45. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1995/1996

37. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
8. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

JEDNOTA SLOVENSKÝCH MATEMATIKOV A FYZIKOV

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská,
Tomáš Vinař, Bronislava Brejová a členovia Úlohovej komisie MO.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ISBN 80–967454–3–3

O priebehu 45. ročníka matematickej olympiády

Súťaž s názvom Matematická olympiáda usporadúva pre žiakov stredných a základných škôl Ministerstvo školstva a vedy SR v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. V jej 45. ročníku súťaž riadila Ústredná komisia matematickej olympiády (ÚK MO) prostredníctvom oblastných a okresných komisií MO.

Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. V školskom roku 1995/1996 sa uskutočnil už jej 45. ročník. Matematická olympiáda na Slovensku je nasledovníkom rovnakej súťaže v bývalom Československu a aj v tomto ročníku mala spoločné úlohy s olympiádou v Českej republike.

Ústredná komisia MO pracovala v zložení, v ktorom bola na návrh JSMF vymenovaná Ministerstvom školstva a vedy SR. Predsedom ÚK MO bol *Doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.* z MFF UK v Bratislave. Ďalšími členmi ÚK MO boli:

RNDr. Juraj Balázs, PF UPJŠ Košice,
RNDr. Andrej Blaho, MFF UK Bratislava,
RNDr. Jaroslava Brincková, UMB FHPV Banská Bystrica,
RNDr. Vladimír Burjan, Exam Bratislava,
RNDr. Milan Cirjak, Metodické centrum Prešov,
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava,
Mgr. Milan Demko, PedF UPJŠ Prešov,
Mgr. Vojtech Filín, Gymnázium Trenčín,
RNDr. Jozef Fulier, CSc., Vysoká škola pedagogická Nitra,
Vlasta Gubášová, IUVENTA Bratislava,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického Revúca,
PhDr. Oto Klosterman, MŠaV SR Bratislava,
Richard Kollár, MFF UK Bratislava,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maď. Galanta,
RNDr. Gabriela Monoszová, UMB FHPV Banská Bystrica,
Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., VŠDS Žilina,
Doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,
PhDr. Milan Ščasný, CSc., ZŠ Za kasárňou Bratislava,
RNDr. Juraj Vantuch, CSc., PedF UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

Členmi ÚK MO boli aj predsedovia oblastných komisií MO:

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., Vysoká škola pedagogická Nitra,
Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS VŠDS Žilina,
RNDr. Božena Miháliková, CSc., PF UPJŠ Košice,
RNDr. Pavol Mäsiar, Metodické centrum Bratislava.

V priebehu 45. ročníka MO sa konalo jedno plenárne zasadanie ÚK MO a štyri zasadania Predsedníctva ÚK MO. Zaoberali sa priebehom a finančným zabezpečením súťaže, organizáciou ďalších kôl, zabezpečením prípravných sústredení pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) a medzinárodnou olympiádou v informatike (MOI), prípravou súťažných úloh a zmenami v organizácii budúceho ročníka súťaže súvisiacimi aj s novým územnosprávnym rozdelením SR.

Organizácia súťaže však zostala v tomto ročníku MO úplne zachovaná. Prípravu úloh pre kategórie A, B, C zabezpečovala Úlohová komisia MO pod vedením *Doc. RNDr. Jaromíra Šimšu, CSc.* z MÚ ČAV v Brne. Na dvoch zasadaniach, ktoré sa počas roka uskutočnili v Bratislave a Jevíčku v ČR sa zúčastnilo jej 16 členov. Zo Slovenska sa na príprave súťažných úloh podieľali *RNDr. Pavol Černek, CSc.*, *Doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*, *Richard Kollár* a *RNDr. Monika Krállová.* Garantmi výberu úloh v tomto súťažnom ročníku boli

pre kategóriu A: *RNDr. Pavol Černek, CSc.*,

pre kategóriu B: *Doc. RNDr. Antonín Vrba, CSc.*,

pre kategóriu C: *RNDr. Jaroslav Zhouf.*

Za zadaním každej súťažnej úlohy je v zátvorke uvedené meno autora úlohy, príp. meno navrhovateľa.

Pre žiakov základných škôl je súťaž tradične rozdelená do piatich kategórií: Z4 – Z8, ktoré sú určené žiakom 4. až 9. ročníkov ZŠ a im odpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: A,B,C a P. Kategória A bola určená žiakom 3. a 4. ročníkov, kategória B žiakom 2. ročníkov a kategória C bola určená pre žiakov 1. ročníkov stredných škôl. Pre žiakov všetkých ročníkov bola určená kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii, ako im prislúchala. Týka sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A,B,C a P.

V kategóriách A,B,C má prvé kolo dve časti. V prvej časti súťažiaci vypracovávajú riešenia 6 úloh doma, môžu sa pritom radiť so svojimi učiteľmi, vedúcimi krúžkov a pod. Druhá časť má formu klauzúrnej práce. Žiaci riešia v obmedzenom čase 4 hodiny 3 úlohy. Úspešní riešitelia prvého kola sú pozvaní do druhého (oblastného) kola súťaže, kde riešia 4 úlohy v časovom limite 4 hodiny.

V kategóriách B,C týmto kolom súťaž končí, ale v kategóriách A a P sa koná ešte tretie (celoštátne) kolo. Tento rok doň bolo pozvaných v kategórii A 40 najlepších (zúčastnilo sa 39 študentov) a v kategórii P 25 najlepších riešiteľov z druhých kôl súťaže príslušnej kategórie podľa poradia zostaveného po koordinácii bodového hodnotenia. Vlastná súťaž je rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň 3 teoretické a druhý deň po minuloročnej premiére aj dve praktické úlohy. Novinkou v tomto ročníku MO je zavedenie praktických úloh aj do domáceho kola. Zo štyroch zadaných úloh boli dve teoretické a dve praktické, ktorých opravovanie bolo po zaslaní diskiet priamo koordinované ÚK MO. Keďže zavedenie praktickej úlohy aj do oblastného kola nemožno v najbližších rokoch z organizačných dôvodov očakávať, je táto podoba súťaže po dvoch rokoch zmien konečná. Tieto zmeny, priblíženie sa medzinárodným súťažiam, priniesli tento rok prvé ovocie v podobe úspešného vystúpenia nášho družstva na medzinárodnej olympiáde v informatike.

Celoštátne kolo 45. ročníka sa uskutočnilo v Žiline v dňoch 21. – 24. 4. (kat. A) a 25. – 28. 4. 1996 (kat. P) na SOU zdravotnom. Na zabezpečení súťaže, vrátane spoločenského programu, sa obetavo podieľali pracovníci usporiadajúcej Vysokej školy dopravy a spojov Žilina, Centra voľného času IUVENTA a pracovníci a študenti Matematicko-fyzikálnej fakulty UK v Bratislave. Avšak najväčšiu zásluhu na usporiadaní III. kola MO mimo Bratislavy mal *Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.* z VŠDS, ktorého enormné úsilie bolo korunované úspešným priebehom súťaže.

Jedenásť najúspešnejších riešiteľov III. kola MO kategórie A bolo pozvaných na výberové sústredenie pred MMO, ktoré sa konalo v dňoch 6.–11. 5. 1996 v Bratislave. Nakoľko tento rok nebolo možné zúčastniť sa okrem medzinárodnej matematickej olympiády zároveň aj medzinárodnej fyzikálnej olympiády, termíny výberových sústredení sa prekrývali a dvaja pozvaní riešitelia preto účasť na tomto sústredení odmietli. Na základe výsledkov tohto sústredenia a výsledkov tretieho a druhého kola MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo, ktoré reprezentovalo SR na MMO. Pre toto družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie, a to v dňoch 17.–21. 6. 1996 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate, a zároveň nás toto družstvo reprezentovalo aj na druhom ročníku medzinárodného stretnutia s Českou republikou, ktoré sa prvýkrát konalo na Slovensku, v Žiline. Tejto súťaži ako aj medzinárodnej matematickej olympiáde sú venované v tejto ročenke samostatné kapitoly.

Pre 12 najlepších riešiteľov kategórie P bolo organizované v dňoch 13. – 18. 5. 1996 výberové sústredenie na MFF UK v Bratislave. V rámci tohto náročného sústredenia účastníci v doobedňajších aj poobedňajších hodinách tvorili programy, ktoré ešte v ten istý deň večer spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov a výsledkov III. a II. kola ÚK MO vybrala štvorčlenné družstvo, ktoré reprezentovalo SR na medzinárodnej olympiáde z informatiky. Okrem toho, spomedzi študentov, ktorí v uplynulom školskom roku nematurovali, boli štyria najúspešnejší vybraní na tretí ročník Stredoeurópskej olympiády z informatiky. Správy z týchto medzinárodných súťaží nájdete v samostatných kapitolách tejto knihy.

Súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS), v tomto roku tradične prebiehalo niekoľko KS s celoštátnou pôsobnosťou:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),

Stredoslovenský korešpondenčný seminár (SSS),

Košický korešpondenčný seminár (STROM),

Korešpondenčný seminár z programovania (KSP).

(Kontaktné adresy na tieto korešpondenčné semináre nájdete v prílohe v závere knihy.)

Ďalej prebiehal aj druhý ročník obnoveného KS ÚK MO, ktorý je určený predovšetkým pre študentov, ktorí bojovali o účasť na MMO. Tejto súťaži je tiež venovaná samostatná kapitola.

