ak sa bude držať víťaznej stratégie. Pre N tvaru $8k+3$ alebo $8k+4$ musí brať 3 zápalky, pre N tvaru $8k+6$ alebo $8k+7$ musí brať 5 zápaliek, ak je N tvaru $8k+5$, môže hrať ľubovoľne. Správnosť tejto hypotézy je však treba ešte dokázať.

Ak je počiatočná hodnota N tvaru $8k+3$, $8k+4$, $8k+5$, $8k+6$ alebo $8k+7$, a ak zahráme svoj ťah podľa uvedenej stratégie, dostane sa náš súper vždy do situácie, že má brať z kôpky obsahujúcej $8k$, $8k+1$ alebo $8k+2$ zápaliek. Nech zahraje akokoľvek, po jeho ťahu ostane na kôpke opäť počet zápaliek tvaru $8k+3$, $8k+4$, $8k+5$, $8k+6$ alebo $8k+7$. Tak sa situácia opakuje pre stále sa zmenšujúce hodnoty k, až nakoniec bude k nulové a súper je na ťahu v pozícii s 0, 1 alebo 2 zápalkami, čo znamená jeho prehru.

Naopokon, pre počiatočný počet zápaliek N tvaru $8k$, $8k+1$ alebo $8k+2$ vedie akýkoľvek ťah začínajúceho hráča do pozície s $8\cdot(k-1)+3$, $8\cdot(k-1)+4$, $8\cdot(k-1)+5$, $8\cdot(k-1)+6$ alebo $8\cdot(k-1)+7$ zápalkami na kôpke, a ak sa potom bude náš súper držať uvedenej stratégie, má isté víťazstvo v hre.

b) Úlohu riešime analogicky ako úlohu a). Na základe rozboru situácií s malým počtom zápaliek zostávajúcich na kôpke dôjdeme k nasledujúcej hypotéze. Ak je na kôpke počet zápaliek tvaru $10k$, $10k+1$, $10k+2$ alebo $10k+6$, začínajúci hráč prehrá, pokiaľ bude jeho súper hrať dobre. Pre ostatné hodnoty N má naopak hráč na ťahu isté víťazstvo pri dodržaní tejto víťaznej stratégie: pre N tvaru $10k+3$, $10k+4$ a $10k+5$ musí vziať 3 zápalky, pre N tvaru $10k+7$, $10k+8$ a $10k+9$ berie 7 zápaliek. Hypotézu dokážeme rovnakou úvahou ako v riešení úlohy a).

P – I – 4

Vo všetkých úlohách predpokladajte, že čísla sú vo vstupných sledoch zapísané v binárnej pozičnej sústave. Pokiaľ dospejete k názoru, že niektorý zo strojov nemožno zostrojit, svoje tvrdenie zdôvodnite. Oproti bežným výpočtovým prostriedkom (bežné programovacie jazyky a pod.) sú výpočty prevádzané konečnými sekvenčnými strojmi obmedzené vo dvoch smeroch:

– sekvenčný stroj má len konečnú pamäť,

– všetky vstupné sledy sa musia čítať súbežne.

V zadaných úlohách sa musíme vyrovnať predovšetkým s prvým obmedzením. Popis pomocou stavov a prechodovej funkcie je len formálnym vyjadrením, ktoré vyššie uvedené obmedzenia presne definuje. Toto presné vymedzenie je potrebné najmä vtedy, ak dokazujeme, že stroj so zadanými vlastnosťami neexistuje.

Úlohy možno riešiť najprv neformálne s použitím niektorého programovacieho jazyka. Napríklad v prvom z riešených príkladov vystačíme s jednou premennou P, v ktorej si pamätáme posledný prečítaný znak. Riešenie v Pascale by mohlo vyzerať napr. takto:

```
var P: char;
begin
  while not eof do read(P);
  if P = '0' then write('S') else write('L');
end.
```

Premenná P bude nadobúdať len dve hodnoty — výpočtový stroj bude mať teda dva stavy. Označili sme ich N (P = '0') a J (P = '1'). Prepis programu do tvaru prechodových pravidiel je teraz už len rutinnou záležitosťou.

Niektoré úlohy, ktoré možno triviálne riešiť s predpokladom (potenciálne) neobmedzenej pamäti, sú konečným sekvenčným strojom neriešiteľné. Napriek tomu, že formálny dôkaz neexistencie vyžaduje zbehlosť, myšlienka býva jednoduchá. Je potrebné si všimnúť situácie počas výpočtu, keď z doterajšej práce stroja nestačí pre správné pokračovanie výpočtu len obmedzená informácia.

Príklad: Zostavte konečný sekvenčný stroj s jedným vstupom, ktorý zistí, či zápis vstupného čísla obsahuje rovnaký počet núl a jednotiek. V kladnom prípade odpovie A, v zápornom N.

Pozorovanie: Riešenie v Pascale pomocou jednej celočíselnej premennej je triviálne (na začiatku vynulovať, za každú jednotku pričítať 1, za nulu odčítať 1, na konci programu test na nulovosť). Uvedomme si však, že pre dostatočne dlhé vstupy táto premenná nadobúda ľubovoľne veľkých hodnôt, teda nielen konečne veľa. Naše pozorovanie ešte nie je zdôvodnením neexistencie riešiaceho stroja s konečnou pamäťou (možno sme boli len„nešikovní“, a pritom existuje iný, lepší algoritmus)!

Zdôvodnenie neexistencie: (sporom) Keby taký stroj existoval, budeme mu predkladať vstupy v tvare 111…1000…0 a pozorovať v akom stave bude po prečítaní jednotiek. V priebehu ďalšieho výpočtu potom stroj na základe tohto stavu a prečítaných núl zo vstupu vydá výsledok. Teraz si stačí uvedomiť, že zatiaľčo sledov jednotiek je potenciálne nekonečne mnoho (1, 11, 111, 1111, 11111, atď.), stavov je konečný počet. Po prečítaní jednotiek teda iste medzi niektorými dĺžkami jednotkových úsekov nedokáže rozlíšiť, potom ale nemôže dávať správné výsledky.

Riešenie úloh domáceho kola: a, b, d, e, f existujú, c neexistuje.

P – II – 1

Úloha je zovšeobecnením úlohy P – I – 1 z domáceho kola. Postup riešenia je analogický, potrebujeme len trochu zložitejšiu priebežnú evidenciu informácií o danej postupnosti čísel.

V zadaní úlohy je stanovené, že nepoznáme žiadne predbežné obmedzenie hodnoty N, a že N môže byť vysoké. Táto skutočnosť nám zakazuje použiť v riešení úlohy pole, do ktorého by sme si uložili všetky čísla postupnosti. Podobné pole by tiež bolo úplne zbytočné, na vyriešenie úlohy nám postačí pamäťový priestor úmerný hodnote K (nezávislý od N), t.j. vzhľadom k uvedenému obmedzeniu prípustných hodnôt K vlastne priestor konštantnej veľkosti. Optimálny algoritmus riešenia, ktorý tu uvedieme, má lineárnu časovú zložitosť. Lepšie riešenie nemôže existovať, lebo každé z daných N čísel je potrebné raz prečítať a spracovať.

Postup riešenia úlohy je nasledujúci. Postupne budeme čítať zo vstupu jednotlivé čísla tvoriace zadanú postupnosť a budeme ich vyhodnocovať takým spôsobom, aby vo vhodne zvolenej skupine pomocných premenných boli stále aktuálne uložené správne údaje charakterizujúce už prečítanú časť vstupnej postupnosti čísel. Dôležité je priebežne si udržiavať informácie o práve skúmanom K-hladkom úseku: kde začína, aké hodnoty čísel obsahuje a hlavne, na ktorom mieste v postupnosti sa poslednýkrát vyskytla každá z týchto hodnôt. Pre uloženie poslednej uvedenej informácie potrebujeme pole veľkosti $K + 1$, lebo každý K-hladký úsek môže obsahovať nanajvýš $K + 1$ rôznych hodnôt. Údaje z tohoto poľa sú dôležité preto, lebo K-hladké úseky sa môžu čiastočne prekrývať. Pri ukončení skúmaného úseku potom môžeme určiť, kde začína ďalší K-hladký úsek, bez toho aby bolo potrebné vracať sa v danej postupnosti čísel. Evidencia potrebných údajov môže byť nasledujúca:

$CISLO$	– práve prečítané číslo
$INDEX$	– poradové číslo práve prečítaného čísla
$HLADKY$	– poradové číslo, kde začína práve sledovaný K-hladký úsek
$MINHODNOTA$	– min. hodnota čísel tvoriacich práve sledovaný K-hladký úsek
$MAXHODNOTA$	– max. hodnota čísel tvoriacich práve sledovaný K-hladký úsek
$MAXUSEK$	– dĺžka maximálneho dosiaľ nájdeného K-hladkého úseku
$POSLEDNY$	– pole indexované od 0 po K, ktoré obsahuje poradové čísla posledných výskytov všetkých hodnôt obsiahnutých v práve sledovanom K-hladkom úseku:

$POSLEDNY[0]$

– posledný výskyt hodnoty $MINHODNOTA$

$POSLEDNY[MAXHODNOTA - MINHODNOTA]$

– posledný výskyt hodnoty $MAXHODNOTA$

$POSLEDNY[X - MINHODNOTA]$

– posledný výskyt hodnoty X.