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.	Viera Růžičková	2 V.Okružná, Žilina	7	2	7	6	6	3	31
2.	Vladimír Marko	3 J.Hronca, Bratislava	7	6	3	0	7	7	30
3.	Miroslav Dudík	3 Trebišov	7	1	7	7	7	0	29
4.–5.	Ivan Cimrák	4 V.Okružná, Žilina	7	6	2	6	2	5	28
	Eugen Kováč	4 Stropkov	7	1	0	7	6	7	28
6.	Daniel Pártoš	4 Grössling., Bratislava	7	7	0	0	7	6	27
7.	Tamás Varga	4 Komárno maď.	5	7	–	–	7	7	26
8.–11.	Štefan Godiš	4 V.Okružná, Žilina	5	5	0	7	7	0	24
	Martin Jandačka	4 J.Hronca, Bratislava	6	4	1	1	7	5	24
	Peter Kozák	1 Sučany	5	2	0	7	3	7	24
	Martin Plesch	4 J.Hronca, Bratislava	6	1	7	1	7	2	24
12.	Andrej Komora	4 Grössling., Bratislava	6	4	4	0	7	2	23
13.	Gábor Zsemlye	4 Šamorín maď.	4	2	6	7	0	2	21
14.–16.	Dušan Bezák	4 Grössling., Bratislava	7	2	1	1	6	3	20
	Ondrej Lonek	4 Grössling., Bratislava	–	2	6	6	6	0	20
	Marek Uhlíř	4 Grössling., Bratislava	7	0	4	0	7	2	20
17.–18.	Alexander Erdélyi	4 Grössling., Bratislava	7	7	3	0	1	1	19
	Ján Rusz	3 Trebišovská, Košice	7	0	2	0	7	3	19
19.	František Kardoš	2 Alejová, Košice	3	4	6	0	4	1	18
20.–23.	Štefan Gašpar	2 Púchov	6	1	0	7	3	0	17
	Stacho Mudrák	4 J.G.Taj., B.Bystrica	7	5	1	0	1	3	17
	Zuzana Rjašková	3 Vranov n. Topľou	7	1	1	7	1	0	17
	Martin Vojtek	4 Párovská, Nitra	7	3	5	1	1	0	17
24.–25.	Pavol Novotný	2 V.Okružná, Žilina	7	1	2	1	5	0	16
	Peter Svrček	2 V.Okružná, Žilina	7	3	0	0	3	3	16
26.	Peter Šurda	4 Grössling., Bratislava	6	1	1	1	6	0	15
27.–28.	Ladislav Kovár	3 Grössling., Bratislava	6	1	1	0	6	0	14
	Martin Samuelčík	3 J.G.Taj., B.Bystrica	3	0	0	6	4	1	14
29.	Henrich Datel	4 V.P.Tótha, Martin	7	0	0	0	6	0	13
30.	Ján Lipka	4 Grössling., Bratislava	7	1	1	0	0	2	11

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
31.	Jaroslav Kadubec	3 Grössling., Bratislava	2	0	2	0	6	0	10
32.	Rastislav Krivoš-Belluš	3 Poštová, Košice	5	0	2	0	1	1	9
33.–34.	Richard Hulín	4 Grössling., Bratislava	2	2	0	0	3	1	8
	Michal Májek	4 Grössling., Bratislava	1	2	2	1	0	2	8
35.	Marek Hyčko	3 J.G.Taj., B.Bystrica	1	–	2	–	3	0	6
36.	Tibor Zavadil	3 V.Okružná, Žilina	4	0	1	0	0	0	5
37.	Juraj Majerský	4 J.G.Taj., B.Bystrica	0	1	0	0	0	3	4
38.	István Jámbor	3 SPŠE Nové Zámky	2	0	0	0	1	0	3
39.	Peter Kleja	3 Senec	0	1	0	0	0	1	2

Prvých 7 súťažiacich bolo vyhlásených za víťazov a prvých 19 súťažiacich za úspešných riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie A. Na celoštátnom kole sa nezúčastnil *Pavol Černý*, 3 G J.Hronca, Bratislava. Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	Spolu	Číslo úlohy					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	44	17	3	3	7	10	4
6 bodov	24	6	2	3	4	8	1
5 bodov	10	4	2	1	0	1	2
4 body	9	2	3	2	0	2	0
3 body	17	2	2	2	0	5	6
2 body	24	3	7	7	0	1	6
1 bod	40	2	11	8	7	6	6
0 bodov	66	3	9	13	21	6	14
Priemer	2,89	5,05	2,21	2,05	2,05	3,95	2,05

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	Súčet
1.	Martin Hajduch	3 Považská Bystrica	7	6	10	9	10	42
2.	Juraj Gottweis	4 Grösslingová, Bratislava	7	9	4	10	10	40
3.	Martin Plesch	4 Novohradská, Bratislava	9	6	10	4	10	39
4.	Róbert Macho	3 Prievidza	5	7	10	5	10	37
5.	Miroslav Dudík	3 Trebišov	1	7	10	10	7	35
6.–9.	Dušan Bezák	4 Grösslingová, Bratislava	1	6	10	7	10	34
	Stanislav Funiak	3 Sučany	5	6	5	8	10	34
	Martin Jandačka	4 Novohradská, Bratislava	8	6	6	7	7	34
	Vladimír Marko	3 Novohradská, Bratislava	9	9	10	0	6	34
10.	Ivan Ströhner	4 Prievidza	8	6	8	0	5	27
11.–12.	Peter Helcmanovský	4 Poštová, Košice	6	5	1	4	10	26
	Tomáš Kaláb	4 Grösslingová, Bratislava	4	5	5	2	10	26
13.–16.	Martin Irman	4 Grösslingová, Bratislava	2	6	10	2	5	25
	Daniel Pártoš	4 Grösslingová, Bratislava	4	6	10	3	2	25
	Vladimír Scholtz	4 Novohradská, Bratislava	1	7	3	6	8	25
	Tomáš Vaško	4 Párovská, Nitra	5	5	6	5	4	25
17.	Ľubomír Nistor	4 P.Horova, Michalovce	2	5	5	8	2	22
18.	Richard Kráľovič	1 Novohradská, Bratislava	1	5	6	5	4	21
19.	Tomáš Ižo	3 Prievidza	1	6	5	3	3	18
20.	Dávid Pál	1 Novohradská, Bratislava	1	1	6	5	3	16
21.	Ján Jamrich	2 Novohradská, Bratislava	3	6	6	–	–	15
22.	Ladislav Barsi	4 Komárno maď.	1	5	5	3	0	14
23.	Zsolt Benes	2 Dunajská Streda maď.	1	4	4	3	0	12
24.	Peter Hrонček	4 Novohradská, Bratislava	0	5	4	0	2	11
25.	Tomáš Arlt	4 Komárno maď.	2	7	1	0	0	10

Prvých 5 súťažiacich bolo vyhlásených za víťazov a prvých 12 súťažiacich za úspešných riešiteľov celoštátneho kola MO kategórie P.

Výsledky oblastných kôl

Z každej oblasti a z každej z kategórii A, B, C, P a Z8 sú uvedení všetci úspešní riešitelia, príp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriach B, C, Z8, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 8. ročníkov. Gymnázia so zameraním na matematiku, študijny odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Bratislavská oblasť

Kategória A

1. *Daniel Pártoš*, 4, G Grösslingová
2.–3. *Martin Jandačka*, 4, G Novohradská
Vladimír Marko, 3, G Novohradská
4.–5. *Alexander Erdélyi*, 4, G Grösslingová
Martin Plesch, 4, G Novohradská
6. *Ján Lipka*, 4, G Grösslingová
7.–8. *Dušan Bezák*, 4, G Grösslingová
Andrej Komora, 4, G Grösslingová
9.–12. *Richard Hulín*, 4, G Grösslingová
Ladislav Kovár, 3, G Grösslingová
Michal Májek, 4, G Grösslingová
Peter Šurda, 4, G Grösslingová

Kategória B

1. *Ján Kováčik*, G Grösslingová
2. *Andrej Melocík*, G Grösslingová
3.–4. *Lukáš Medlen*, G Novohradská
Peter Šefčík, G Grösslingová

5.–6. *Vladimír Erdélyi*, G Grösslingová
Ján Jamrich, G Novohradská
7. *Ján Wall*, G Grösslingová
8.–11. *Matúš Kalaš*, G Grösslingová
Bohuslav Straka, G Grösslingová
Július Štroffek, G Grösslingová
Pavol Šupa, G Grösslingová

Kategória C

1.–4. *Kristína Černeková*, G Grösslingová
Martin Potočný, G Novohradská
Zuzana Slosarčíková, G Grösslingová
Jakub Šalamon, G Grösslingová
5.–6. *Alena Kovárová*, G Grösslingová
Richard Kraľovič, G Novohradská
7. *Juraj Olejník*, G Novohradská
8. *Katarína Vrťová*, G Novohradská
9. *Samuel Ferenčík*, G Grösslingová
10.–11. *Pavol Hanuš*, G Bílikova
Tomáš Spielböck, G Grösslingová

Kategória P

1. *Martin Irman*, 4, G Grösslingová
2. *Vladimír Marko*, 3, G Novohradská
3.–4. *Dušan Bezák*, 4, G Grösslingová
Richard Kraľovič, 1, G Novohradská
5.–6. *Juraj Gottweis*, 4, G Grösslingová
Martin Plesch, 4, G Novohradská
7. *Peter Hronček*, 4, G Novohradská
8.–10. *Ján Jamrich*, 2, G Novohradská
Martin Jandačka, 4, G Novohradská
Vladimír Scholtz, 4, G Novohradská

Kategória Z8

1. *Martin Fraas*, G Grösslingová
2.–3. *Peter Košinár*, ZŠ Bajkalská
Marek Petrík, ZŠ Strečnianska

4.–5. *Tomáš Galbavý*, G Grösslingová
Marián Potočný, ZŠ Košická
6.–8. *Dana Ježová*, ZŠ Tematínska
Jana Szolgayová, 7, G Grösslingová
Vladimír Zajac, G Grösslingová
9.–10. *Ivana Lehocká*, G Grösslingová
Michal Pokorný, 7, G Grösslingová

Západoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Tamás Varga*, 4, G Komárno maď.
2. *Martin Vojtek*, 4, G Párovská, Nitra
3.–4. *Zoltán Fazekas*, 4, G Nové Zámky
Gábor Zsemlye, 4, G Šamorín maď.
5. *Peter Kleja*, 3, G Senec
6.–9. *Tamás Diósy*, 3, SPŠ Komárno
István Jámbor, 3, SPŠE Nové Zámky
Judit Kucsera, 4, G Komárno maď.
Tamás Nagy, 4, G Komárno maď.
10. *Zuzana Kalmárová*, 3, OA Veľký Meder

Kategória B

1.–3. *Jozef Budinský*, G Šahy
Elena Čížková, G Skalica
Ján Somorčík, G Párovská, Nitra
4.–5. *Dušan Kováč*, G Piešťany
János Simon, G maď. Veľký Meder
6.–8. *Michal Bysterský*, G Piešťany
Juraj Stančík, G Levice
Michal Ulický, G Hviezdoslavova, Trnava
9.–11. *Róbert Lenčéš*, G Párovská, Nitra
Libor Marek, G Angely Merici, Trnava
Waldemar Melicher, G Párovská, Nitra

Kategória C

1. *Keve Kurucz*, 8, G Komárno maď.
2. *Peter Huszár*, G Komárno maď.
3. *Miroslav Vranka*, G Sereď
4. *Július Weissensteiner*, G Piešťany

5.–6. *Ronald Filo*, G Párovská, Nitra
Miloš Mrva, G Hviezdoslavova, Trnava
7.–8. *Peter Brnčík*, G Pezinok
Csaba Vörös, G Komárno maď.
9.–10. *Jarmila Nováková*, G Hviezdoslavova, Trnava
Pavol Orvoš, SPŠ Komárno

Kategória P

1. *Tomáš Arlt*, 4, G Komárno maď.
2. *Zsolt Benes*, 2, G Dunajská Streda maď.