Na začiatku výpočtu prečítame prvé číslo postupnosti a dosadíme do premenných vhodné počiatočné hodnoty odpovedajúce tomu, že zatiaľ poznáme prvý hladký úsek dĺžky 1 tvorený prvým číslom postupnosti. Po prečítaní každého ďalšieho čísla postupnosti sme schopní s využitím zaznamenaných údajov aktualizovať hodnoty všetkých tu uvedených premenných. Po spracovaní všetkých N čísel bude výsledok uložený v premennej $MaxUsek$. Spôsob spracovania každého čísla je už zrejmý z programu, kde sú uvedené vysvetľujúce komentáre.

```
program MaxKHladkyUsek;

const MaxK = 10;                                  {maximálna možná hodnota K}

var N:integer;                                    {počet čísel v postupnosti}
    K : 0..MaxK;                                  {stupeň„hladkosti“}
    Cislo:integer;                                {prečítané číslo}
    MinHodnota:integer;                           {minimálna hodnota čísel}
                                                  {v aktuálnom hladkom úseku}
    MaxHodnota:integer;                           {maximálna hodnota čísel}
                                                  {v aktuálnom hladkom úseku}
    NovaMedzHodnota:integer;                      {nová max. alebo min. hodnota}
                                                  {v aktuálnom hladkom úseku}
    Index:integer;                                {index práve prečítaného čísla}
    Hladky:integer;
                                   {index začiatku aktuálneho hladkého úseku}
    Posledny:array[0..MaxK] of integer;
                                {index posledného výskytu jednotlivých hodnôt}
                        {MinHodnota..MaxHodnota v aktuálnom hladkom úseku}
    Posun:integer;                                {posun hodnôt v hladkom úseku}
    MaxUsek:integer;                              {dĺžka max. K-hladkého úseku}
    I, J:integer;
begin
write('Pocet cisel v postupnosti N: ');
readln(N);
write('Stupen hladkosti K: ');
readln(K);
read(Cislo);                                      {prvé číslo danej postupnosti}
Index := 1; Hladky := 1; MaxUsek := 1;
MinHodnota := Cislo; MaxHodnota := Cislo;
Posledny[0] := 1;                                 {úsek tvorený len prvým číslom}
for J := 2 to N do
```

```
begin
read(Cislo);
Index := Index + 1;             {rozlíšime 6 možností, aké je ďalšie prečítané číslo}
                               {vzhľadom k práve skúmanému K-hladkému úseku:}
if (Cislo >= MinHodnota) and (Cislo <= MaxHodnota) then
                                        {nové číslo predĺži skúmaný hladký úsek,}
                                     {nezväčší sa ani rozsah hodnôt čísel v úseku}
  Posledny[Cislo − MinHodnota] := Index                    {zaznamenáme výskyt}
else if (Cislo > MaxHodnota) and (Cislo <= MinHodnota + K)then
                                        {nové číslo predĺži skúmaný hladký úsek,}
                                       {zväčší sa len rozsah hodnôt čísel v úseku,}
                                             {a to smerom k vyšším hodnotám}
  begin
  for I := MaxHodnota − MinHodnota + 1 to Cislo − MinHodnota − 1 do
    Posledny[I] := 0;
  Posledny[Cislo − MinHodnota] := Index;                   {zaznamenáme výskyt}
  MaxHodnota := Cislo                                     {zväčší sa MaxHodnota}
  end
else if (Cislo < MinHodnota) and (Cislo >= MaxHodnota − K) then
                                        {nové číslo predĺži skúmaný hladký úsek,}
                                       { zväčší sa len rozsah hodnôt čísel v úseku,}
                              { a to smerom k nižším hodnotám, je preto nutné}
                                        { posunúť údaje uložené v poli Posledny}
  begin
  for I := MaxHodnota − MinHodnota downto 0 do
    Posledny[I + MinHodnota − Cislo] := Posledny[I];
  for I := 1 to MinHodnota − Cislo − 1 do
    Posledny[I] := 0;
  Posledny[0] := Index;                                    {zaznamenáme výskyt}
  MinHodnota := Cislo                                     {zmenší sa MinHodnota}
  end
else if (Cislo > MaxHodnota + K) or (Cislo < MinHodnota − K) then
                                {nové číslo končí dosiaľ skúmaný K-hladký úsek}
                     {a začína nový úsek, tento nový úsek sa s predchádzajúcim}
                  {neprekrýva a bude teda zatiaľ tvorený týmto jediným číslom}
  begin
  if Index − Hladky > MaxUsek then                       {kontrola dĺžky úseku}
    MaxUsek := Index − Hladky;                          {nájdený dosiaľ najdlhší}
  Hladky := Index;
  MinHodnota := Cislo;
  MaxHodnota := Cislo;
  Posledny[0] := Index                                {úsek tvorený jedným číslom}
  end
else if Cislo > MaxHodnota then
    {iste platí: (Cislo > MinHodnota + K) and (Cislo <= MaxHodnota + K) }
                                {nové číslo končí dosiaľ skúmaný K-hladký úsek}
                     {a začína nový úsek, tento nový úsek sa s predchádzajúcim}
```

```
                                              {môže čiastočne prekrývať}
    begin
    if Index − Hladky > MaxUsek then                   {kontrola dĺžky úseku}
    MaxUsek := Index − Hladky;                      {nájdený dosiaľ najdlhší}
    NovaMedzHodnota := Cislo − K;                       {nová min. hodnota}
    for I := 0 to NovaMedzHodnota − 1 − MinHodnota do
      if Posledny[I] > Hladky then Hladky := Posledny[I];
    Hladky := Hladky + 1; {nový začiatok K-hladkého úseku}
    while  (NovaMedzHodnota < Cislo)
      and (Posledny[NovaMedzHodnota − MinHodnota] < Hladky) do
      NovaMedzHodnota := NovaMedzHodnota + 1;
    Posun := NovaMedzHodnota − MinHodnota;
                                   {potrebný posun hodnôt v poli Posledny}
    for I := PosuntoMaxHodnota − MinHodnota do
      if Posledny[I] < Hladky then
        Posledny[I − Posun] := 0                     {staré výskyty rušíme}
      else
        Posledny[I − Posun] := Posledny[I];                {posun hodnoty}
    for I := MaxHodnota−NovaMedzHodnota+1 to Cislo−NovaMedzHodnota−1
do
      Posledny[I] := 0;
    Posledny[Cislo − NovaMedzHodnota] := Index;              {zaznamenáme}
    MinHodnota := NovaMedzHodnota;
    MaxHodnota := Cislo
    end
  else
                                  {iste platí: (Cislo < MinHodnota) and }
              {(Cislo >= MinHodnota − K) and  (Cislo < MaxHodnota − K) }
              {nové číslo končí dosiaľ skúmaný K-hladký úsek a začína nový úsek,}
                 {tento nový úsek sa s predchádzajúcim môže čiastočne prekrývať}
    begin
    if Index − Hladky > MaxUsek then
      MaxUsek := Index − Hladky;
    NovaMedzHodnota := Cislo + K; {nová max. hodnota}
    for I := NovaMedzHodnota + 1 − MinHodnota
      to MaxHodnota − MinHodnota do
      if Posledny[I] > Hladky then Hladky := Posledny[I];
    Hladky := Hladky + 1; {nový začiatok K-hladkého úseku}
    while  (NovaMedzHodnota > Cislo)
      and (Posledny[NovaMedzHodnota − MinHodnota] < Hladky) do
        NovaMezHodnota := NovaMezHodnota + 1;
    Posun := NovaMezHodnota − MinHodnota;
                                   {potrebný posun hodnôt v poli Posledny}
    for I := Posun to MaxHodnota − MinHodnota do
      if Posledni[I] < Hladky then
        Posledni[I − Posun] := 0                     {staré výskyty rušíme}
      else
```

```
      Posledny[I + Posun] := Posledny[I];                    {posun hodnoty}
    for I := 1 to Posun − 1 do
      Posledny[I] := 0;
    Posledny[0] := Index;                                    {zaznamenáme výskyt}
    MinHodnota := Cislo;
    MaxHodnota := NovaMedzHodnota
    end
  end;
                      {ešte ostáva previesť test, či najdlhší K-hladký úsek nebol až }
                                                  {na úplnom konci postupnosti:}
if Index − Hladky + 1 > MaxUsek then
  MaxUsek := Index − Hladky + 1;
writeln(MaxUsek)
end.
```

Popísaný postup riešenia je pre každé vstupné dáta iste konečný, lebo počet opakovaní jediného cyklu v algoritme je pevne určený dĺžkou vstupnej postupnosti čísel. Odtiaľ tiež plynie už zmienená lineárna časová zložitosť algoritmu.

Správnosť riešenia vyplýva zo spôsobu spracovania čísel. V každej postupnosti čísel iste existuje pre ľubovoľné K nejaký K-hladký úsek, prinajmenšom každé číslo samo tvorí jednoprvkový K-hladký úsek. V konečnej postupnosti čísel je K-hladkých úsekov len konečne veľa, takže niektorý (prípadne niektoré) z nich má maximálnu dĺžku. Tento úsek bude algoritmom iste nájdený a jeho dĺžka bude uložená do výslednej premennej $MaxUsek$. V premennej $MaxUsek$ sa totiž priebežne počíta maximum zo všetkých hodnôt $Index - Hladky$ pred každým zvýšením hodnoty premennej $Hladky$, t.j. zo všetkých dĺžok už nepredĺžiteľných K-hladkých úsekov v danej postupnosti.

P – II – 2

Úloha P – II – 2 je drobnou modifikáciou jednej z klasických úloh teórie grafov. Cestná sieť predstavuje súvislý neorientovaný graf, v ktorom vrcholy grafu odpovedajú mestám a hrany grafu cestám. Úlohou je zistiť, či je doplnok daného grafu bipartitný graf.

Postup riešenia úlohy si môžeme názorne predstaviť tak, že pri rozdeľovaní miest do skupín budeme jednotlivé mestá„ofarbovať"dvomi farbami podľa toho, do ktorej skupiny bolo mesto zaradené. Mestám zaradeným do prvej skupiny priradíme farbu 1 a mestám z druhej skupiny farbu -1. Na začiatku výpočtu nie je žiadne mesto ofarbené, lebo dosiaľ nebolo zaradené do žiadnej zo skupín.

Celý proces rozdeľovania miest do skupín začneme tým, že jedno ľubovoľné mesto (tu mesto s číslom 1) ofarbíme farbou 1. Mestá, do ktorých z tohto mesta nevedie priama cesta, nesmú podľa zadaní patriť do rovnakej skupiny. Ofarbíme ich preto farbou -1. Podobne postupujeme stále ďalej. Všeobecne platí, že ak bolo nejaké mesto zaradené do jednej zo skupín, musia byť všetky mestá, ktoré s ním nie sú spojené priamou cestou, zaradené do opačnej skupiny. Pritom musíme priebežne kontrolovať, či nedôjde ku konfliktu. Konflikt nastane vtedy, ak potrebujeme nejaké už ofarbené mesto ofarbiť opačnou farbou. V takom prípade rozdelenie miest do skupín neexistuje a výpočet ihneď ukončíme. Inak pokračujeme v ofarbovaní miest tak dlho, dokiaľ sme nútení ofarbovať ďalšie mestá (vlastne ako dôsledok počiatočného ofarbenia prvého mesta). Ak sa tento proces zastaví, a pritom ešte existujú neofarbené mestá, môžeme jedno ľubovoľné z nich (tu to s najmenším číslom) ofarbiť ľubovoľnou farbou (tu farbou 1) a pokračujeme potom v ofarbovaní rovnakým spôsobom. Celé rozdeľovanie miest skončí vo chvíli, keď sú všetky mestá ofarbené a skontrolované, či ich ofarbenie nespôsobuje žiaden konflikt (ofarbenie miest potom určuje jedno možné rozdelenie miest do skupín), alebo keď pri ofarbovaní dôjde ku konfliktu (rozdelenie miest v takom prípade neexistuje).

Pre efektívne naprogramovanie uvedeného postupu je dôležitá vhodná voľba dátových štruktúr. Informacie o existujúcich cestách uložíme do štvorcového poľa A logických hodnôt veľkosti $N \times N$ (t.j. vytvoríme maticu susednosti skúmaného grafu). Pre evidenciu ofarbenia miest, t.j. zaradenia miest do skupín, použijeme jednorozmerné pole $Farba$ indexované číslami miest od 1 do N. Neofarbené mestá budú mať v tomto poli priradenú hodnotu 0, ofarbené potom hodnotu 1 alebo -1 podľa zvolenej farby. Ďalej potrebujeme udržiavať si zoznam čísel miest, ktoré sme už ofarbili, ale dosiaľ sme nezaistili, aby mestá, do ktorých nevedie priama cesta, patrili do opačnej skupiny. Na uloženie tohoto zoznamu použijeme jednorozmerné pole $Zoznam$ s N prvkami.

Z uvedeného postupu už plynie správnosť algoritmu. Postupom ofarbovania je zaistené, že sa nikdy nemôžu dostať do tej istej skupiny dve mestá, medzi ktorými nevedie priama cesta. Pokiaľ teda nájdeme bez konfliktu ofarbenie všetkých miest, určuje toto ofarbenie správne rozdelenie miest do skupín. Naopak, konflikt nastane jedine vo chvíli, keď by už ofarbené mesto malo byť zaradené do opačnej skupiny, ako tej, do ktorej bolo prv zaradené, t.j. keď rozdelenie miest do skupín neexistuje. Konečnosť výpočtu je daná tým, že v každom kroku je ofarbené jedno mesto. Počet krokov výpočtu je teda rovný nanajvýš počtu všetkých miest N. Odtiaľ plynie, že časová zložitosť algoritmu je úmerná N^2, lebo každý krok výpočtu predstavuje prevedenie rádovo N operacií (jeden prechod cez všetkých N miest).

```
program RozdelenieMiest;
const MaxN = 100;                                    {maximálny možný počet miest}
var A:array [1..MaxN, 1..MaxN] of Boolean;                         {matica ciest}
   Farba:array [1..MaxN] of −1..1;                             {rozdelenie miest}
   Zoznam:array [1..MaxN] of 1..MaxN;                    {pracovný zoznam miest}
   Posledny : 0..MaxN;                          {index posledného prvku zoznamu}
   N:integer;                                                       {počet miest}
   Zaradena:integer;                         {počet miest zaradených do skupín}
   Konflikt:Boolean;                                   {mestá nemožno rozdeliť}
   I, J:integer;
begin                                                               {Vstup dát:}
write('Pocet miest: ');
readln(N);
for I := 1to N do
   begin
   for J := 1to N do  A[I, J] := false;
   Farba[I] := 0
   end;
write('Zoznam vsetkych ciest');
writeln(' - kazda je zadana dvojicou cisel miest ODKIAL a KAM vedie:');
while not eof do
   begin
   read(I, J);
   A[I, J] := true; A[J, I] := true
   end;
                                                           {Rozdeľovanie miest:}
Zoznam[1] := 1;                                            {východiskové mesto}
Posledny := 1;                               {v zozname zaradených je zatiaľ samé}
Farba[1] := 1;                                            {zaradené do skupiny 1}
Zaradena := 1;                                          {jedno mesto je zaradené}
Konflikt := false;
while (Posledny > 0) and not Konflikt do
   begin
   I := Zoznam[Posledny];
   Posledny := Posledny − 1;
   for J := 1 to N do
      if (J <> I) and not A[I, J] then
         if Farba[J] = Farba[I] then
            Konflikt := true
         else if Farba[J] = 0 then
            begin
            Farba[J] := −Farba[I];
            Posledny := Posledny + 1;
            Zoznam[Posledny] := J;
            Zaradena := Zaradena + 1
            end;
   if (Posledny = 0) and (not Konflikt) and (Zaradena < N) then
```

```
      begin
                              {ľubovoľné dosiaľ nezaradené mesto môžeme zaradiť}
              {do ktorejkoľvek skupiny , prvé dosiaľ nezaradené dáme do skupiny 1}
      J := 1;
      while Farba[J] <> 0 do  J := J + 1;
      Zoznam[1] := J;                                      {novo zaradené mesto}
      Posledny := 1;                    {v zozname zaradených je teraz samé}
      Farba[J] := 1;                                   {zaradené do skupiny 1}
      Zaradena := Zaradena + 1;                     {ďalšie mesto je zaradené}
      end
    end;
if Konflikt then                       {Vyhodnotenie procesu rozdeľovania miest:}
    writeln('Rozdelenie miest do dvoch skupin neexistuje.')
else
    begin
    writeln('Rozdelenie miest do dvoch skupin je mozné.');
    writeln('Jedno take pripustne rozdelenie je toto:');
    write('1.skupina:');
    for I := 1 to N do
      if Farba[I] = 1 then write(I : 3);
    writeln;
    write('2.skupina:');
    for I := 1 to N do
      if Farba[I] = -1 then write(I : 3);
    writeln
    end
end.
```

P – II – 3

a) Najprv sa pokúsime hlbšie preniknúť do priebehu uvedenej hry tým, že budeme sledovať situáciu pre malé počty zápaliek zostávajúce na kôpke:

zostáva 0	hráč na ťahu prehráva
zostáva 1	hráč na ťahu vyhráva (vezme 1)
zostáva 2	hráč na ťahu vyhráva (vezme 2)
zostáva 3	hráč na ťahu prehráva (odobratím 1 alebo 2 sa súper dostane do pozície s vyhrávajúcim ťahom)
zostáva 4	hráč na ťahu vyhráva (vezme 1 alebo 4)
zostáva 5	hráč na ťahu vyhráva (vezme 2)
zostáva 6	hráč na ťahu prehráva (odobratím 1, 2 alebo 4 sa súper dostane do pozície s vyhrávajúcim ťahom)
...	

Po vyšetrení ďalších pozícií zistíme, že vyhrávajúce a prehrávajúce pozície sa pravidelne opakujú (s periódou dĺžky 3). Na základe nášho rozboru hry môžeme vysloviť nasledujúcu hypotézu. Ak je počet zápaliek na kôpke N tvaru $3k$, začínajúci hráč nemôže proti dobrému superovi vyhrať. Pre ostatné hodnoty S má naopak začínajúci hráč isté víťazstvo, ak sa bude držať víťaznej stratégie. Pre N tvaru $3k+1$ bude brať 1 zápalku, pre N tvaru $3k+2$ vezme 2 zápalky. Správnosť uvedenej hypotézy teraz dokážeme. Ak je počiatočný počet zápaliek tvaru $3k+1$ alebo $3k+2$ a zahráme svoj ťah podľa uvedenej stratégie, dostane sa súper do situácie, že je na ťahu a na kôpke je $3k$ zápaliek. Nech zahrá akokoľvek, po jeho ťahu zostane na kôpke počet zápaliek, ktorý nie je deliteľný tromi, t.j. počet tvaru $3m+1$ alebo $3m+2$. Súper totiž musí odobrať počet zápaliek, ktorý je mocninou 2, a žiadna mocnina dvoch nie je bezo zvyšku deliteľná tromi. Nemôže teda svojim ťahom zobrať poslednú zápalku a my sa po jeho ťahu opäť dostaneme do situácie, v ktorej použijeme víťazný ťah podľa uvedenej stratégie. Tak sa situácia opakuje pre stále sa zmenšujúci počet zápaliek zostávajúcich na kôpke. Po konečnom počte ťahov budeme na ťahu v pozícii s 1 alebo 2 zápalkami na kôpke, čo znamená už bezprostrednú výhru.

Naopak, pre počiatočný počet zápaliek N tvaru $3k$ vedie akýkolvek ťah začínajúceho hráča do pozície, v ktorej nie je počet zápaliek zostávajúcich na kôpke deliteľný tromi. Ak sa bude potom náš súper držať uvedenej stratégie, má isté víťazstvo v hre.

b) Úlohu môžeme riešiť úplne analogicky ako úlohu a). Namiesto postupného skúmania jednotlivých hodnôt N je však lepšie najprv sa trochu zamyslieť nad paritou (t.j. párnosťou resp. nepárnosťou) počtu zápaliek na kôpke. V jednom ťahu sa odoberá zakaždým počet zápaliek, ktorý je mocninou troch, teda vždy nepárny počet. Po každom ťahu jedného z hráčov sa teda zmení parita počtu zápaliek zostávajúcich na kôpke. Po konečne veľa ťahoch sa kôpka celkom vyprázdni. Tento víťazný stav dosiahne určite ten hráč, ktorý je na ťahu vždy, keď zostáva na kôpke nepárny počet zápaliek. Odtiaľ už plynie nasledujúci záver: Ak je počiatočný počet zápaliek nepárny, hru vyhrá začínajúci hráč, pri párnom počte naopak zvíťazí ten hráč, ktorý hru nezačína. Pritom vôbec nezáleží na tom, aké počty zápaliek hráči vo svojich ťahoch odoberajú.

P – II – 4

a) Požadovaný stroj neexistuje. Zdôvodnenie je rovnaké ako v úlohe P – I – 4 c).

b) Čísla v doplnkovom kóde možno sčítať odzadu rovnako ako celé nezáporné čísla v pozičnej sústave. V jednom kroku stroj prečíta z oboch sledov po jednej cifre a zapíše jednu cifru do výsledku. Pomocou vnútorných stavov si bude pamätať prenos medzi rádmi. Je ale potrebné vyriešiť technické problémy. Keď jedno z čísel skončí, musí stroj počítať rovnako, ako by vo vstupnom slede nasledovali ďalšie cifry rovné naposledy čítanej cifre. Keď skončia obidva sledy, je potrebné vypísať ešte aspoň jednu cifru výsledku (skúste si sčítať $2k + 2k$).

Stroj si teda musí pamätať tieto informácie:

– či došlo k prenosu (P = prenos, B = bez prenosu),

– poslednú čítanú cifru v prvom slede (0 alebo 1),

– poslednú čítanú cifru v druhom slede (0 alebo 1),

Stavy stroja budú vlastne predstavovať trojice informácií, spolu ich bude osem. Označíme ich $B = (B, 0, 0)$, $C = (B, 0, 1)$, $D = (B, 1, 0)$, $Q = (P, 0, 1)$, $R = (P, 1, 0)$, $S = (P, 1, 1)$. Rozmyslite si, že do stavov $(B, 1, 1)$ a $(P, 0, 0)$ sa stroj nemôže nikdy dostať. Počiatočný stav je B, prechodová funkcia je daná tabuľkou. Pre stav K nie je prechodová funkcia definovaná.

stav	čítané symboly								
	00	01	10	11	0φ	1φ	$\varphi 0$	$\varphi 1$	$\varphi\varphi$
B	$B/0$	$C/1$	$D/1$	$S/0$	$B/0$	$D/1$	$B/0$	$C/1$	$K/0$
C	$B/0$	$C/1$	$D/1$	$S/0$	$C/1$	$S/0$	$B/0$	$C/1$	$K/0$
D	$B/0$	$C/1$	$D/1$	$S/0$	$B/0$	$D/1$	$D/1$	$S/0$	$K/0$
Q	$B/1$	$Q/0$	$R/0$	$S/1$	$Q/0$	$S/1$	$B/1$	$Q/0$	$K/1$
R	$B/1$	$Q/0$	$R/0$	$S/1$	$B/1$	$R/0$	$R/0$	$S/1$	$K/1$
S	$B/1$	$Q/0$	$R/0$	$S/1$	$Q/0$	$S/1$	$R/0$	$S/1$	$K/1$

c), d). Obdobne ako v prvom kole zostrojíme konečný sekvenčný stroj, ktorý bude vstupujúce číslo deliť tromi. Podiel zapíše do výstupneho sledu, zvyšok po delení bude daný stavom, v ktorom výpočet skončí. Na rozdiel od úlohy v prvom kole odpadá technická starosť o prípad, keď by vo výsledku boli nadbytočné vedúce nuly alebo jednotky. Počiatočným stavom je X.

stav	čítaný symbol		
	0	1	φ
X	N/φ	D/φ	–
N	$N/0$	$J/0$	–
J	$D/0$	$N/1$	–
D	$J/1$	$D/1$	–

P – III – 1

Daná postupnosť N čísel je tvorená číslami $a_1, a_2, \dots, a_N$. Pre každé číslo a_i môžeme určiť hodnotu e_i udávajúcu, o koľko viac bolo kladných čísel ako záporných v počiatočnom úseku postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_i$. Pokiaľ bolo v úseku $a_1, a_2, \dots, a_i$ viac záporných čísel, bude mať e_i zápornu hodnotu. Pre každé poradové číslo prvku i od 1 do N bude iste platiť nerovnosť $-i \leqq e_i \leqq i$. Každý vybalancovaný úsek postupnosti $a_p, a_{p+1}, \dots, a_{q-1}, a_q$ je charakterizovaný tým, že jeho krajné prvky a_p, a_q majú rovnakú túto e-hodnotu, t.j. $e_p = e_q$. Pokiaľ teda určíme všetky hodnoty e_i pre i od 1 do N, stačí medzi nimi nájsť dvojicu rovnakých hodnôt čo najviac od seba vzdialených. Ich vzdialenosť v postupnosti potom priamo udáva dĺžku maximálneho vybalancovaného úseku. Ak neexistuje žiadna dvojica rovnakých hodnôt $e_p = e_q$, sú všetky čísla v postupnosti kladné alebo všetky záporné a daná postupnosť teda neobsahuje žiaden vybalancovaný úsek. Výpočet hodnôt e_i pre všetky i od 1 do N je veľmi jednoduchý. Stačí raz prejsť celou postupnosťou a za každé kladné, resp. záporné číslo pričítať k priebežne počítanej hodnote +1, resp. −1. Formálne zapísané, položíme

$$
\begin{aligned}
e_0 &= 0 && \text{a potom}\\
e_i &= e_{i-1} + 1 && \text{keď } a_i > 0,\\
e_i &= e_{i-1} && \text{keď } a_i = 0,\\
e_i &= e_{i-1} - 1 && \text{keď } a_i < 0.
\end{aligned}
$$

Bolo by možné uložiť si všetky hodnoty e_i do poľa a v ňom potom vyhľadávať dvojice rovnakých hodnôt. Takýto postup je ale zbytočne pomalý. Lepšie je ukladať si do pomocného poľa F pre každdú dosiahnutú e-hodnotu M najmenšie také p, že $e_p = M$. Vzhľadom k podmienke $-i \leqq e_i \leqq i$ musí byť toto pole indexované od $-N$ do N. Využívať sa z neho bude pritom len určitý súvislý úsek s indexmi od X po Y. Počas čítania a spracovávania prvkov postupnosti sa veľkosť tohto úseku môže zväčšovať.

Na začiatku výpočtu položíme $X = 0$, $Y = 0$ a $F[0] = 0$. Postupne budeme čítať čísla tvoriace danú postupnosť a spracovávať ich. Po prečítaní čísla a_i najprv spočítame hodnotu e_i podľa vyššie uvedeného predpisu (na základe zaznamenanej predchádzajúcej hodnoty e_{i-1}). Ak $e_i < X$, musí byť nutne $e_i = X - 1$. Zmenšíme teda X o 1 a zaznamenáme výskyt novej e-hodnoty $F[X] = i$. Podobne pre $e_i > Y$ zväčšíme Y o 1 a uložíme hodnotu $F[Y] = i$. Ak je e_i z intervalu $\langle X, Y \rangle$, rovnaká e-hodnota bola už nájdená niekedy skôr, a síce najskôr pri spracovaní prvku s poradím $F[e_i]$. To znamená, že najdlhší vybalancovaný úsek končiaci prvkom a_i má dĺžku $i - F[e_i]$. Teraz ostáva len porovnať túto dĺžku s priebežne ukladaným maximom z dĺžok nájdených vybalancovaných úsekov.