3.–4. *Ladislav Barsi*, 4, G Komárno maď.
Tomáš Vaško, 4, G Párovská, Nitra
5. *Peter Novák*, 3, G Golianova, Nitra
6. *Vladislav Kurz*, 4, G J.Hollého, Trnava

Kategória Z8

1.–2. *Hana Tichá*, ZŠ Záhorácka, Malacky
Filip Vítek, ZŠ Benkova, Nitra
3.–4. *Péter Sidó*, ZŠ Holice na Ostrove
Marián Uherčík, ZŠ Tajovského, Senec
5.–6. *Katarína Sekáčová*, ZŠ Brezová, Piešťany
Miloš Šiška, ZŠ Tribečšká, Topolčany
7.–12. *Balázs Keszegh*, G Komárno maď.
Keve Kurucz, G Komárno maď.
Zuzana Kúkelová, ZŠ Krátka, Šaľa
Tomáš Macháček, ZŠ Kúty
Katarína Ozogányová, ZŠ Šamorín maď.
Jozef Ševčík, G Partizánske

Stredoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Štefan Godiš*, 4, G V.Okružná, Žilina
2. *Ivan Cimrák*, 4, G V.Okružná, Žilina
3. *Peter Kozák*, 1, G Sučany
4. *Stacho Mudrák*, 4, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

5.–6. *Pavol Novotný*, 2, G V.Okružná, Žilina
Tibor Zavadil, 3, G V.Okružná, Žilina

7.–9. *Viera Růžičková*, 2, G V.Okružná, Žilina
Martin Samuelčík, 3, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Peter Svrček, 2, G V.Okružná, Žilina

10. *Marek Hyčko*, 3, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória B

1. *Michal Závodný*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
2. *Peter Kozák*, 1, G Sučany
3. *Viera Růžičková*, G V.Okružná, Žilina
4. *Pavol Novotný*, G V.Okružná, Žilina
5. *Peter Svrček*, G V.Okružná, Žilina
6. *Vratko Polák*, G Vrútky
7. *Stanislav Funiak*, G Sučany

8.–9. *Martin Kováčik*, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica
Pavol Zajac, G Sládkovičova, Banská Bystrica

10.–11. *Ján Rys*, G Kremnica
Michal Švarc, G Čadca

Kategória C

1. *Peter Novotný*, G V.Okružná, Žilina
2. *Ivan Pilliš*, G Martin
3. *Michal Lepej*, G Vrútky
4. *Jana Hrivnáková*, G Lučenec

5.–7. *Michal Čanecký*, G V.Okružná, Žilina
Jana Pigošová, G Banská Štiavnica
Katarína Stajčanová, G J.G.Tajovského, Banská Bystrica

8.–10. *Zuzana Dzuráková*, G Prievidza
Katarína Facunová, G Sučany
Ľuboš Petian, G Lučenec

Kategória P

1.–2. *Martin Hajduch*, 3, G Považská Bystrica
Róbert Macho, 3, G Prievidza
3. *Stanislav Funiak*, 3, G Sučany
4. *Ivan Ströhner*, 4, G Prievidza
5. *Tomáš Ižo*, 3, G Prievidza
6. *Martin Kubačák*, 4, G Turzovka
7. *Jozef Mika*, 4, G V.Okružná, Žilina

Kategória Z8

1. *Ľubica Ďurišová*, ZŠ Spojová, Banská Bystrica
2. *Juraj Stacho*, ZŠ Moskovská, Žilina
3.–4. *Marián Ertl*, ZŠ S.Chalupku, Prievidza
Juraj Suchár, ZŠ Ladce
5. *Lucia Pivarčiová*, ZŠ Hliny, Žilina
6.–10. *Adriana Junová*, ZŠ J.Kráľa, Nová Dubnica
Jaroslav Šoltýs, ZŠ Čsl. brigády, Liptovský Mikuláš
Martin Troják, ZŠ Krušetnica
Milan Urdzík, ZŠ Moskovská, Žilina
Juraj Valášek, ZŠ Východná, Martin

Východoslovenská oblasť

Kategória A

1. *Eugen Kováč*, 4, G Stropkov
2. *František Kardoš*, 2, G Alejová, Košice
3. *Ján Rusz*, 3, G Trebišovská, Košice
4.-5. *Miroslav Dudík*, 3, G Trebišov
Rastislav Krivoš-Belluš, 3, G Poštová, Košice
6.–7. *Marek Revický*, 3, G Konštantínova, Prešov
Zuzana Rjašková, 3, G Vranov n. Topľou

8. *Jozef Chvál*, 4, G Poštová, Košice
9. *Peter Kolenič*, 4, G Konštantínova, Prešov
10.–16. *Peter Bohuš*, 3, G Alejová, Košice
Peter Diko, 4, G Alejová, Košice
Jozef Haleš, 4, G Alejová, Košice
Martin Jenčák, 3, G Popradské nábr., Poprad
Marián Jurášek, 4, G Konštantínova, Prešov
Slavo Kovaľ, 3, G Konštantínova, Prešov
Miroslav Maruščák, 4, G Stropkov

Kategória B

1.–2. *Peter Bodík*, G Poštová, Košice
Peter Tajat, G Popradské nábr., Poprad
3. *Ján Špakula*, G Poštová, Košice
4.–6. *Daniel Bartovič*, G D.Tatarku, Poprad
Miroslav Kladiva, G Poštová, Košice
Martin Tamáš, G Jiráskova, Bardejov
7.–9. *Michal Kolcun*, G Alejová, Košice
Ján Poloha, SPŠE Prešov
Róbert Schreter, G Popradské nábr., Poprad
10.–11. *František Kardoš*, G Alejová, Košice
Renáta Kotorová, G Michalovce

Kategória C

1.–2. *Martin Hriňák*, G Alejová, Košice
Ján Senko, SPŠE Košice
3.–4. *Michal Foríšek*, G Popradské nábr., Poprad
Zuzana Petríková, G Konštantínova, Prešov
5.–6. *Peter Mihók*, G Alejová, Košice
Martin Lang, G Popradské nábr., Poprad
7.–9. *Petra Fencíková*, G Alejová, Košice
Jozef Miškuf, G Poštová, Košice
Eduard Seman, G Michalovce
10.–11. *Ján Ďurovec*, G Poštová, Košice
Vladimír Lakatoš, G Michalovce

Kategória P

1. *Miroslav Dudík*, 3, G Trebišov
2.–3. *Peter Helcmanovský*, 4, G Poštová, Košice
Ľubomír Nistor, 4, G Michalovce
4.–5. *Peter Bodík*, 2, G Poštová, Košice
Ján Svoreň, 3, G D.Tatarku, Poprad
6.–7. *Tomáš Begala*, 3, G Moldava n. Bodvou
Peter Kehl, 4, G J.A.Raymana, Prešov

Kategória Z8

1.–2. *Juraj Laca*, ZŠ 8.mája, Svidník
Daniela Macurová, ZŠ Hanušovce
3.–6. *Katarína Birošová*, G Alejová, Košice
Róbert Bursa, G Alejová, Košice
Miloš Černák, ZŠ dr. Fischera, Kežmarok
Alexandra Saxová, ZŠ Šmeralova, Prešov
7. *Pavol Oravec*, G Alejová, Košice
8. *Slavomír Miškovec*, ZŠ I. Poprad
9. *Tomáš Jurík*, ZŠ Dneperská, Košice
10. *Peter Smatana*, ZŠ MPČL, Poprad

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

V rovnostrannom trojuholníku ABC so stranou dĺžky a označme K, L, M po rade stredy strán AB, BC, CA. Vnútri alebo na obvode trojuholníka ABC je zvolený bod S. Dokážte, že platí rovnosť

$$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = |KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 + \frac{3}{4}a^2.$$

(J.Zhouf)

C – I – 2

Rozhodnite, či možno množinu čísel $\{1, 2, \ldots, 1995\}$ rozdeliť na dve skupiny tak, aby v prvej skupine bolo

a) dvakrát, b) trikrát, c) štyrikrát

viac čísel ako v druhej skupine, a aby súčty čísel v oboch skupinách boli rovnaké.

(J.Zhouf)

C – I – 3

Zostrojte lichobežník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s pravým uhlom pri vrchole A, ak je $|AC| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 7\,\mathrm{cm}$ a uhlopriečka AC delí obsah $ABCD$ na dve časti v pomere $2 : 1$.

(J.Švrček)

C – I – 4

Určte všetky dvojice x, y prirodzených čísel, pre ktoré súčasne platí:

a) $2\,100 < xy < 2\,500$;

b) $0{,}85 < \dfrac{x}{y} < 0{,}9$;

c) podiel $\dfrac{y+x}{y-x}$ je celočíselný.

(J.Zhouf)

C – I – 5

Určte všetky štvorciferné čísla A, ktoré majú pre každé $k = 2, 3, 4, \ldots, 9$ túto vlastnosť: Ak vpíšeme cifru k medzi prostredné cifry čísla A, dostaneme päťciferné číslo, ktoré je násobkom čísla k.