Popísaný algoritmus je iste konečný, jediný jeho cyklus sa opakuje len raz pre každé číslo danej postupnosti. Má teda lineárnu časovú zložitosť. Správnosť algoritmu vyplýva zo skutočnosti, že systematicky preskúmame maximálne vybalancované úseky končiace každým z prvkov postupnosti a z ich dĺžok vyberieme maximum.

```
program VybalancovanyUsek;
const MaxN = 1000;
var N:integer;                              {počet čísel v postupnosti}
  A:integer;                                {práve spracovávané číslo}
```

```
  E:integer;                                     {e-hodnota spracovávaného čísla}
  I:integer;                                     {poradie spracovávaného čísla}
  X, Y:integer;                                  {medze rozsahu nájdených e-hodnôt}
  F:array[-MaxN..MaxN] of integer;
                                     {indexy prvých výskytov jednotlivých e-hodnôt}
  Max:integer;                                   {dĺžka max. vybalancovaného úseku}
begin
X := 0; Y := 0;
F[0] := 0;
E := 0;
Max := 0;
for I := 1 to  N do
  begin
  read(A);                                       {ďalšie spracovávané číslo}
  if A > 0 then E := E + 1                       {spočítanie jeho e-hodnoty}
  else if A < 0 then E := E - 1;
  if E < X then                                  {nová najmenšia e-hodnota}
    begin X := X - 1; F[X] := I end
  else if E > Y then                             {nová najväčšia e-hodnota}
    begin Y := Y + 1; F[Y] := I end
  else                                           {ďalší výskyt rovnakej e-hodnoty}
    if I - F[E] > Max then Max := I - F[E]
  end;
if Max = 0 then
  writeln('Vybalancovany usek neexistuje!')
else
  writeln('Dlzka maximalneho vybalancovaneho useku: ',Max)
end.
```

P – III – 2

Úloha P – III – 2 je jednou z klasických úloh teórie grafov. Cestná sieť predstavuje súvislý neorientovaný graf, v ktorom vrcholy grafu odpovedajú mestám a hrany grafu cestám. Nepostrádateľné cesty, tak ako sú definované v zadaní úlohy, odpovedajú v teórii grafov zvláštnym hranám nazývaným mosty. Úlohou je teda nájsť v danom grafe všetky mosty.

Algoritmus riešenia je založený na prechádzaní zadaným grafom do hĺbky. Pri prechádzaní bude každý vrchol grafu navštívený práve raz. Spôsob prechádzania možno znázorniť stromom. Koreňom stromu prechádzania je vrchol, z ktorého bolo prechádzanie započaté. Za koreň môžeme zvoliť ľubovoľný vrchol grafu. Bezprostrednými nasledovníkmi niektorého vrcholu V sú všetky tie vrcholy, do ktorých prehľadávanie z vrcholu V bezprostredne pokračovalo. Pretože zadaný graf je súvislý, budú v strome prechádzania obsiahnuté všetky vrcholy pôvodného grafu (mestá). Zo všetkých hrán (ciest) budú v strome prechádzania obsiahnuté len tie, ktoré nás v priebehu prechádzania doviedli do nového, doposiaľ nenavštíveného vrcholu.

Predstavme si, že do stromu prechádzania dokreslíme zelenou farbou všetky ostatné hrany grafu. To sú teda také, ktorými priechod do hĺbky nepokračoval. Inak povedané, v priebehu prechádzania tieto cesty viedli z práve prechádzaného mesta do iného, už prv navštíveného mesta. Doplnený strom teda bude izomorfný s pôvodným grafom.

Teraz vyslovíme jedno pomocné tvrdenie: *Oba koncové vrcholy každej zelenej hrany ležia na tej istej vetve stromu prechádzania.*

Tvrdenie ľahko dokážeme sporom. Predpokladajme, že by niektorá zelená cesta spájala dve mestá A a B, ktoré neležia na jednej vetve stromu prechádzania. Označme ich tak, že počas prechodu bolo A po prvýkrát navštívené skôr ako B. Mesto B iste neleží v podstrome prechádzania s koreňom A (inak by A a B ležali na tej istej vetve). Pre postup prechádzania to znamená, že najprv bolo (prípadne niekoľkorát) navštívené mesto A, a až potom (prípadne niekoľkorát) navštívené mesto B. Všimneme si okamihu počas prechádzania, kedy sme mesto A navštívili naposledy. To bolo v situácii, keď sme sa z neho vracali späť (keby sme išli vpred, museli by sme do A prísť ešte na spiatočnej ceste). V tomto okamihu sme sa ale nezachovali správne podľa algoritmu prechádzania grafom do hĺbky: vracali sme sa späť, a pritom sme ešte mali prejsť cestou AB, pretože tá viedla do vtedy ešte nenavštíveného mesta B.

Na to, aby hrana bola mostom, je nutné a stačí, aby sa jej odstranením oddelil podstrom v strome prechádzania, ktorý nebude dostupný ani po niektorej zelenej hrane. Podľa predchádzajúceho tvrdenia by také spojenie zelenou hranou muselo viesť do vyššej vrstvy v strome prechádzania.

Na základe prevedených úvah už možno sformulovať algoritmus. Zadaný graf budeme prechádzať do hĺbky, začať môžeme ľubovoľným vrcholom (napr. vrcholom číslo 1). Počas prechádzania si budeme pri každom vrchole M pamätať jeho hĺbku v strome prechádzania $H(M)$. Koreň stromu prechádzania bude mať hĺbku 0. Postupne počas prechodu budeme pre každý prechádzaný vrchol M určovať číslo $Z(M)$ definované takto: $Z(M)$ je minimum z $H(M)$ a z hĺbok koncových miest všetkých zelených ciest, ktoré vychádzajú z vrcholov v podstrome s koreňom M. $Z(M)$ je teda číslo najvyššej hladiny v strome prechádzania, do ktorej vedie priame spojenie zelenou cestou z nejakého mesta v podstrome s koreňom M. Pritom si všímame iba hladiny nad vrcholom M. Ak nastane pre niektorý vrchol M nerovnosť $Z(M) < H(M)$, existuje zelená cesta, ktorá spája podstrom s koreňom vo vrchole M so zvyškom grafu. Ak je $Z(M) = H(M)$, je cesta, po ktorej sme do M počas prechádzania prišli, mostom.

Ostáva ukázať, ako budeme počítať hodnoty $H(M)$ a $Z(M)$ pre vrchol M. Hodnotu $H(M)$ určíme ľahko pri prvom vstupe do vrcholu M počas prechádzania grafom – je o 1 väčšia ako odpovedajúca hodnota $H(X)$ vrcholu X, z ktorého do M prichádzame. Stanovenie hodnoty $Z(M)$ je o niečo náročnejšie. Hodnota $Z(M)$ je rovná minimu z hodnoty $H(M)$ a hodnôt $Z(I)$ všetkých vrcholov ležiacich v podstrome s koreňom vo vrchole M. Pri prvom vstupe do vrcholu M môžeme teda inicializovať hodnotou $Z(M)$ už známu hodnotu $H(M)$ a potom ju počas prechádzania podstromu vrcholu M budeme prípadne zmenšovať, ak to bude možné. Pri každom ďalšom príchode do vrcholu M (t.j. pri návrate z nejakého nasledovníka vrcholu M) možno hodnotu $Z(M)$ znížiť na Z-hodnotu tohto nasledovníka. K ďalšiemu zníženiu $Z(M)$ môžu prispieť hrany, ktoré vedú z vrcholu M do už navštívených uzlov, a po ktorých sa teda pri prechode nepostupuje. Hodnotu $Z(M)$ môžeme znížiť na H-hodnotu koncových vrcholov týchto zelených hrán. Definitívnu hodnotu $Z(M)$ získame až pri poslednom opustení vrcholu M.

Zložitosť celého algoritmu je daná zložitosťou prechodu grafom do hĺbky. Ostatné výpočty spojené s určovaním hodnôt $H(M)$ a $Z(M)$ majú konštantné časové náročnosti. Časová zložitosť programu pre prechod grafom do hĺbky závisí od vhodnej voľby vnútornej reprezentácie grafu. Pri vhodne zvolenej reprezentácii (pozri uvedenú ukážku programu) je priamo úmerná počtu hrán v grafe, t.j. je rádu n^2, kde n je počet vrcholov grafu.

```
program Mosty (input,output);
{ Formát očakávaných vstupných dát - zadanie grafu:}
{ – susedia každého vrcholu vždy na jednom riadku v tvare}
{ (číslo - vrcholu) (číslo - suseda1) (číslo - suseda2) ... }
{ – vrcholy musia byť očíslované od jednotky po jednej a v tomto}
{ poradí musia byť zadané tiež riadky na vstupe }
{ – každá hrana sa teda uvádza dvakrát (na riadkoch pre jeden}
{ a pre druhý jej koncový vrchol)}
{ – program pre jednoduchosť netestuje správnosť zadaných}
{ vstupných dát (nebolo by ťažké testy doplniť) }
const MaxPocetMiest = 40;
      MaxPocetCiest = 200;
type Mesto = 1..MaxPocetMiest+1;                    { fiktívne mesto na konci }
     Cesta = 1..MaxPocetCiest;
var GMesto : array [Mesto] of record
                 Spoje : Cesta;
                 Hlbka : integer;
                 Prejdene : Boolean;
             end;
    GCesta : array [Cesta] of Mesto;
                 { polia GMesto a GCesta predstavujú vnútorné uloženie grafu,}
                    { ku každému vrcholu je v poli GCesta uložený zoznam}
                   { jeho susedov, položka Spoje v GMesto určuje, kde presne}
                 { sú uložení susedia každého konkrétneho vrcholu, pozri úvodný}
                   { komentár o tvare vstupných dát a procedúru NacitajGraf }
    PocetMiest : 0..MaxPocetMiest;
    PocetCiest : 0..MaxPocetCiest;
    F:integer;                 { pomocná premenná – je potrebná pre správne}
                              { volanie procedúry Prechod v hlavnom programe }
procedure NacitajGraf;
                            { načítanie vstupných dát - zadanie skúmaného grafu }
var dummy:integer;
begin
PocetMiest:=0;
PocetCiest:=1;
  repeat
  PocetMiest:=PocetMiest+1;
  read(dummy);                                    { číslo mesta - nevyužíva sa }
  GMesto[PocetMiest].Spoje:=PocetCiest;
  while not eoln do
    begin
    read(GCesta[PocetCiest]);
    PocetCiest:=PocetCiest+1;
```

```
    end;
  readln;
  until eof;
GMesto[PocetMiest+1].Spoje:=PocetCiest;
end;
function min(X,Y:integer):integer;
                         { pomocná procedúra - minimum z dvoch celých čísel }
begin
if X < Y then min:=X else min:=Y;
end;
procedure PisMost(odkial,kam : Mesto);
{ vypíše, že z mesta odkial do mesta kam vedie most }
begin
writeln('Most z ',odkial,' do ',kam,'.');
end;
procedure PredPrechodom;
                         { označí všetky mestá za doteraz neprejdené – nutne! }
var i:Mesto;
begin
for i:=1 to PocetMiest do GMesto[i].Prejdene := false;
end;
procedure Prechod(Start: Mesto; hl:integer; var Z: integer);
                                   { Prejde odpovedajúcu časť grafu do hĺbky. }
                         { Začína v meste Start, jeho hĺbka je hl, spočíta preň }
                                                   { hodnotu Z (pozri text). }
var Nasl : Mesto;
    S : Cesta;
    pomZ : integer;
begin
GMesto[Start].Prejdene := true;                           { vrchol navštívený }
GMesto[Start].Hlbka := hl;                                    { má hĺbku hl }
Z := hl; {zatiaľ hodnota Z }
for S:=GMesto[Start].Spoje to GMesto[Start+1].Spoje-1 do
  begin
  Nasl := GCesta[S]; { mesto dostupné po ceste S }
  if GMesto[Nasl].Prejdene then
    begin { nepočítať cestu, po ktorej sme prišli ! }
    if GMesto[Nasl].Hlbka+1 <> hl then
                                     { zelená cesta, buď hore, alebo dole }
      Z := min(Z,GMesto[Nasl].Hlbka)
                                 { pokiaľ vedie zelená cesta nahor, znížime}
                                                   { hodnotu Z v našom uzle }
    end
  else
    begin
    Prechod(Nasl,hl+1,pomZ);
    if hl+1 = pomZ then
```

```
    PisMost(Start,Nasl); { nájdený most v grafe }
  Z := min(Z,pomZ); { prípadné zníženie hodnoty Z }
  end;
 end;
end;
begin
NacitajGraf;
PredPrechodom;
Prechod(1,0,F)                                  { vždy je F = 0 }
end.
```

P – III – 3

a) Budeme systematicky skúmať možnosti víťazného ťahu v situáciách s malým počtom zápaliek ostávajúcich na kôpke. Pritom vždy musíme rozlíšiť, či hráč, ktorý je na ťahu, doteraz odobral párny alebo nepárny počet zápaliek. Výsledky pozorovania zapíšeme do prehľadnej tabuľky. Čísla v tabuľke udávajú, ako vyzerá správny víťazný ťah. Pokiaľ víťazný ťah v danej pozícii neexistuje, je v tabuľke zapísaná pomĺčka.

počet zápaliek ostávajúcich na kôpke	hráč na ťahu už odobral	
	párny počet	nepárny počet
1	–	1
2	2	1
3	2	3
4	–	3
5	1	–
6	1	2
7	3	2
8	3	–
9	–	1
10	2	1
11	2	3

Prvé tri riadky tabuľky pre počty zápaliek 1, 2 a 3 sme získali preskúmaním všetkých možností povoleného ťahu. Ďalšie riadky tabuľky už zapĺňame mechanicky, vždy na základe znalosti troch bezprostredne predchádzajúcich riadkov. Hráč totiž môže svojim ťahom odobrať 1, 2 alebo 3 zápalky, a tým sa situácia v hre prevedie na situáciu popísanu práve jedným z troch predchádzajúcich riadkov. Víťazný ťah existuje vtedy, ak privedie súpera do situácie, v ktorej on naopak žiadny víťazný ťah nemá (v tabuľke je pomlčka). Pri vypĺňaní tabuľky využívame skutočnosť, že vieme, či súper doteraz odobral párny alebo nepárny počet (to je dané paritou nášho počtu zápaliek a počtu zápaliek ostávajúcich na kôpke, všetkých zápaliek je nepárny počet).

Po zaplnení 11 riadkov tabuľky zistíme, že sa hodnoty v tabuľke začínajú opakovať s periódou 8. Vzhľadom k tomu, že sa zopakovali tri po sebe idúce riadky (riadky 9, 10 a 11 sú zhodné s riadkami 1, 2 a 3), a že každý ďalší riadok tabuľky zostrojujeme vždy len na základe troch bezprostredne predchádzajúcich riadkov, je v tejto chvíli isté, že sa obsah tabuľky bude aj naďalej stále opakovať s periódou 8.

Tým je úloha vyriešená a prvých 8 riadkov uvedenej tabuľky obsahuje prehľadne spísanú víťaznú stratégiu našej hry. Hráč na ťahu zistí počet ostávajúcich zápaliek modulo 8 a na základe tejto hodnoty a parity počtu zápaliek, ktoré už sám odobral, určí z tabuľky, či má zaručené víťazstvo v hre. Pokiaľ áno, tabuľka udáva počet zápaliek, ktorý má odobrať. Počiatočný počet všetkých zápaliek N musí byť nepárny. Začínajúci hráč nemá zatiaľ žiadnu odobranú zápalku, t.j. má párny počet (nula je párne číslo). Z tabuľky plynie, že na začiatku hry má začínajúci hráč zaručené víťazstvo pri dodržaní popísanej víťaznej stratégie, ak je N tvaru $8k + 3$, $8k + 5$ alebo $8k + 7$. Pokiaľ je N tvaru $8k + 1$, začínajúci hráč s dobre hrajúcim súperom prehrá.

b) Úlohu riešime úplne rovnakým spôsobom ako úlohu a). Opäť zostrojíme tabuľku víťaznej stratégie:

počet zápaliek ostávajúcich na kôpke	hráč na ťahu už odobral	
	párny počet	nepárny počet
1	–	1
2	2	1
3	2	3
4	4	3
5	4	–
6	1	–
7	–	1
8	2	1
9	2	3
10	4	3

Riadky sa v tomto prípade začínajú opakovať s periódou dĺžky 6. Overili sme zopakovanie štyroch po sebe idúcich riadkov (riadky 7, 8, 9 a 10 sú zhodné s riadkami 1, 2, 3 a 4), lebo každý riadok závisí len od štyroch svojich predchodcov. Rovnakou úvahou ako v úlohe a) z toho plynie, že prvých 6 riadkov tu uvedenej tabuľky obsahuje úplnú víťaznú stratégiu hry.

Hráč začínajúci hru má zaistené víťazstvo pri dodržaní popísanej víťaznej stratégie, ak je počiatočný počet zápaliek N tvaru $6k + 3$ alebo $6k + 5$. Pokiaľ je N tvaru $6k + 1$, začínajúci hráč s dobre hrajúcim súperom prehrá.

P – III – 4

a) Hľadaný stroj neexistuje. Dôvodom je nejednoznačnosť zápisu čísel (vedúce nuly) a zároveň striktná požiadavka na synchrónne čítanie oboch vstupov. Predstavte si porovnávanie dvoch zápisov rovnakého čísla, pričom jeden obsahuje k cifier, druhý obsahuje pred zápisom ďalších k núl (teda spolu $2k$ cifer). Po prečítaní prvých k znakov stroj už dočíta prvý vstup do konca, z druhého však neprečítal jedinú významnú cifru. To znamená, že si pre úspešné porovnávanie musí byť schopný zapamätať hodnotu celého kratšieho operandu. To ale v pamäti konečnej veľkosti nie je možné.

b) Porovnávanie je podobné porovnávaniu v pozičnej sústave s kladným základom. Je len potrebné si uvedomiť, že vyššie cifry v párnych rádoch predstavujú vyššiu hodnotu, zatiaľčo vyššie cifry v nepárnych rádoch nižšiu hodnotu čísla. Teda napríklad $11 < 01$ v sústave so základom -2. Počas porovnávania teda sledujeme:

– ktorá z prečítaných častí prvého a druhého čísla je väčšia resp. že obidve čísla boli doteraz rovnaké

– párnosť/nepárnosť práve spracovávanej pozície v zápise čísel.

Stroj teda bude mať 6 stavov:

N – párna pozícia – rovnaké zápisy,
S – nepárna pozícia – rovnaké zápisy,
A – párna pozícia – prvé číslo väčšie,
B – nepárna pozícia – prvé číslo väčšie,
C – párna pozícia – druhé číslo väčšie,
D – nepárna pozícia – druhé číslo väčšie.

Počiatočný stav je N, prechodová funkcia nasleduje. Pre stav K nie je definované žiadne prechodové pravidlo. Uvedomte si, že porovnávanie je možné ukončiť až po prečítaní dlhšieho zo vstupujúcich čísel.

stav	čítané symboly								
	00	01	10	11	0φ	1φ	$\varphi 0$	$\varphi 1$	$\varphi\varphi$
N	S/φ	D/φ	B/φ	S/φ	S/φ	B/φ	S/φ	D/φ	K/S
S	N/φ	A/φ	C/φ	N/φ	N/φ	C/φ	N/φ	A/φ	K/S
A	B/φ	D/φ	B/φ	B/φ	B/φ	B/φ	B/φ	D/φ	K/P
B	A/φ	A/φ	C/φ	A/φ	A/φ	C/φ	A/φ	A/φ	K/P
C	D/φ	D/φ	B/φ	D/φ	D/φ	B/φ	D/φ	D/φ	K/D
D	C/φ	A/φ	C/φ	C/φ	C/φ	C/φ	C/φ	A/φ	K/D

c) Stroj neexistuje. Zdôvodnenie je úplne analogické úlohe prvého kola P – I – 4 c).

d) Sčítanie je podobné sčítaniu v pozičných sústavách s kladným základom. Je len potrebné dať si pozor na prenosy. Okrem skutočnosti, že prenos do vyššieho rádu mení znamienko, je treba mať na zreteli, že sa prenos môže prejaviť nielen v nasledujúcom ráde, ale až v dvoch nasledujúcich rádoch. Tomu je potrebné venovať pozornosť na konci sčítania – v situácii, keď sú obidva operandy dočítané a vypisujeme cifry, ktoré pribudli v dôsledku prenosu. Prenos môže nadobúdať tri hodnoty: označme ich 0,1,11 (to sú hodnoty, ktoré je potrebné pričítať k vyšším rádom vo výsledku). Budú im odpovedať stavy N,J,T. Stav K slúži len pre ukončenie výpočtu. Počiatočným stavom je N.

stav	čítané symboly								
	00	01	10	11	0φ	1φ	$\varphi 0$	$\varphi 1$	$\varphi\varphi$
N	$N/0$	$N/1$	$N/1$	$T/0$	$N/0$	$N/1$	$N/0$	$N/1$	K/φ
J	$N/1$	$T/0$	$T/0$	$T/1$	$N/1$	$T/0$	$N/1$	$T/0$	$K/1$
T	$J/1$	$N/0$	$N/0$	$N/1$	$J/1$	$N/0$	$J/1$	$N/0$	$J/1$

e) Pri určovaní zvyškov po celočíselnom delení záporných čísel sa niekedy uvažujú nezáporné zvyšky a niekedy záporné (napr. $(-5)/3$ dáva zvyšok 1 alebo -2). Je možné zvoliť si ktorúkoľvek z oboch možností, my si zvolíme prvú z nich. Uvedomme si, že všetky mocniny čísla -2 dávajú pri delení tromi zvyšok 1. Ako kritérium deliteľnosti tromi môže preto poslúžiť deliteľnosť tromi ciferného súčtu čísla. Navrhnúť stroj, ktorý zistí, či ciferný súčet čísla je deliteľný tromi, je jednoduché. Postačia štyri stavy, z ktorých stav K je využitý len pre ukončenie výpočtu. Počiatočný stav je N.

stav	čítaný symbol		
	0	1	φ
N	N/φ	J/φ	K/A
J	J/φ	D/φ	K/N
D	D/φ	N/φ	K/N

f) Hľadaný stroj neexistuje. Táto skutočnosť vyzerá trochu paradoxne v súvislosti s kladným riešením bodu e). Určiť zvyšok pri celočíselnom delení je však jednoduchšie, ako určiť podiel. Predpokladajme, že stroj, ktorý delí tromi, existuje. Uvažujme tieto delence a ich podiely pri delení tromi

$$\frac{10000\ldots0000011}{3} = 0010101\ldots010101 \qquad \text{a}$$
$$\frac{10000\ldots0000110}{3} = 1101010\ldots101010.$$

Zápisy všetkých uvedených čísel obsahujú $2k+3$ cifer, k je ľubovoľné celé kladné číslo. V zápise delencov sa opakujú nuly, v zápise podielov sa opakuje skupina 01 či 10. Výsledky výpočtov nad uvedenými dvomi vstupmi sa líšia už v druhej číslici spredu (nepočítame vedúce nuly). Či má byť druhou platnou číslicou jednotka či nula však stroj zistí až po prečítaní posledných troch cifer vstupujúceho čísla. To znamená, že v okamihu, keď stroj zapisuje druhú nenulovú cifru výsledku, má už prečítaný celý vstup (prípadne až na posledné dve cifry). Potom by mal ešte vypísať zvyšok výstupu. K tomu si ale musí pamätať prinajmenšom počet cifer, ktoré má do výsledku zapísať, na čo mu pre dostatočne dlhé operandy konečná pamäť nemôže stačiť.

35. medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 8. až 20. júla 1994 sa v Hong Kongu konala 35. medzinárodná matematická olympiáda IMO'94. Zúčastnilo sa jej 384 súťažiacich zo 69 krajín. Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zo zúčastnených krajín na ňu vysiela súťažné družstvo zložené z najviac šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tvorili *Ivan Cimrák* z 2.ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline, *Patrick Horník* z 3.ročníka Gymnázia Grősslingová v Bratislave, *Michal Kovár* z 3.ročníka Gymnázia Grősslingová v Bratislave, *Peter Macák* z 3.ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *Martin Niepel* zo 4.ročníka Gymnázia Grősslingová v Bratislave a *Andrej Zlatoš* zo 4.ročníka Gymnázia Grősslingová v Bratislave.

Vedúcim delegácie bol *doc. RNDr. Tomáš Hecht, Csc.*, z MFF UK v Bratislave a zástupcom vedúceho *Richard Kollár* z MFF UK v Bratislave.