(J.Šimša)

C – I – 6

Určte dĺžku prepony pravouhlého trojuholníka, ak poznáte polomer r kružnice vpísanej a polomer R kružnice pripísanej k prepone tohto trojuholníka (t.j. kružnice, ktorá sa dotýka zvonku prepony a predĺženia oboch odvesien trojuholníka).

(P.Leischner)

C – S – 1

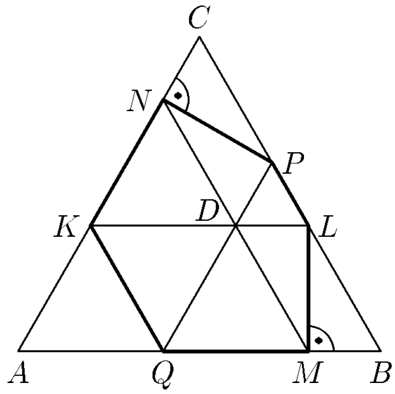
Rozložte všetkými možnými spôsobmi číslo 1996 na súčet niekoľkých (aspoň dvoch) po sebe idúcich prirodzených čísel.

(J.Zhouf)

C – S – 2

Vo vnútri rovnostranného trojuholníka ABC je daný bod D, ktorým sú postupne vedené rovnobežky KL, MN, PQ so stranami AB, BC, CA ako na obrázku. Bod D je zvolený tak, že vzniknutý šesťuholník $QMLPNK$ má pravé uhly pri vrcholoch M a N. Určte pomer obsahov šesťuholníka $QMLPNK$ a trojuholníka ABC.

(J.Zhouf)



Obr. 1

C – S – 3

Určte všetky päťciferné čísla A s nasledujúcou vlastnosťou: ak zapíšeme za sebou (zľava doprava) zvyšky, ktoré dáva číslo A po delení číslami 2, 3, 4, 5 a 6, dostaneme opäť pôvodné číslo A.

(J.Šimša)

C – II – 1

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n možno rozdeliť množinu čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ na dve skupiny tak, aby v prvej skupine bolo trikrát viac čísel ako v druhej, a aby súčty čísel v oboch skupinách boli rovnaké. *(R.Kollár)*

C – II – 2

Určte všetky body S daného štvorca $ABCD$, pre ktoré platí

$$|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|.$$

(J.Zhouf)

C – II – 3

Nájdite najmenšie päťciferné číslo $\overline{abcde}$, ktorého všetky číslice sú nenulové, a ktoré je deliteľné každým z čísel $\overline{e}$, $\overline{de}$, $\overline{cde}$, $\overline{bcde}$, $\overline{abcde}$.

(J.Zhouf)

C – II – 4

V rovine sú dané 3 rôzne body A, B a M, ktoré neležia na jednej priamke. V polrovine ABM zostrojte kružnice k_1 a k_2, ktoré sa dotýkajú priamky AB po rade v bodoch A a B, dotýkajú sa zvonku v nejakom bode T a ich spoločná dotyčnica v tomto bode prechádza bodom M.

(P.Leischner)

Kategória B

B – I – 1

Zistite, pre ktoré reálne čísla p má rovnica

$$x^3 + px^2 + 2px = 3p + 1$$

tri rôzne reálne korene x_1, x_2 a x_3 také, že $x_1 x_2 = x_3^2$. *(J.Šimša)*

B – I – 2

V rovine je daný trojuholník ABC, v ktorom $|\sphericalangle BAC| = 105°$, $|\sphericalangle ABC| = 55°$ a $|AB| = 6\,\text{cm}$. Na strane BC zostrojte body X, Y ($|BX| < |BY|$) a na strane AC body M, N ($|AM| < |AN|$) tak, aby štvoruholníky $ABXM$ a $MXYN$ boli tetivové a im opísané kružnice mali rovnaký polomer ako kružnica opísaná trojuholníku NYC.

(P.Černek)

B – I – 3

Ak zvolíme ľubovoľne 11 rôznych dvojciferných čísel, vždy z nich možno vybrať dve skupiny čísel, ktoré majú rovnaký počet prvkov, neobsahujú žiaden spoločný prvok a dávajú rovnaký súčet. Dokážte. *(A.Vrba)*

B – I – 4

Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je deliteľné šiestimi práve pre tie prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ deliteľné trinástimi. Dokážte. *(J.Šimša)*

B – I – 5

Daný je trojboký ihlan $ABCV$, ktorého podstavou je rovnostranný trojuholník ABC s dĺžkou strany a. Priamky AV, BV a CV majú od roviny podstavy rovnakú odchýlku $45°$. Určte polomer gule, ktorá sa dotýka roviny ABC v bode A, a aj priamky VB. (Odchýlkou priamky od roviny rozumieme uhol, ktorý priamka zviera so svojím kolmým priemetom do tejto roviny.)

(R.Kollár)

B – I – 6

Umiestnite v rovine 7 navzájom rôznych bodov a 7 navzájom rôznych priamok tak, aby každými dvoma z týchto bodov prechádzala jedna z týchto priamok a aby sa každé dve z týchto priamok pretínali v jednom z týchto bodov. Preveďte diskusiu.

(P.Hliněný)

B – S – 1

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $1\overbrace{99\ldots9}^{n}6$ deliteľné trinástimi.

(A.Vrba, J.Šimša)

B – S – 2

Do kružnice je vpísaný štvorec $ABCD$. Ľubovoľným bodom M uhlopriečky AC je vedená tetiva KL rovnobežná so stranou AB. Dokážte, že $|KM|^2 + |ML|^2 = |AB|^2$.

(P.Leischner)

B – S – 3

Nájdite 1996 navzájom rôznych celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{1996}$ tak, aby medzi súčtami všetkých dvojíc $a_i + a_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 1996)$ bolo

a) čo najviac rôznych čísel, b) čo najmenej rôznych čísel.

(R.Kollár)

B – II – 1

Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $5^n - 3^n + 2$ deliteľné siedmimi.

(A.Vrba, J.Šimša)

B – II – 2

Body dotyku dotyčníc vedených z bodu V ku kružnici k označme A, B. Zostrojte sečnicu kružnice k tak, aby prechádzala bodom V a kružnicu k pretínala v bodoch C a D, kde $|AC| = |BD|$.

(J.Švrček)

B – II – 3

Dokážte, že rovnica $x^3 - 1\,996x^2 + rx + 1\,995 = 0$ má pre každý reálny koeficient r nanajvýš jeden celočíselný koreň.

(A.Vrba)

B – II – 4

Daný je trojboký ihlan $ABCV$ s podstavou ABC ($|AB| = 8\,\mathrm{cm}$, $|AC| = |BC| = 5\,\mathrm{cm}$), ktorého bočné steny majú od roviny podstavy odchýlku $45°$ a päta P jeho výšky spustenej z vrcholu V leží vnútri podstavy. Vypočítajte veľkosť výšky VP.

(P.Leischner)

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Stĺpce šachovnice 8×8 označme zľava doprava číslami $1, 2, \ldots, 8$, riadky označme rovnakými číslami zdola nahor. Do každého políčka zapíšeme súčet čísel príslušného riadku a stĺpca. Vyberieme 8 políčok tak, aby žiadne dve z nich neboli ani v rovnakom riadku, ani v rovnakom stĺpci. Aký je

a) najväčší možný súčet,
b) najväčší možný súčin,
c) najmenší možný súčet druhých mocnín

čísel na vybraných poliach?

(J.Zhouf)

A – I – 2

Na stranách AB, BC a CA daného trojuholníka ABC sú zvolené po rade body K, L a M tak, že platí

$$0 < \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} < 1.$$

Dokážte, že ak je trojuholník KLM rovnostranný, potom je rovnostranný aj trojuholník ABC.

(J.Šimša)

A – I – 3

Postupnosť prirodzených čísel $a_1, a_2, a_3, \dots$ spĺňa pre každé prirodzené $n \geqq 1$ tri rovnosti:

$$a_n + a_{2n} = a_{3n},$$
$$a_n + a_{3n-1} = a_{2n} + a_{2n-1},$$
$$a_n + a_{3n+1} = a_{2n} + a_{2n+1}.$$

Pritom vieme, že všetky štyri členy a_1, a_{14}, a_{17} a a_{21} sú prvočísla. Dokážte rovnosť $a_{1995} = a_{2000}$.

(J.Šimša)

A – I – 4

Dokážte, že ak pre prirodzené čísla a, b je aj číslo

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

prirodzené, potom pre najväčší spoločný deliteľ D čísel a, b platí nerovnosť $D \leqq \sqrt{a+b}$. Môže nastať rovnosť v prípade, že $D < a < b$?

(M.Niepel)

A – I – 5

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ spĺňajúce pre každé $x, y \in \mathbb{N}$ rovnosť

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(D(x,y)),$$

kde $D(x,y)$ je najväčší spoločný deliteľ čísel x, y, ak viete, že platí $f(p) = p$ pre každé prvočíslo p.

(P.Hliněný)

A – I – 6

V priestore je daný trojuholník ABC so stranami $|AB| = |AC| = 10\,\text{cm}$ a $|BC| = 12\,\text{cm}$. Nájdite množinu všetkých bodov D, pre ktoré spojnica stredu O gule opísanej štvorstenu $ABCD$ s ťažiskom T tohto štvorstena je priamka kolmá na rovinu ADT.

(P.Leischner)

A – S – 1

Nájdite všetky také dvojice celých čísel a, b, pre ktoré sú obe čísla

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}, \qquad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \qquad \text{celé.}$$

(R.Kollár)

A – S – 2

Nájdite najväčšie reálne číslo q, pre ktoré je nerovnosť $2^n \geqq 1 + nq^n$ splnená pre každé prirodzené číslo $n \geqq 2$.

(J.Šimša)

A – S – 3

Popíšte konštrukciu rovnoramenného trojuholníka ABC so základňou AB, v ktorom $|OA| = 9$ cm a $|OB| = 3$ cm, kde O je stred kružnice pripísanej k strane BC trojuholníka ABC (t.j. kružnice, ktorá sa dotýka zvonku strany BC a predĺžení strán AB a AC).

(A.Vrba)

A – II – 1

Určte, pre ktoré prirodzené čísla n existuje nepárne n-ciferné číslo, ktoré je deliteľné trinástimi a má ciferný súčet rovný štyrom.