Samotná súťaž je rozdelená do dvoch súťažných dní, počas ktorých súťažiaci riešia po 3 úlohy, na ktorých vyriešenie majú vždy 4,5 hodiny čistého času. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Ivan Cimrák	1	5	0	1	4	0	11	-
Patrick Horník	7	7	0	2	6	0	22	3.
Michal Kovár	0	7	0	1	4	0	12	-
Peter Macák	3	7	5	7	5	0	27	3.
Martin Niepel	7	7	7	7	7	1	36	2.
Andrej Zlatoš	7	7	7	7	7	7	42	1.

Ako vidíme, najlepšie vyriešili naši súťažiaci 2. úlohu – geometria a najhoršie 6. úlohu – kombinatorika. Táto úloha však dopadla celkovo zle, a tak najväčšiu stratu sme utrpeli na pomerne ľahkej 3. úlohe – kombinatorika, ktorú traja naši reprezentanti vôbec neriešili. Nieveľmi potešujúce umiestnenie v neoficiálnom poradí krajín (22.miesto, pozri tabuľku) zatienil úspech Andrej Zlatoša, ktorý úplne správne vyriešil všetkých 6 úloh a stal sa tak nielen držiteľom zlatej medaily, ale aj absolútnym víťazom (plný počet bodov získalo 22 súťažiacich z 11 krajín). Dvojica riešiteľov Cimrák, Kovár zaplatila síce nováčikovskú daň, neskúsenosťou sa pripravila o ceny, ale obaja, spolu s Horníkom a Macákom, môžu reprezentovať SR aj na budúci rok. Na výsledku družstva sa mierne podieľali aj organizátori, ktorí medzinárodnej jury predložili úlohy len zo 4 okruhov tém, (zabudlo sa na stereometriu, nerovnosti, polynómy,…) a aj tým, že termín MMO kolidoval s termínom Medzinárodnej fyzikálnej olympiády v Pekingu, a tak sa v Hong Kongu nemohol objaviť nielen víťaz III. kola olympiády, ale na výberovom sústredení chýbali aj ďalší víťazi tohto kola. Napriek všetkému však zisk prvej a druhej ceny sú nepochybne úspechom, a preto možno hodnotiť našu účasť pozitívne.

Olympiáda plní okrem súťažnej stránky aj spoločenskú funkciu. Stretávajú sa tam mladí ľudia z celého sveta, z mnohých z nich sa stanú špičkoví vedci (ceny súťažiacim napr. odovzdával nositeľ Nobelovej ceny za fyziku), žiaci majú možnosť spoznať inú krajinu, inú kultúru, nadviazať priateľstvá; učí k znášanlivosti. Zároveň však poskytuje možnosť porozprávať čo to o Slovensku, mnohým prítomným totiž slovo„Slovakia“nič nehovorilo.

Nakoniec ešte niekoľko slov o samotnom Hong Kongu. Na asi 1000 štvorcových kilometroch tam žije 6 miliónov ľudí. Obytné domy sú 30 poschodové a sú blízko vedľa seba, naše sídliska by tam boli, čo sa voľného priestoru týka, priam prepychové štvrte. Je to krajina veľkých kontrastov medzi bohatými a chudobnými. Na jednej strane architektonicky aj priestorove veľkoryso vybudovaná nová technická univerzita, na druhej strane chudobné štvrte so schátralými domami. Hong Kongské letisko s mimoriadne veľkou premávkou – v exponovaných časoch každých 90 sekúnd pristáva jedno lietadlo – je zasadené priamo v malebnej scenérii mrakodrapov a rušných ulíc; významný prístav, množstvo bánk, obchodov s európskym tovarom.

Naša predstava, že anglicky tam hovorí skoro každý sa veľmi rýchlo rozplynula: 98% obyvateľstva tvoria Číňania, v lepšom prípade nájdete na obchode aj anglický nápis. Pripojenie Hong Kongu k Číne v roku 1997 sa preto pociťuje ako čosi„prirodzené“. Zvyky aj kultúrne tradície sú čínske. Neuveriteľne dlhé stolovania s množstvom chodov (12), tradícia, prikazujúca poslušnosť a nie demokratické rozhodovanie, usporiadanie rodiny, kde hlavné slovo má muž.

Je dobré, že niekoľko mladých ľudí videlo kus sveta, mali možnosť porovnať svoje vedomosti a schopnosti, účasť na medzinárodných olympiádach je motivujúca pre prácu na sebe aj pre mnohých ďalších.

Nasledujúca MMO sa bude konať v Toronte v Kanade, IMO'96 zas organizuje India, potom Argentína, Kórea a v Rumunsku sa uskutoční jej jubilejný už 40. ročník.

Zadania úloh MMO

V zátvorke za úlohou je vždy uvedená krajina,
ktorá úlohu navrhla.

Úloha č.1

Nech m a n sú prirodzené čísla a nech $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sú také rôzne prvky množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, že ak $a_i + a_j \leqq n$ pre nejaké i, j, $1 \leqq i \leqq j \leqq m$, tak existuje také k, $1 \leqq k \leqq m$, pre ktoré $a_i + a_j = a_k$ Dokážte, že platí:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqq \frac{n+1}{2}.$$

(Francúzsko)

Úloha č.2

Daný je rovnoramenný trojuholník ABC, v ktorom $|AB| = |AC|$. Ďalej nech

(a) M je stred úsečky BC a O je taký bod priamky AM, že OB a AB sú navzájom kolmé;

(b) Q je ľubovoľný bod úsečky BC rôzny od B a C;

(c) E leží na priamke AB a F na priamke AC, pričom body E, Q, F sú rôzne a ležia na jednej priamke.

Dokážte, že $OQ \perp EF$ vtedy a len vtedy, keď $|QE| = |QF|$.

(Arménsko - Austrália)

Úloha č.3

Pre ľubovoľné celé kladné číslo k označme $f(k)$ počet všetkých tých prvkov množiny $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$, ktorých zápis v dvojkovej sústave obsahuje práve tri jednotky.

a) Dokážte, že pre každé celé kladné číslo m existuje aspoň jedno také celé kladné číslo k, že $f(k) = m$.

b) Určte všetky celé kladné čísla m, pre ktoré existuje práve jedno celé číslo k, také že $f(k) = m$.

(Rumunsko)

Úloha č.4

Určte všetky usporiadané dvojice (m, n) kladných celých čísel, pre ktoré je číslo

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

celé.

(Austrália)

Úloha č.5

Nech S je množina všetkých reálnych čísel väčších ako -1. Nájdite všetky funkcie $f : S \to S$, ktoré spĺňajú obe nasledujúce podmienky:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ pre všetky $x, y \in S$;

(ii) funkcia $\dfrac{f(x)}{x}$ je rastúca na každom z intervalov $-1 < x < 0$ a $0 < x$.

(Veľká Británia)

Úloha č.6

Ukážte, že existuje množina A celých kladných čísel s nasledujúcou vlastnosťou: Pre ľubovolnú nekonečnú množinu prvočísel S existuje $k \geqq 2$ prirodzené číslo a dve kladné celé čísla $m \in A$, $n \notin A$, ktoré sú súčinom k rôznych prvkov množiny S.

(Fínsko)

Riešenia úloh MMO

Úloha č.1

Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$. Najprv dokážme, že $a_i + a_{m+1-i} \geqq n+1$ pre $1 \leqq i \leqq m$. Ak by totiž pre nejaké i platilo $a_i + a_{m+1-i} \leqq n$, potom $a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \ldots < a_i + a_{m+1-i} \leqq n$. Keďže však $a_i + a_m = a_{k_1}$, $a_i + a_{m-1} = a_{k_2}, \ldots, a_i + a_{m+1-i} = a_{k_i}$, kde $1 \leqq k_i < k_{i-1} < \ldots < k_1 < i$, máme i rôznych prirodzených čísel menších ako i. To je však nemožné. Preto naozaj platí $a_i + a_{m+1-i} \geqq n+1$ pre $1 \leqq i \leqq m$.

Sčítaním nerovníc dostávame:

$$\begin{aligned}2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m_1}) + \ldots + (a_m + a_1)\\ &\geqq m(n+1),\end{aligned}$$

alebo

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqq \frac{n+1}{2}.$$

Úloha č.2

Riešenie podľa M. Niepla.
Rozdeľme si úlohu na dve časti. Najprv ukážeme, že ak $OQ \perp EF$, potom platí $|QE| = |QF|$. Podľa predpokladu platí $|\measuredangle EQO| = \frac{\pi}{2}$ a zo zadania $|\measuredangle EBO| = \frac{\pi}{2}$. Preto body E, B, O, Q ležia na kružnici nad priemerom EO. Obdobnou úvahou dostávame, že aj body O, Q, C, F ležia na kružnici. Z vety o stredovom a obvodovom uhle plynie : $|\measuredangle OBQ| = |\measuredangle OEQ|$ a $|\measuredangle OCQ| = |\measuredangle OFQ|$. Nakoľko bod O leží na AM, osi úsečky BC, musí platiť $|\measuredangle OBM| = |\measuredangle OCM|$, a teda aj

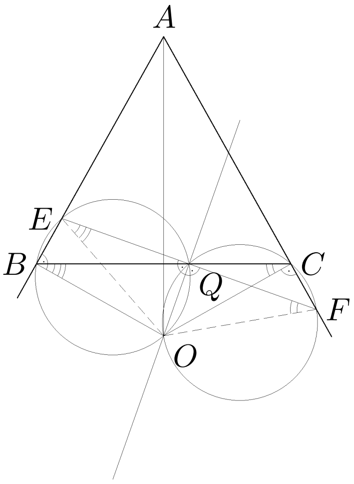
$$|\measuredangle OBQ| = |\measuredangle OEQ| = |\measuredangle OCQ| = |\measuredangle OFQ|.$$

Z toho už vyplýva, že trojuholníky $\triangle OFQ$ a $\triangle OEQ$ sú zhodné. (Majú zhodné dva uhly a jednu stranu.) Teda $|QE| = |QF|$.

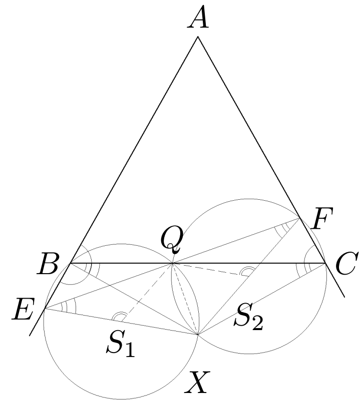
Teraz v druhej časti ukážme, že ak $|QE| = |QF|$, potom $OQ \perp EF$. Majme trojuholník ABC a body E, Q, F tak, že platí $|QE| = |QF|$. Opíšme kružnice trojuholníkom EBQ, FQC. Priesečník týchto kružníc označme X. Nakoľko je $\triangle ABC$ rovnoramenný, platí $|\measuredangle ABQ| = |\measuredangle ACQ|$, a teda ak označíme $|\measuredangle ACQ| = \alpha$, potom $|\measuredangle EBQ| = \pi - \alpha$. Z toho vyplýva, že stredové uhly sú rovné $|\measuredangle ES_1Q| = |\measuredangle FS_2Q| = 2\alpha$. Nakoľko $|QE| = |QF|$, sú aj polomery týchto kružníc rovnaké (trojuholníky ES_1Q, FS_2Q sú zhodné). Odtiaľ vyplýva, že tetivy prislúchajúce obom obvodovým uhlom v kružniciach majú rovnakú dĺžku, a teda $|\measuredangle QEX| = |\measuredangle QFX| = |\measuredangle QCX| = |\measuredangle QBX| = \beta$. Potom trojuholník EFX je rovnoramenný a QX je ťažnica i výška tohto trojuholníka zároveň. Teda $QX \perp EF$. Potom platí aj

$$|\measuredangle EQX| = |\measuredangle EBX| = |\measuredangle FQX| = |\measuredangle FCX| = \frac{\pi}{2},$$

teda bod X leží na osi BC a $X \equiv O$. Tým sme ukázali, že $|QE| = |QF|$ práve vtedy, keď $OQ \perp EF$.



Obr. 1



Obr. 2

Ak ABC je trojuholník a $E \neq B, F \neq C$, kružnice prechádzajúce bodmi E, B, Q a F, C, Q majú dva spoločné body t.j. nedotýkajú sa.

Iné riešenie. Podľa P. Macáka. (Uvádzame len dôkaz druhej implikácie, prvá bola dokázaná podobne ako v predchádzajúcom riešení.)
Pre ľubovoľný bod Q na úsečke BC existuje jediná priamka prechádzajúca bodom Q, ktorá je kolmá na OQ. Pre $Q \not\equiv B$ má práve jeden priesečník s priamkou AB. Z toho vyplýva, že na priamke AB existuje jediný bod E_1, pre ktorý je $E_1Q \perp OQ$.

Označme E_2 priesečník priamky AB s priamkou stredovo súmernou s priamkou AC podľa stredu súmernosti Q. Takýto bod E_2 je tiež vždy práve jeden.

Pre príslušný bod F_2 na priamke AC zrejme platí $|E_2Q| = |F_2Q|$, z čoho vyplýva, že $E_2F_2 \perp OQ$. Pretože existuje iba jeden bod na priamke AB, pre ktorý je $E_1Q \perp OQ$, tak musí platiť $E_1 \equiv E_2$. Z toho vyplýva, že $EF \perp OQ \iff |EQ| = |FQ|$.

Úloha č.3

(a) Označme B_k podmnožinu množiny $1, 2, \dots, k$ obsahujúcu všetky prvky, ktorých dvojkový zápis obsahuje práve 3 jednotky. Nech $g(k)$ označuje počet prvkov množiny B_k. Funkcie $f(k)$, $g(k)$ sú očividne neklesajúce a platí $f(2k) = g(2k) - g(k)$. Odtiaľ

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= g(2k+2) - g(k+10 - (g(2k) - g(k)) \\ &= g(2k+2) - g(2k) - (g(k+1) - g(k)). \end{aligned}$$

Lenže buď platí $2k + 2 \in B_{2k+2}$ a $k + 1 \in B_{k+1}$ zároveň, alebo neplatí ani jedno z nich. (Čísla $k + 1$ a $2k + 2$ majú v dvojkovom zápise rovnaký počet jednotiek.) Z toho vyplýva, že $f(k + 1) - f(k) = 1$ alebo 0, čo závisí od toho, či $2k + 1$ patrí B_{k+1} alebo nie. V každom prípade teda funkcia $f(k)$ nepreskočí žiadne prirodzené číslo. Ešte si všimnime, že $g(2^n) = g(2^n - 1) = \binom{n}{3}$, potom $f(2^n) = g(2^{n+1}) - - g(2^n) = \binom{n+1}{3} - \binom{n}{3} = \binom{n}{2}$. Z týchto dôvodov nie je $f(k)$ zhora ohraničená, a preto oborom hodnôt $f(x)$ je množina všetkých nezáporných celých čísel. Preto má rovnica $f(k) = m$ aspoň jedno riešenie pre každé prirodzené m.

(b) Predpokladajme, že rovnica $f(k) = m$ má jediné riešenie. Potom $f(k+1) - f(k) = 1 = f(k) - f(k-1)$. Prvé tvrdenie platí práve vtedy, ak $2k+1 \in B_{2k+2}$, čo znamená, že k obsahuje v dvojkovom zápise práve 2 jednotky. To isté musí platiť pre $k-1$. To je však možné vtedy a len vtedy, keď posledná cifra dvojkového zápisu čísla $k-1$ je 1, predposledná je rovná 0 a obsahuje ešte práve jednu jednotku. Inými slovami, $k = 2^n + 2$, pre nejaké $n \geqq 2$. Potom

$$\begin{aligned} f(2^n+2) &= g(2^{n+1}+4) - g(2^n+2) \\ &= 1 + g(2^{n+1}) - g(2^n) \\ &= 1 + \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že množina prirodzených čísel, pre ktoré má rovnica $f(k) = m$ práve jedno riešenie je množina čísel $\left\{1 + \binom{n}{2},\ n \geqq 2\right\}$.

Úloha č.4

Všimnime si, že $mn-1$ a m^3 sú nesúdeliteľné. Potom je zrejme $mn-1|n^3+1$ ekvivalentné $mn-1|m^3(n^3+1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1$, čo je ekvivalentné s $mn-1|m^3+1$. Ak $m = n$ dostávame $\frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$. Toto číslo je celé práve vtedy, keď $n = 2$. Teraz už môžme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $m > n$. Ak $n = 1$, musí byť $\frac{2}{m-1}$ celé. To je len pre $m = 2$ alebo 3. Teraz môžme predpokladať, že $n \geqq 2$. Avšak $n^3+1 \equiv 1 \pmod n$, zatiaľ čo $mn-1 \equiv -1 \pmod n$. Preto musí platiť $\frac{n^3+1}{mn-1} = kn-1$ pre vhodné celé k. Ale $kn-1 < \frac{n^3+1}{n^2-1} = n + \frac{1}{n-1}$, čo znamená, že $(k-1)n < 1 + \frac{1}{n-1}$. Odtiaľ vyplýva, že $k = 1$, a teda $n^3+1 = (mn-1)(n-1)$. Z toho ďalej $m = \frac{n^2+1}{n-1} = n+1+\frac{2}{n-1}$, čo je celé len pre $n = 2$ alebo 3. V oboch prípadoch vychádza $m = 5$. Nakoniec teda dostávame 9 riešení $(2,2), (2,1), (3,1), (5,2), (5,3), (1,2), (1,3), (2,5)$ a $(3,5)$, posledné štyri sme získali zo symetrie medzi m, n.

Úloha č.5

Z poslednej podmienky v zadaní plynie, že rovnica $f(x) = x$ má nanajvýš 3 riešenia, jedno na intervale $(-1,0)$, jedno rovné 0 a jedno na intervale $(0,\infty)$. Dokážme sporom, že rovnica nemôže mať ani na intervale $(-1,0)$, ani na $(0,\infty)$ riešenie. Ak by existovalo také u z intervalu $(-1,0)$, že $f(u) = u$, položme $x = y = u$ do danej funkcionálnej rovnice. Dostávame $f(u^2+2u) = u^2+2u$. Číslo u^2+2u je však tiež z intervalu $(-1,0)$, a preto $u^2+2u = u$. Ale žiadne z riešení tejto rovnice nie je z intervalu (-1,0). Ak hľadáme v, $v \in (0,\infty)$, ktoré tiež rieši rovnicu $f(v) = v$, dostávame podobný spor. Preto jediné riešenie rovnice $f(x) = x$ je $x = 0$. Avšak platí

$$f(x + (x+1)f(x)) = x + (1+x)f(x)$$

pre všetky $x \in S$. Preto musí platiť $x + (1+x)f(x) = 0$, z čoho vyplýva $f(x) = -\frac{x}{x+1}$. Ešte overíme skúškou, že táto funkcia vyhovuje zadaným podmienkam. Funkcia $f(x)/x = -\frac{1}{x+1}$ je evidentne rastúca na S. Pre všetky $x, y \in S$ platí:

$$y + (1+y)f(x) = y - \frac{x(1+y)}{x+1} = \frac{y-x}{x+1}$$

a

$$f(x+(1+x)f(y)) = f\left(\frac{x-y}{y+1}\right) = -\frac{\left(\dfrac{x-y}{y+1}\right)}{1+\dfrac{x-y}{y+1}} = \frac{y-x}{x+1}.$$

Úloha č.6

Nech A je množina všetkých prirodzených čísel tvaru $k = q_1 q_2 \dots q_{q_1}$, kde $q_1 < < q_2 < \dots < q_{q_1}$ sú prvočísla. Inými slovami:

$$A = \{2\times 3, 2\times 5, 2\times 7, \dots\} \cup \{3\times 5\times 7, 3\times 5\times 11, \dots\} \cup \\ \cup \{5\times 7\times 11\times 13\times 17, \dots\} \cup \dots$$

Ľahko sa presvedčíme, že pre ľubovoľnú nekonečnú množinu prvočísel $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, kde $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$, spĺna množina A podmienky úlohy. Stačí zvoliť $m = p_1 p_2 \dots p_{p_1}$ a $n = p_2 p_3 \dots p_{p_1+1}$.

Iné riešenie. Podľa A.Zlatoša.
Vytvorme množinu A nasledovne: Pre každé prirodzené $k \geqq 2$ zaradíme do A práve tie prirodzené čísla m, pre ktoré $m = p_1 p_2 \dots p_k$, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ je k navzájom rôznych prvočísel, ktorých súčet je deliteľný k. Potom pre ľubovoľnú nekonečnú množinu prvočísel S a pre všetky $k \geqq 2$ platí: z nekončnosti S vyplýva, že v nej existuje k prvočísel s rovnakým zvyškom po delení k. Označme ich $p_1, p_2, \dots, p_k$. Zrejme potom $k | p_1 + p_2 + \dots + p_k$, a preto $m = p_1 p_2 \dots p_k \in A$. Ak by v S existovalo prvočíslo p_{k+1} také, že jeho zvyšok po delení k je iný ako zvyšky $p_1, p_2, \dots, p_k$, tak potom by $p_1 + p_2 + + \dots + p_{k-1} + p_{k+1}$ nebolo deliteľné k, a teda číslo $n = p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_{k+1}$ by nepatrilo do A. V takom prípade by čísla k, m, n vyhovovali podmienkam a A by bola hľadanou množinou. Lenže také prirodzené k existuje. Dokážeme to sporom. Keby neexistovalo, museli by všetky prvočísla v S mať rovnaký zvyšok po delení k, a to pre všetky $k \geqq 2$. Nech p, q sú ľubovoľné dva rôzne prvky z S. Keďže p dáva po delení číslom p zvyšok 0, musí aj q dávať zvyšok 0, ale p, q boli rôzne prvočísla, preto nemôže platiť $p|q$. To je spor s predpokladom, lebo hľadané k stačí zvoliť rovné p. Potom pre nami zvolenú množinu A a ľubovoľnú nekonečnú množinu prvočísel existuje príslušné k také, že existujú prvky $m \in A$ a $n \notin A$, ktoré sú súčinom rôznych k prvkov z S.

Šiesta medzinárodná olympiáda v informatike

Šiesta medzinárodná olympiáda v informatike IOI'94 (International Olympiad in Informatics) sa konala v dňoch 3.-10.7.1994 v meste Haninge neďaleko hlavného mesta Švédska Stockholmu. Na olympiáde sa zúčastnilo celkom 189 súťažiacich (z toho 6 dievčat) z 49 krajín.

Medzinárodná olympiáda v informatike je organizovaná podobne ako medzinárodná matematická olympiáda a iné medzinárodné predmetové olympiády stredoškolákov. Je vyhlásená ako súťaž jednotlivcov, každá krajina na ňu môže vyslať delegáciu tvorenú dvoma vedúcimi a nanajvýš štyrmi súťažiacimi. Vedúci delegácie sa automaticky stáva členom medzinárodnej jury, jeho zástupca sa počas súťaže stará o súťažné družstvo. Súťažiacimi sú študenti stredných škôl, prípadne čerství absolventi v príslušnom školskom roku, vo veku do 19 rokov. Súťaž je riadená medzinárodným výborom IOI a je usporiadaná pod patronátom UNESCO.

Naši súťažiaci sa zúčastnili vštkých predchádzajúcich ročníkov súťaže a vždy dosiahli veľmi dobré výsledky. Spoločné československé družstvo nás reprezentovalo na prvých štyroch ročníkoch IOI v rokoch 1989-92, vlani bolo na IOI'93 v Argentíne poprvýkrát samostatné slovenské družstvo.

Slovenské družstvo na IOI'94 odcestovalo v tomto zložení: Tomáš Vinař, absolvent Gymnázia v Košiciach, Bronislava Brejová a Martin Makúch z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave a Peter Žuffa z Gymnázia na Grösslingovej ulici v Bratislave. Vedúcimi boli RNDr. Juraj Balázs z Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach a RNDr. Ondrej Demáček z GJH v Bratislave.

Vlastná súťaž bola už tradične sústredená do dvoch dní. Každý súťažný deň boli študentom zadané na riešenie tri úlohy. Súťažné úlohy boli vyberané vždy v deň ich riešenia medzinárodnou porotou zloženou z vedúcich delegácií všetkych zúčastnených krajín. Súťažiaci pracovali samostatne pri pridelených osobných počítačoch typu PC 486. Každý súťažný deň mali na prácu 5 hodín čistého času. Výsledné programy potom boli za prítomnosti študenta a vedúceho delegácie testované koordinátormi. Tohto roku boli poprvýkrát využité na automatické testovanie a hodnotenie študentských programov testovacie a vyhodnocovacie programy pripravené vopred organizátormi súťaže. Na základe výsledkov týchto testov boli riešenia úloh obodované. Každý deň mohol súťažiaci získať maximálne 100 bodov. Celkové výsledky boli ustanovené na základe súčtu bodového zisku z oboch súťažných dní.