(J.Šimša)

A – II – 2

Dané sú dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, ktoré sa zvonku dotýkajú v bode F. Nech t je ich spoločná vonkajšia dotyčnica, jej body dotyku s kružnicami k_1, k_2 označme po rade A, B. Veďme teraz inú dotyčnicu ku kružnici k_1 rovnobežnú s priamkou t. Jej dotykový bod s kružnicou k_1 označme C a priesečníky s kružnicou k_2 označme D a E. Dokážte, že bod F a stredy kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE ležia na jednej priamke.

(M.Niepel)

A – II – 3

V rovine je daná úsečka AB. Nájdite všetky body C tejto roviny také, že pre stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC a jeho ťažisko T platí: $O \not\equiv T$, $OT \perp CT$.

(M.Engliš)

A – II – 4

Deti sa v tábore delili do družín nasledujúcim spôsobom: Vedúci určil spomedzi detí niekoľko náčelníkov. Každý náčelník si do svojej družiny vzal všetkých svojich kamarátov z tábora (kamarátstvo je vzájomné). Napočudovanie to vyšlo *dobre*, teda tak, že sa náčelníci nemuseli o žiadne dieťa hádať, žiadne dieťa nezvýšilo a žiadni dvaja náčelníci neboli kamaráti. Druhýkrát vedúci určil iný počet náčelníkov. Mohlo rozdelenie detí rovnakým spôsobom opäť dopadnúť *dobre*?

(P.Hliněný)

A – III – 1

Pre postupnosť $G(n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ celých čísel platí:

$$G(0) = 0$$
$$G(n) = n - G(G(n-1)) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Potom dokážte, že

a) neexistuje prirodzené číslo k také, že $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$,

b) pre každé prirodzené číslo k platí $G(k) \geqq G(k-1)$.

(M.Engliš)

A – III – 2

V priestore je daný ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AP, BQ a CR. Dokážte, že pre každý vnútorný bod V trojuholníka PQR existuje štvorsten $ABCD$ taký, že bod V má zo všetkých bodov steny ABC najväčšiu vzdialenosť (po povrchu štvorstena) od bodu D.

(P.Černek, J.Šimša)

A – III – 3

Daných je šesť trojprvkových podmnožín konečnej množiny X. Dokážte, že potom prvky množiny X možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadna zo šiestich daných podmnožín nebola jednofarebná, t.j. nemala všetky tri prvky rovnakej farby.

(P.Hliněný)

A – III – 4

Daný je ostrý uhol XCY a na jeho ramenách CX, CY po rade body A, B tak, že $|CX| < |CA| = |CB| < |CY|$. Popíšte konštrukciu priamky, ktorá pretína rameno CX a úsečky AB, BC po rade v bodoch K, L a M tak, že platí

$$|KA| \cdot |YB| = |XA| \cdot |MB| = |LA| \cdot |LB| \neq 0.$$

(P.Černek)

A – III – 5

Pre ktoré celé čísla k existuje funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ spĺňajúca

a) $f(1995) = 1996$,

b) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) + k \cdot f(D(x, y))$ pre každú dvojicu prirodzených čísel x a y ?

($D(x, y)$ označuje najväčší spoločný deliteľ čísel x a y.)

(P.Hliněný)

A – III – 6

Na stranách AB, BC a CA daného trojuholníka ABC sú dané po rade body K, L a M tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{3}\,.$$

Ak sú kružnice opísané trojuholníkom AKM, BLK a CML zhodné, potom aj kružnice vpísané týmto trom trojuholníkom sú zhodné. Dokážte.

(J.Šimša)

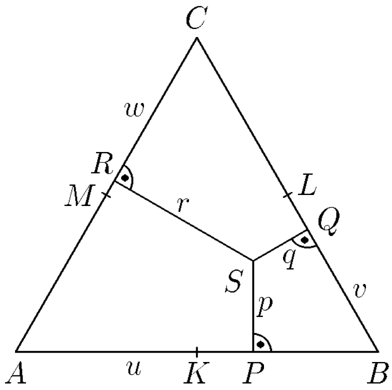
Riešenia súťažných úloh

Kategória C

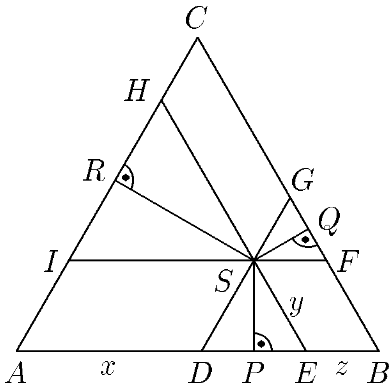
C – I – 1

Označme P, Q, R päty kolmíc vedených z bodu S na strany AB, BC, CA (obr. 2) a ďalej označme

$$|SP| = p, \quad |SQ| = q, \quad |SR| = r, \quad |AP| = u, \quad |BQ| = v, \quad |CR| = w.$$



Obr. 2



Obr. 3

Platí

$$|AS|^2 + |BS|^2 + |CS|^2 = \left(u^2 + p^2\right) + \left(v^2 + q^2\right) + \left(w^2 + r^2\right),$$

$$|KS|^2 + |LS|^2 + |MS|^2 =$$

$$= \left(u - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + p^2 + \left(v - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + q^2 + \left(w - \tfrac{1}{2}a\right)^2 + r^2 =$$

$$= u^2 + p^2 + v^2 + q^2 + w^2 + r^2 - a(u + v + w) + \tfrac{3}{4}a^2.$$

Aby sme dokázali platnosť danej rovnosti, stačí, keď dokážeme, že platí

$$-a(u + v + w) = -\tfrac{3}{2}a^2, \qquad \text{t.j.} \qquad u + v + w = \tfrac{3}{2}a.$$

Bodom S vedieme rovnobežky IF, EH, GD so stranami AB, BC, CA trojuholníka ABC (obr. 3). Označme

$$|AD| = |GC| = |HI| = x, \quad |DE| = |BF| = |IA| = y, \quad |EB| = |FG| = |CH| = z.$$

Ak porovnáme obrázky 2 a 3, môžeme písať

$$u + v + w = \left(x + \tfrac{1}{2}y\right) + \left(y + \tfrac{1}{2}z\right) + \left(z + \tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{3}{2}(x + y + z) = \tfrac{3}{2}a,$$

čo sme chceli dokázať. Využili sme, že $x + y + z = a$.

Iným spôsobom zapísané riešenie (obr. 2, obr. 3):

$$\begin{aligned}
|AS|^2+|BS|^2+|CS|^2 &= \left(x+\tfrac12 y\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}y\right)^2+\\
&\quad+\left(y+\tfrac12 z\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}z\right)^2+\left(z+\tfrac12 x\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}x\right)^2=\\
&=2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+yz+zx,\\
|KS|^2+|LS|^2+|MS|^2+\tfrac34 a^2 &= \left(x+\tfrac12 y-\tfrac12 a\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}y\right)^2+\\
&\quad+\left(y+\tfrac12 z-\tfrac12 a\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}z\right)^2+\\
&\quad+\left(z+\tfrac12 x-\tfrac12 a\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}x\right)^2+\tfrac34 a^2=\\
&=2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+yz+zx+\tfrac34 a^2-\tfrac32 a^2+\tfrac34 a^2=\\
&=2\left(x^2+y^2+z^2\right)+xy+yz+zx
\end{aligned}$$

(využili sme, že $x+y+z=a$). Vidíme, že dokazovaná rovnosť skutočne platí.

Na obrázkoch je bod S nakreslený vnútri trojuholníka ABC, všetky výpočty sú však platné aj v prípade, že bod S leží na obvode tohto trojuholníka.

C – I – 2

Najprv si pripravíme dva rozklady:

$$1995=3\cdot5\cdot7\cdot19,$$
$$1+2+\ldots+1995=\frac{1995\cdot1996}{2}=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot499.$$

a) Rozdelenie do skupín existuje, nie je však jednoznačné, uvedieme len jednu možnosť. Prvé dve tretiny čísel od 1 do 1995 majú súčet

$$1+2+\ldots+1330=\frac{1330\cdot1331}{2}=665\cdot1331,$$

posledná tretina (obsahujúca 665 čísel) má súčet

$$1331+\ldots+1995=\frac{665}{2}(1995+1331)=665\cdot1663.$$

Druhý súčet je väčší o $332\cdot665=166\cdot1330$, preto vymeníme 166 čísel, ktoré sa líšia o 665. V jednotlivých skupinách potom budú napr. čísla

$$1,\ 2,\ \ldots,\ 1\,164,\ 1\,830,\ 1\,831,\ \ldots,\ 1\,995 \quad \text{a} \quad 1\,165, 1\,166, \ldots, 1\,330, 1\,331, \ldots, 1\,829.$$

b) Čísla nemožno rozdeliť, lebo číslo 1995 nie je deliteľné štyrmi.

c) Prvé štyri pätiny čísel od 1 do 1995 majú súčet

$$1 + 2 + \ldots + 1596 = \frac{1596 \cdot 1597}{2} = 1597 \cdot 798,$$

posledná pätina (obsahujúca 399 čísel) má súčet

$$1597 + \ldots + 1995 = \frac{399 \cdot (1597 + 1995)}{2} = 893 \cdot 798.$$

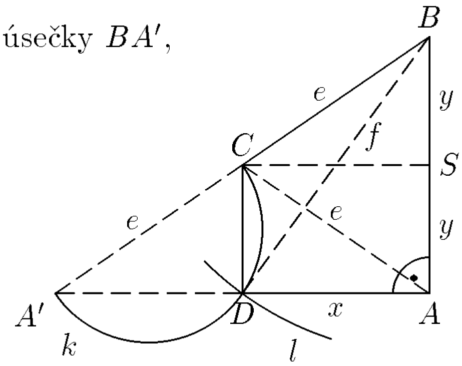
Pretože súčet štyroch pätín najmenších čísel je väčší ako súčet jednej pätiny najväčších čísel, nemožno podmienky úlohy splniť.

C – I – 3

Nakoľko obsahy trojuholníkov ABC a CDA sú v pomere $2:1$ (obsah $\triangle ABC$ je väčší ako obsah $\triangle CDA$, lebo $|BD| > |AC|$) a pretože tieto trojuholníky majú rovnakú výšku $|DA|$, platí $|AB| = 2|CD|$. Preto tiež $|BC| = |AC| = |A'C| = e$ (obr. 4).

Konštrukcia:
1. úsečka BA', $|BA'| = 2e$, $e = 5\,\mathrm{cm}$, bod C v strede úsečky BA',
2. kružnica k s priemerom $A'C$,
3. kružnica $l(B; f)$, kde $f = 7\,\mathrm{cm}$,
4. bod $D \in k \cap l$,
5. bod A tak, aby D bol stred AA'.

Úloha má jediné riešenie.



Obr. 4

Úlohu tiež možno riešiť výpočtom. Pre trojuholníky ABD a ACD môžeme napísať *Pytagorovu vetu* (obr. 4):

$$x^2 + (2y)^2 = f^2 = 49,$$
$$x^2 + y^2 = e^2 = 25.$$

Z tejto sústavy získame $x = \sqrt{17}$, $y = 2\sqrt{2}$. Konštrukcia je potom zrejmá z obr. 4.

C – I – 4

Najprv určíme všetky dvojice x, y, ktoré spĺňajú podmienky a) a b). Vyriešime sústavu nerovníc

$$2\,100 < xy < 2\,500, \tag{1}$$
$$0{,}85y < x < 0{,}9y. \tag{2}$$

Ak nerovnicu (2) vynásobíme číslom y, dostaneme

$$0{,}85y^2 < xy < 0{,}9y^2. \tag{3}$$

Porovnaním nerovníc (1) a (3) zistíme, že $0{,}85y^2 < 2\,500$ a zároveň $2\,100 < 0{,}9y^2$, odkiaľ $48 < y < 55$.

Ak nerovnicu (2) vynásobíme číslom x, dostaneme

$$0{,}85xy < x^2 < 0{,}9xy. \tag{4}$$

Porovnaním nerovníc (1) a (4) zistíme, že $\dfrac{x^2}{0{,}9} < 2\,500$ a zároveň $2\,100 < \dfrac{x^2}{0{,}85}$, odkiaľ $42 < x < 48$.

Získali sme 30 možných dvojíc x, y. Pretože nešlo o ekvivalentné úpravy, je pre tieto dvojice nutné overiť všetky tri podmienky. Vďaka podmienke a) nevyhovuje dvojica 47, 54. Po overení podmienky b) ostane 11 dvojíc x, y: 43, 49; 43, 50; 44, 49; 44, 50; 44, 51; 45, 51; 45, 52; 46, 52; 46, 53; 46, 54; 47, 53. Z nich podmienku c) spĺňa jediná dvojica: $x = 45$, $y = 51$.

Iné riešenie: Ak označíme $k = \dfrac{y+x}{y-x}$, potom $\dfrac{x}{y} = \dfrac{k-1}{k+1} = 1 - \dfrac{2}{k+1}$. Odtiaľ a z podmienky b) zistíme, že celé číslo k je rovné 13, 14, 15, 16, 17 alebo 18. Preto je zlomok $\dfrac{x}{y}$ rovný jednému zo zlomkov (sú zapísané v základnom tvare):

$$\frac{6}{7},\quad \frac{13}{15},\quad \frac{7}{8},\quad \frac{15}{17},\quad \frac{8}{9},\quad \frac{17}{19}.$$

Teraz zostáva posúdiť, ktoré z týchto zlomkov možno rozšíriť prirodzeným číslom n na zlomok $\dfrac{x}{y}$ tak, aby bola splnená podmienka a). Napr. pre prvý zlomok je $x = 6n$, $y = 7n$ a podmienka má tvar $2\,100 < 42n^2 < 2\,500$, žiadne n ju však nespĺňa. Analogicky sa vyskúšajú ostatné zlomky. Úloha má jediné riešenie $x = 45$, $y = 51$.

C – I – 5

Ak je $A = \overline{pqrs}$ ciferný zápis hľadaného čísla, potom číslo s vpísanou cifrou k môžeme rozložiť na súčet

$$\overline{pqkrs} = \overline{pq0rs} + k \cdot 100.$$

Pretože druhý sčítanec je deliteľný číslom k, možno vlastnosť čísla A vyjadriť takto: Päťciferné číslo B so zápisom $B = \overline{pq0rs}$ je deliteľné každým z čísel $2, 3, 4, \dots, 9$, alebo každým z čísel 40, 9 a 7. Číslo B je násobkom čísla štyridsať, práve keď je násobkom štyridsiatich dvojčíslie $\overline{rs}$, t.j. $\overline{rs} \in \{00, 40, 80\}$. Rozlíšime jednotlivé prípady.

a) $\overline{rs} = 00$. Číslo $B = \overline{pq\,000}$ je teda deliteľné číslami 9 a 7 jedine v prípade $\overline{pq} = 63$. Dostávame prvé riešenie $A = 6\,300$.

b) $\overline{rs} = 40$. Číslo $B = \overline{pq\,040}$ je deliteľné deviatimi, práve keď $p+q = 5$ alebo $p+q = 14$. V prvom prípade

$$B = 1\,000(10p + 5 - p) + 40 = 7(1\,285p + 720) + 5p,$$

čo nie je násobkom čísla sedem pre žiadnu cifru $p \leqq 5$. V druhom prípade

$$B = 1\,000(10p + 14 - p) + 40 = 7(1\,285p + 2\,005) + 5(p + 1),$$

čo je násobkom čísla sedem jedine pre $p = 6$. Vtedy $q = 8$ a $A = 6\,840$.

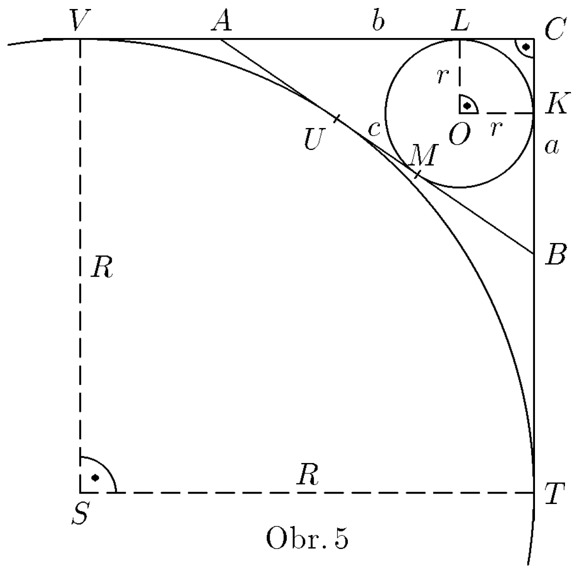
c) $\overline{rs} = 80$. Číslo $B = \overline{pq\,080}$ je deliteľné deviatimi, práve keď $p + q = 1$ alebo $p + q = 10$. V prvom prípade $B = 10\,080$, čo je násobkom čísla sedem, takže máme riešenie $A = 1\,080$. V druhom prípade

$$B = 1\,000(10p + 10 - p) + 80 = 7(1\,285p + 1\,440) + 5p,$$

čo je násobkom čísla sedem jedine pre $p = 7$. Vtedy $q = 3$ a $A = 7\,380$.

Odpoveď: Hľadané čísla A sú $1\,080$, $6\,300$, $6\,840$ a $7\,380$.

C – I – 6



Obr. 5

Pre trojuholník ABC (obr. 5) platí

$$\begin{aligned} a + b + c &= (|BK| + r) + (|AL| + r) + c = \\ &= |BM| + |AM| + 2r + c = c + 2r + c = 2c + 2r, \end{aligned}$$

a tiež

$$\begin{aligned} a + b + c &= |BC| + |AC| + |AU| + |BU| = \\ &= (|BC| + |BT|) + (|AC| + |AV|) = 2R. \end{aligned}$$

Porovnaním oboch rovností dostaneme $c = R - r$.

C – S – 1

Uvažujme samostatne najprv nepárny, potom párny počet sčítancov.

Pre nepárny počet sčítancov požadovaného rozkladu musí platiť

$$1\,996 = (s-k) + (s-(k-1)) + \ldots + (s-1) + s + (s+1) + \ldots + (s+k),$$

kde s je prostredný sčítanec, a sčítancov je $2k+1$, $k \geqq 1$. Pritom musí platiť $s > k$. Súčet upravíme na tvar

$$2^2 \cdot 499 = 1\,996 = (2k+1)s,$$

odkiaľ vychádza len $2k+1 = 499$, $s = 4$, z čoho vyplýva $k = 249$. Tento prípad nie je riešením, pretože potom $s < k$.

Pre párny počet sčítancov musí analogicky platiť

$$\begin{aligned}2^2 \cdot 499 = 1\,996 &= (s-k) + \ldots + (s-1) + s + (s+1) + \ldots + (s+k) + (s+k+1) = \\ &= (2k+2)s + (k+1) = (k+1)(2s+1),\end{aligned}$$

kde s, $s+1$ sú prostredné sčítance, $k \geqq 0$ a $s > k$. Odtiaľ vychádza len $2s+1 = 499$, $k+1 = 4$, z čoho vyplýva $s = 249$, $k = 3$.

Jediný rozklad čísla 1 996 na požadovaný súčet je

$$1\,996 = 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253.$$

Iné riešenie (spoločné pre párny aj nepárny počet sčítancov).

Hľadaný rozklad má tvar

$$\begin{aligned}1\,996 &= p + (p+1) + \ldots + (p+k) = \\ &= (k+1)p + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(2p+k)}{2},\end{aligned}$$

kde p je prvý sčítanec; sčítancov je $k+1$, $k \geqq 1$. Musí teda platiť $2^3 \cdot 499 = (k+1)(2p+k)$.

Ak je k párne, môže byť len $k+1 = 499$, t.j. $k = 498$ a $p < 0$, čo nie je možné.

Ak je k nepárne, môže byť len $k+1 = 8$, t.j. $k = 7$, $p = 246$, z čoho potom jediné možné riešenie je

$$1\,996 = 246 + 247 + 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253.$$

C – S – 2

Trojuholník PCN je pravouhlý a $|\sphericalangle PCN| = 60°$, preto $|CN| : |CP| = 1 : 2$ (obr. 6). Analogicky platí aj $|MB| : |BL| = 1 : 2$.