Prvných 101 súťažiacich z prítomných 189 bolo ocenených niektorou z medailí. Celkovo bolo udelených 16 zlatých (za bodový zisk 195-148 bodov), 34 strieborných (za 145-96 bodov) a 51 bronzových medailí (za 95-65 bodov). Naši študenti naviazali na vynikajúce výsledky z minulých rokov a opäť všetci získali jednu z medailí. Tomáš Vinař zlatú (155b), Martin Makúch striebornú (117b), Peter Žuffa striebornú (101b) a Broňa Brejová bronzovú (80b). Presné výsedky sa môžete dozvedieť z tabuľky.

Okrem vlastnej súťaže pripravili organizátori pre všetkých účastníkov bohatý sprievodný program. K najzaujímavejším akciám patrila vyhliadková plavba loďou Stockholmom, prehliadka historickej lode – múzea Vasa a celodenný výlet parníkom na ostrov Utö. Celá olympiáda bola švédskymi organizátormi veľmi starostlivo pripravená, počínajúc jej slávnostným otvorením vo výukovom stredisku stockholmskej university Riksäpplet a končiac slávnostným odovzdávaním medailí víťazom súťaže na stockholmskej radnici v sále, v kterej sa každoročne odovzdávajú Nobelove ceny.

Nasledujúca, v poradí siedma medzinárodná olympiáda v informatike sa bude konať v dňoch 26.6.-3.7.1995 v Holandsku v meste Eindhoven. Prítomní zástupcovia organizátorov nasledujúceho ročníka IOI pozvali na túto olympiádu všetky krajiny, ktoré sa zúčastnili na jej šiestom ročníku. Usporiadatelia počítajú s rozšírením počtu členov súťažných družstiev na päť študentov a dvoch vedúcich. Podmienkou účasti piateho súťažiaceho je nominácia aspoň jedného dievčaťa do družstva. Ďalšie ročníky IOI usporiadajú postupne Maďarsko v roku 1996, Juhoafrická republika v roku 1997, Portugalsko v roku 1998, Turecko v roku 1999, Čína v roku 2000, USA, Thajsko alebo Írsko v roku 2001 a Kórea v roku 2002. Najbližší ročník stredoeurópskej regionálnej olympiády v informatike usporiada v máji 1995 Maďarsko.

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Tomáš Vinař	30	30	40	30	10	15	155	1.
Martin Makúch	30	30	40	12	5	0	117	2.
Peter Žuffa	30	30	0	6	5	30	101	2.
Bronislava Brejová	10	30	0	30	10	0	80	3.

Zadania úloh MOI

Úloha č.1

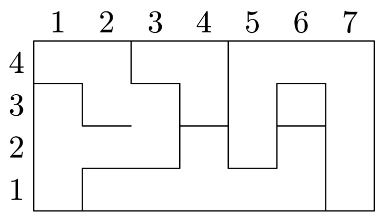
Na vstupe je daný číselný trojuholník, kde sú postupne v riadkoch umiestnené jedno, dve, tri, štyri až N čísel. Napíšte program, ktorý vypočíta najväčší súčet čísel na ceste začínajúcej v hornom vrchole trojuholníka a končiacej niekde na základni.

- Každý krok smeruje po uhlopriečke vľavo dole alebo vpravo dole.
- Počet riadkov trojuholníka je väčší ako 1 ale menší alebo rovný 100.
- Čísla v trojuholníku sú všetky celé a z intervalu $\langle 0, 99 \rangle$.

Vstupné údaje. Zo súboru INPUT.TXT sa najskôr načíta počet riadkov trojuholníka, a potom postupne riadky trojuholníka.

Výstupné údaje. Najväčší súčet napíšte ako celé číslo do súboru OUTPUT.TXT.

Úloha č.2



Obr. 1

Na obr. 1 je mapa zámku. Napíšte program, ktorý vypočíta:

1) koľko miestností má zámok,

2) veľkosť najväčšej miestnosti,

3) ktorú stenu máme odstrániť, aby vznikla miestnosť s čo najväčšou plochou. Zámok je rozdelený na $m.n$, ($m \leqq 50$, $n \leqq 50$) štvorcových buniek. Každá z týchto buniek má 0 až 4 steny.

Vstupné údaje. Mapa je uložená v súbore INPUT.TXT vo forme čísel, jedno pre každú štvorcovú bunku.

- Na začiatku je počet buniek v smere severo-južnom a počet buniek v smere východo-západnom.

- Na nasledujúcich riadkoch sú čísla ($0 \leqq p \leqq 15$) popisujúce jednotlivé bunky. Toto číslo p je súčtom kódov stien ohraničujúcich bunku: 1 (= západná stena), 2 (= severná stena), 4 (= východná stena), 8 (= južná stena). Vnútorné steny sú vlastne popísané dvakrát. Napr. južná stena bunky $1, 1$ je tiež vyznačená ako severná stena bunky $2, 1$.

- Zámok má vždy aspoň dve miestnosti.

Výstupné údaje. Do výstupného súboru OUTPUT.TXT napíšte tri riadky: V prvom je počet miestností. V druhom je plocha najväčšej miestnosti (ako počet štvorcových buniek) a v treťom je návrh, ktorú stenu odstrániť (najskôr riadok a stĺpec susediacej bunky a potom smer – pomocou anglickej skratky svetovej strany (N,E,S,W), ktorý ukazuje na odstraňovanú stenu).

(Ak existuje viacero možností, napíšte iba jednu.)

Úloha č.3

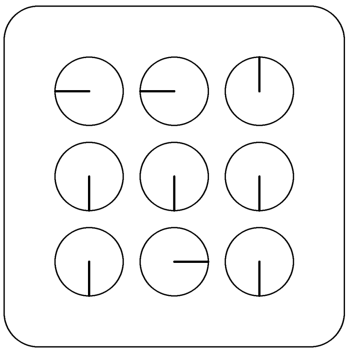
Ako vstupné údaje je daný číselný štvorec 5×5. Každý riadok, každý stĺpec a obidve uhlopriečky predstavujú päťmiestne prvočíslo. Riadky čítame zľava doprava a stĺpce zhora nadol. Obidve uhlopriečky čítame zľava doprava. Použijúc údaje zo súboru INPUT.TXT napíšte program na vytváranie takýchto štvorcov.

- Prvočísla majú rovnaký súčet cifier (v našom príklade 11).
- Cifra v ľavom hornom rohu je zadaná (v našom príklade 1).
- Jedno prvočíslo sa môže v štvorci vyskytovať aj viackrát.
- Treba uviesť všetky riešenia.
- Päťmiestne prvočíslo nemôže začínať nulou, t.j. 00003 nie je päťmiestne prvočíslo.

Vstupné údaje. Program číta údaje zo súboru INPUT.TXT. Najskôr je tam ciferný súčet prvočísel a potom cifra v ľavom hornom rohu štvorca. Súbor má dva riadky. Môžte predpokladať, že každý test má riešenie.

Výstupné údaje. Do výstupného súboru OUTPUT.TXT zapíšte 5 riadkov pre každé riešenie, každý riadok bude päťmiestne prvočíslo.

Úloha č.4



Obr. 2

Na obr. 2 je deväť ciferníkov hodín usporiadaných v tvare tabuľky 3×3. Cieľom je, aby všetky ukazovali 12 hodín. Máte 9 dovolených spôsobov (budeme ich nazývať ťahmi) na zmenu nastavenia polohy ručičiek. V každom kroku si zvolíte ťah určený číslom 1 až 9. Ak si ciferníky po riadkoch zľava doprava označíme a,b,c,d,e,f,g,h,i, potom ťahom 1 až 9 priradíme tieto otočenia:

$1: a, b, d, e$	$2: a, b, c$	$3: b, c, f, g$
$4: a, d, h$	$5: b, d, e, f, h$	$6: c, f, i$
$7: d, e, g, h$	$8: g, h, i$	$9: e, f, h, i$

Podľa takto zvoleného čísla pootočíte o 90 stupňov (v smere hodinových ručičiek) ručičky tých ciferníkov, ktoré sú označené.

Vstupné údaje. Zo súboru INPUT.TXT prečítajte 9 čísel. Tieto čísla udávajú východiskovú pozíciu na ciferníkoch: 0 znamená 12 hodín, 1 znamená 3 hodiny, 2 znamená 6 hodín a 3 znamená 9 hodín.

Výstupné údaje. Do výstupného súboru OUTPUT.TXT napíšte nejakú najkratšiu postupnosť ťahov, ktorá nastaví všetky ciferníky na 12 hodín. Ak má úloha viac riešení, vypíšte iba jedno z nich.

Úloha č.5

Muž príde na autobusovú zastávku o 12:00 a ostane tam od 12:00 do 12:59. Na zastávku prichádzajú rôzne autobusové linky. Muž zaznamenáva príchody autobusov. Tieto časy príchodov sú vstupnými údajmi a platia pre ne nasledujúce podmienky:

- autobusy každej linky prichádzajú v pravidelných intervaloch od 12:00 do 12:59 počas celej hodiny,
- časy príchodov sú dané v celých minútach od 0 do 59 (vrátane),
- každá autobusová linka zastavuje aspoň dvakrát,
- počet autobusových liniek v testovacích príkladoch bude menší alebo rovný 17,
- autobusy rôznych liniek, môžu prísť v rovnakom čase,
- niekoľko autobusových liniek môže mať ten istý čas prvého príchodu alebo interval. Ak dve autobusové linky majú ten istý čas prvého príchodu a interval, považujte ich za rôzne a obe uveďte v riešení.

Napíšte program, ktorý zistí najmenší možný počet autobusových liniek, ktoré zastavujú na zastávke, a pre každú autobusovú linku vypíše prvý čas a interval.

Vstupné údaje. Vstupný súbor INPUT.TXT obsahuje číslo n ($n \leqq 300$), ktoré udáva počet zaznamenaných príchodov. Za ním nasleduje riadok s časmi príchodov uvedenými vo vzostupnom poradí.

Výstupné údaje. Do súboru OUTPUT.TXT napíšte tabuľku s jedným riadkom pre každú autobusovú linku. Každý riadok udáva čas prvého príchodu a časový interval v minútach. Na poradí liniek nezáleží. Ak existuje viac riešení, uveďte iba jedno.

Úloha č.6

Máte kruh rozdelený do sektorov. Dané sú tri čísla: n ($n \leqq 6$), m ($m \leqq 20$) a k ($k \leqq$ $\leqq 20$), kde n je počet sektorov. Napíšte program, ktorý vyberie a umiestni celé čísla do každého sektora; tieto čísla majú byť väčšie alebo rovné k. Po naplnení sektorov môžete vytvárať nové čísla použitím čísiel z jedného sektora alebo sčítaním čísiel z dvoch alebo viacerých susedných sektorov. Z novovytvorených čísiel máte vytvoriť súvislú postupnosť všetkých celých čísiel medzi m a i (t.j. $m, m+1, m+2, \dots, i$). Úlohou programu je vybrať čísla do sektorov tak, aby najväčšie číslo postupnosti (i) bolo najväčšie možné.

Vstupné údaje. Vstupný súbor INPUT.TXT obsahuje 3 celé čísla (n, m, k).

Výstupné údaje. Výstupný súbor OUTPUT.TXT musí obsahovať:

- najväčšie číslo v postupnosti (i), ktoré môže byť vygenerované,
- všetky usporiadania čísiel do kruhových sektorov, ktoré vytvárajú postupnosť od m do i (do každého riadku jedno). Usporiadanie čísiel zapíšte ako zoznam začínajúci najmenším číslom (ktoré nemusí byť iba jedno).

Uvedomte si, že ak by (1123) bolo riešením, musíte vypísať aj zoznamy (1321), (1231) a (1132).

Obsah

RNDr. Ondrej Demáček – RNDr. Karel Horák, CSc. –
Richard Kollár – Jana Višňovská

Štyridsiatytretí ročník matematickej olympiády na stredných školách

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v roku 1994.
Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár.
Obálku navrhol Michal Skála.
Vytlačilo Edičné centrum MFF UK, Mlynská dolina, Bratislava.
1.vydanie

NEPREDAJNÉ