Pretože $|NC| = |PD| = |PL|$ (trojuholník LPD je rovnostranný), je

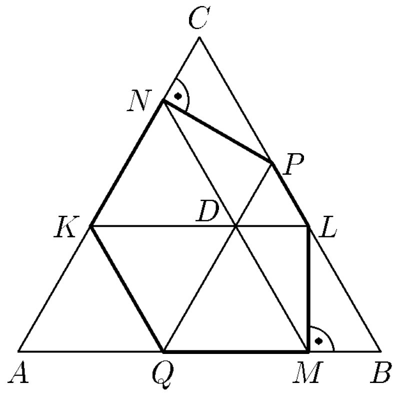
$$|CP| : |PL| : |LB| = 2 : 1 : 2$$

a podobne

$$|AQ| : |QM| : |MB| = 2 : 2 : 1.$$

Potom teda

$$|AQ| = |AK| = |KQ| = |LB| = |PC| = \tfrac{2}{5}|AB|,$$
$$|MB| = |NC| = \tfrac{1}{5}|AB|.$$



Obr. 6

Trojuholník AQK je rovnostranný a zjednotením trojuholníkov PCN a LBM vznikne trojuholník s rovnakým obsahom ako má trojuholník AQK. Pre príslušné obsahy preto platí

$$\begin{aligned} S(QMLPNK) &= S(\triangle ABC) - 2S(\triangle AQK) = \\ &= \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}|AB| - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}|AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{5}|AB| = \\ &= \frac{17\sqrt{3}}{100}\,|AB|^2, \end{aligned}$$

$$\frac{S(QMLPNK)}{S(\triangle ABC)} = \frac{\frac{17\sqrt{3}}{100}|AB|^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}|AB|^2} = \frac{17}{25}.$$

C – S – 3

Číslo A musí byť nepárne (jeho prvá číslica nemôže byť 0, preto je 1), preto po delení šiestimi dáva zvyšok 1, 3 alebo 5 (a teda po delení tromi dáva po rade zvyšok 1, 0 alebo 2). Preto má zápis čísla A jeden z tvarov

$$11{*}{*}1, \quad 10{*}{*}3, \quad 12{*}{*}5,$$

ktoré môžeme s ohľadom na delenie piatimi upresniť na

$$11{*}11, \quad 10{*}33, \quad 12{*}05.$$

S ohľadom na delenie štyrmi musí byť A rovné jednému z čísel

$$11\,311, \quad 10\,133, \quad 12\,105.$$

Zostáva overiť (napr. pomocou ciferného súčtu), či zvyšok po delení tromi skutočne zodpovedá druhej číslici zľava. Zistíme, že túto vlastnosť má len prvé z uvedených čísel.

Odpoveď: Jediné číslo A vyhovujúce zadaniu je: 11 311.

C – II – 1

Číslo n musí byť deliteľné štyrmi, pretože je štvornásobkom počtu prvkov druhej skupiny. Ak do tejto skupiny zaradíme najväčšie čísla, bude ich súčet

$$S_1 = \left(3 \cdot \frac{n}{4} + 1\right) + \ldots + \left(3 \cdot \frac{n}{4} + \frac{n}{4}\right) = \frac{n}{4} \cdot 3 \cdot \frac{n}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{4} + 1\right) = \frac{7n^2 + 4n}{32}.$$

V prvej (početnejšej) skupine bude potom súčet čísel

$$S_2 = 1 + 2 + \ldots + 3 \cdot \frac{n}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{n}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{n}{4} + 1\right) = \frac{9n^2 + 12n}{32}.$$

Pretože pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $S_2 > S_1$, neexistuje prirodzené číslo n, ktoré by spĺňalo podmienky úlohy.

C – II – 2

Označme a veľkosť strany štvorca $ABCD$, x vzdialenosť bodu S od strany AD a y vzdialenosť bodu S od strany AB. Zo vzťahu $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$ vyplýva

$$\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}\sqrt{x^2 + (a-y)^2}.$$

Umocnením na druhú, roznásobením a prevedením na jednu stranu dostaneme

$$a^2(4xy - 2ax - 2ay + a^2) = 0,$$
$$a^2(2x - a)(2y - a) = 0.$$

Odtiaľ $x = \dfrac{a}{2}$ alebo $y = \dfrac{a}{2}$. Tejto podmienke vyhovujú všetky body, ktoré ležia na spojnici stredov strán AB, CD alebo na spojnici stredov strán AD, BC. Poľahky sa presvedčíme, že všetky takéto body S spĺňajú rovnosť $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$.

C – II – 3

Platí

$$\overline{abcde} = a \cdot 10^4 + \overline{bcde} = a \cdot 2^4 \cdot 5^4 + \overline{bcde}.$$

Aby bolo číslo $\overline{abcde}$ deliteľné číslom $\overline{bcde}$, musí ním byť deliteľné aj číslo $a \cdot 2^4 \cdot 5^4$. Pretože je $e \neq 0$, musí byť $\overline{bcde}$ nepárny deliteľ čísla $a \cdot 5^4$ (číslo $a \cdot 2^4$ nie je štvorciferné ani pre $a = 9$).

Pokiaľ $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$ alebo $a = 8$, neexistuje žiaden taký deliteľ. (Najväčší prípadný deliteľ je $5^4 = 625$, ktorý ale nie je štvorciferný.)

Pokiaľ $a = 3$, pripadá do úvahy len deliteľ $3 \cdot 5^4 = 1\,875$. Číslo $\overline{abcde} = 31\,875$ ale nie je deliteľné číslom 875.

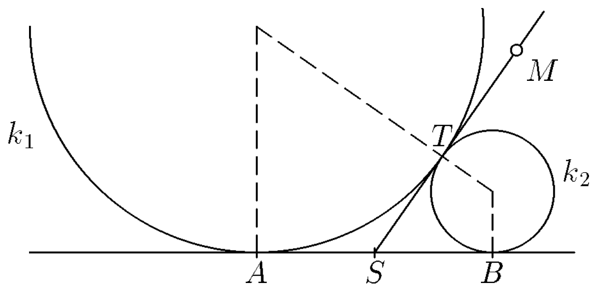
Pokiaľ $a = 5$, pripadá do úvahy iba deliteľ $5^5 = 3\,125$. Číslo $\overline{abcde} = 53\,125$ je skutočne deliteľné číslami 125, 25 aj 5. (Prípady $a > 5$ už nemusíme uvažovať.)

Hľadané číslo je $\overline{abcde} = 53\,125$.

Poznámka. Ďalšie päťciferné čísla s danou vlastnosťou sú 91 125, 91 875, 95 625.

C – II – 4

Označme S priesečník uvažovanej dotyčnice oboch hľadaných kružníc s priamkou AB. Z vlastností dotyčníc ku kružnici vyplýva, že platí $|SA| = |ST| = |SB|$ (obr. 7), takže bod S je stredom úsečky AB. Odtiaľ už ľahko vyplýva *konštrukcia*:



Obr. 7

Najprv zostrojíme stred S úsečky AB, potom nájdeme bod T na polpriamke SM taký, že $|ST| = |SA|$. Stred S_1 hľadanej kružnice k_1 nájdeme ako priesečník kolmice na priamku AB v bode A a kolmice na priamku SM v bode T. Podobne zostrojíme aj stred S_2 kružnice k_2. Zostrojené kružnice k_1 a k_2 majú všetky požadované vlastnosti.

Úloha má vždy jedno riešenie.

Kategória B

B – I – 1

Riešenie využíva vzťahy medzi koreňmi a koeficientami mnohočlenu, tzv. *Viètové vzťahy*. Podľa nich je

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=-p,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3&=2p,\\ x_1x_2x_3&=3p+1. \end{aligned}$$

Ak dosadíme do druhého vzťahu za $x_1x_2=x_3^2$, dostaneme

$$2p=x_3^2+x_1x_3+x_2x_3=x_3(x_1+x_2+x_3)=-px_3,$$

a pretože $p=0$ zrejme nevyhovuje, je $x_3=-2$.

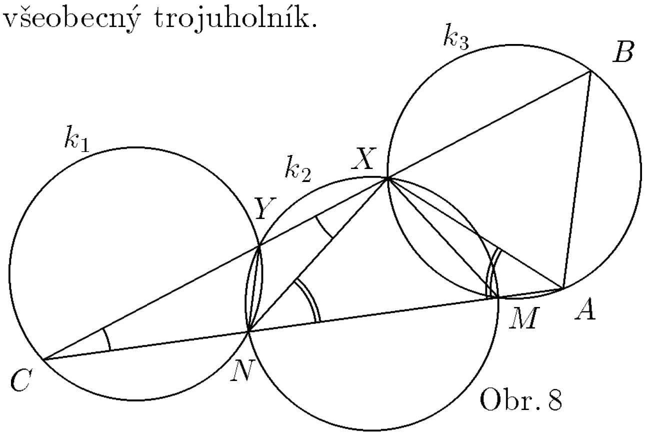
Ďalej platí

$$4=x_3^2=x_1x_2=\frac{x_1x_2x_3}{x_3}=\frac{3p+1}{-2},$$

odkiaľ $p=-3$. Len pre toto p teda môže daná rovnica vyhovovať daným podmienkam. Ak dosadíme do *Viètových vzťahov* za x_3 a za p, dopočítame zostávajúce korene $x_1=4$, $x_2=1$ a presvedčíme sa, že $p=-3$ je naozaj riešenie.

B – I – 2

Úlohu vyriešime pre všeobecný trojuholník.



Obr. 8

Rozbor: Predpokladajme, že je úloha vyriešená (obr. 8). Pretože NY je tetiva spoločná kružniciam k_1, k_2, ktoré majú rovnaký polomer, a body X, C ležia v opačných polrovinách určených priamkou NY, je $|\sphericalangle NXY|=|\sphericalangle NCY|=\gamma=|\sphericalangle ACB|$. Podobne $|\sphericalangle MAX|=|\sphericalangle MNX|=2\gamma$ (je totiž $|\sphericalangle MNX|=|\sphericalangle NXC|+|\sphericalangle NCX|$).

Konštrukcia: Najprv zostrojíme na úsečke BC bod X tak, aby $|\sphericalangle CAX|=2\gamma$. Ďalej zostrojíme na úsečke AC bod N tak, aby $|\sphericalangle CXN|=\gamma$. Body M, Y môžeme získať analogicky (vyjdeme z bodu B) alebo ako priesečníky kružníc určených trojicami bodov A, B, X a X, M, N so stranami AC, BC.

Dôkaz správnosti konštrukcie vyplýva z toho, že kružnice prechádzajúce bodmi A, B, X, M, resp. M, X, N, Y majú spoločnú tetivu MX a zhodné obvodové uhly $\sphericalangle MAX$, $\sphericalangle MNX$. Majú teda rovnaký polomer. Analogicky pre kružnice k_2, k_1.

Diskusia: Bod X možno popísaným spôsobom zostrojiť, práve keď $2\gamma < \alpha$, a bod M, práve keď $2\gamma < \beta$. Body N, Y možno potom zostrojiť vždy. Nutná a postačujúca podmienka riešiteľnosti úlohy je súčasná platnosť podmienok $2\gamma < \alpha$, $2\gamma < \beta$. (Úloha teda môže mať riešenie, len keď $\gamma < 36°$.) V našom prípade $\alpha = 105°$, $\beta = 55°$, $\gamma = 20°$ sú podmienky splnené.

Poznámka: Rovnakým spôsobom môžeme riešiť všeobecnejšiu úlohu, ktorá požaduje zostrojiť k kružníc rovnakého polomeru umiestených analogicky ako v úlohe 2 pre $k = 3$. Obvodové uhly budú po sebe nasledovať v postupnosti $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \ldots, (k-1)\gamma$.

B – I – 3

Dajme tomu, že dve množiny čísel majú rovnaký počet prvkov a dávajú rovnaký súčet. Ak z nich vynecháme všetky spoločné prvky, dostaneme množiny, ktoré nestratili uvedené dve vlastnosti a naviac ešte neobsahujú žiaden spoločný prvok.

Jedenásťprvková množina obsahuje $\binom{11}{k}$ k-prvkových podmnožín a toto číslo je najväčšie pre $k = 5$ a $k = 6$: $\binom{11}{5} = \binom{11}{6} = 462$. Pritom súčty piatich rôznych dvojciferných čísel môžu nadobúdať len 421 hodnôt od $11 + 12 + \ldots + 15 = 65$ do $95 + 96 + \ldots + 99 = 485$. Dve päťprvkové podmnožiny s rovnakým súčtom teda existujú pre každú 11-prvkovú množinu dvojciferných čísel.

Komentár. Okrem elementárnej kombinatoriky je v úlohe využitý tzv. *Dirichletov princíp*: Nech $K > k$. Ak akokoľvek rozdelíme K zajacov do k klietok, vždy budú v niektorej klietke aspoň dva zajace. V našom prípade sú „zajace“ päťprvkové množiny a „klietky“ čísla 65, …, 485. Všeobecnejšie: Ak je $K > nk$, bude v niektorej klietke viac ako n zajacov.

B – I – 4

Riešenie je založené na počítaní so zvyškami po delení celých čísel (zvyškové triedy, kongruencie). Preto si najprv pripomenieme a zdôvodníme základné pravidlá:

Ak sú z_1, z_2 zvyšky po delení čísel a_1, a_2 číslom d, potom čísla $a_1 + a_2$, resp. $a_1 a_2$ dávajú po delení číslom d rovnaké zvyšky, aké dávajú čísla $z_1 + z_2$, resp. $z_1 z_2$.

Príklad: Určte zvyšok z pri delení čísla $A = (1\,993 \cdot 1\,996)^2 + (1\,994 \cdot 1\,997)^2$ deviatimi. Zatiaľ čo výpočet čísla A a jeho delenie deviatimi by bolo veľmi pracné (kalkulačka nemá dosť miest na displeji), s využitím uvedených pravidiel a známej súvislosti zvyškov po delení čísla a jeho ciferného súčtu deviatimi zistíme z pamäti, že z je rovné zvyšku čísla $(4 \cdot 7)^2 + (5 \cdot 8)^2 = 28^2 + 40^2$, t.j. zvyšku čísla $1^2 + 4^2 = 17$, tj. $z = 8$.

Zvyšky z_k po delení mocnín a^k číslom d môžeme pre $k = 1, 2, \ldots$ postupne počítať takto: z_{k+1} je rovné zvyšku po delení čísla $a \cdot z_k$ číslom d.

Príklad: Zvyšok z po delení čísla $1\,993^{1994}$ deviatimi je rovný zvyšku po delení čísla 4^{1994} deviatimi. Počítajme: 4 dáva zvyšok 4, 4^2 dáva zvyšok 7, 4^3 dáva zvyšok ako $4 \cdot 7 = 28$, tj. 1, 4^4 dáva zvyšok ako $4 \cdot 1$, t.j. 4 a tak stále dookola s periódou 3. Zvyšok z je teda rovný zvyšku po delení 4^2 deviatimi, t.j. 7.

Riešenie. Na základe uvedených pravidiel zostavíme tabuľku zvyškov po delení čísel $A = 2n^4 + n^3 + 50$ šiestimi v závislosti na zvyšku čísla n (zvyšok po delení čísla A šiestimi totiž závisí podľa uvedených pravidiel len na zvyšku po delení čísla n šiestimi):

n	n^2	n^3	n^4	$2n^4$	$2n^4 + n^3$	$A = 2n^4 + n^3 + 50$
0	0	0	0	0	0	2
1	1	1	1	2	3	5
2	4	2	4	2	4	0
3	3	3	3	0	3	5
4	4	4	4	2	0	2
5	1	5	1	2	1	3

Z tabuľky vidíme, že číslo A je násobkom šiestich, práve keď číslo n dáva po delení šiestimi zvyšok rovný 2, t.j. je rovné jednému z čísel 2, 8, 14, 20, …

Teraz zostavíme tabuľku zvyškov po delení niekoľko prvých čísel $B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ trinástimi. (Na rozdiel od výrazu A, ktorý je mnohočlenom, sa vo výraze B vyskytuje premenná n aj v exponente. Nemožno preto povedať, že zvyšok po delení čísla B trinástimi závisí na zvyšku po delení čísla n trinástimi. Až pri zostavovaní tabuľky sa ukáže, s akou periódou sa zvyšky opakujú.

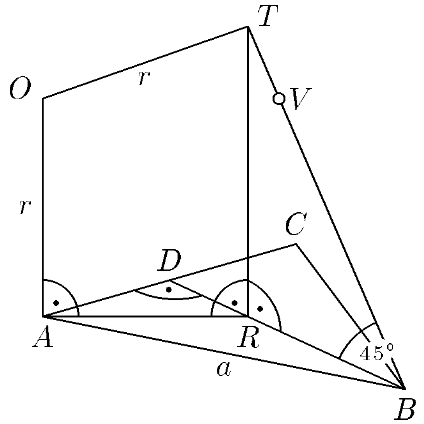
n	3^n	4^n	$2 \cdot 4^n$	$2 \cdot 4^n + 3^n$	$B = 2 \cdot 4^n + 3^n + 50$
0	1	1	2	3	1
1	3	4	8	11	9
2	9	3	6	2	0
3	1	12	11	12	7
4	3	9	5	8	6
5	9	10	7	3	1
6	1	1	2	3	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ďalšie výpočty už nemusíme prevádzať. Vidíme totiž, že zvyšky mocnín 3^n a 4^n sa vzhľadom k číslu n opakujú so spoločnou periódou rovnou šiestim (pri mocninách 3^n existuje dokonca menšia perióda rovná trom). Preto aj postupnosť zvyškov čísel B má periódu 6. Naviac je z tabuľky vidno, že B je násobkom trinástich, práve keď číslo n dáva po delení šiestimi zvyšok 2, t.j. je rovné jednému z čísel 2, 8, 14, 20, …

Poznámka: Periodicitu v postupnosti zvyškov po delení mocnín a^k číslom d presnejšie vystihujú *Fermatova* a *Eulerova veta.* Podľa *Fermatovej vety* je v prípade, keď je d prvočíslo, dĺžka periódy rovná niektorému deliteľovi čísla $d - 1$.

B – I – 5

Situáciu znázorňuje obr. 9, v ktorom T je bod dotyku dotyčnice BV, O je stred gule, $|AB| = |BC| = |AC| = 2|AD| = a$, R kolmý priemet bodu T do roviny ABC, $|BT| = |BA| = a$ (dotyčnice), $|TR| = |BR| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.



Obr. 9

Hľadaný polomer r vypočítame z pravouhlého lichobežníka $ARTO$, ktorého stranu $|AR|$ vypočítame z pravouhlého trojuholníka ADR, v ktorom poznáme $|AD| = \frac{1}{2}a$, $|DR| = |BD| - |BR| = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Napokon $|AR|^2 = \frac{1}{2}a^2(3 - \sqrt{6})$, $r = \frac{1}{2}a\big(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\big)$.

B – I – 6

Ďalej budeme hovoriť len o umiestených bodoch a priamkach. Zo 7 bodov možno utvoriť 21 dvojíc a tie ležia na 7 priamkach. Môžu teda nastať len dva prípady:

1) Na každej priamke ležia práve 3 dvojice bodov, t.j. práve 3 body.

2) Na niektorej z priamok ležia viac ako 3 dvojice bodov, t.j. viac ako 3 body.

Pokúsme sa najprv vytvoriť konfiguráciu 7 bodov a 7 priamok typu 1): Zvoľme priamku a na nej 3 body 1, 2, 3. Ďalej zvolíme bod 4 — ten musí ležať mimo priamku 12 (obr. 10). Zostrojíme priamky 14, 24 a 34. Na priamke 24 leží ešte jeden bod 5. Môžeme ho zvoliť

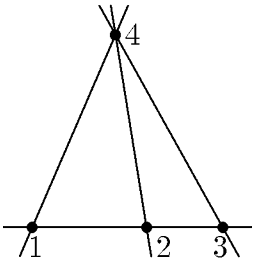
a) vnútri úsečky 24,

b) vnútri polpriamky opačnej k 42,

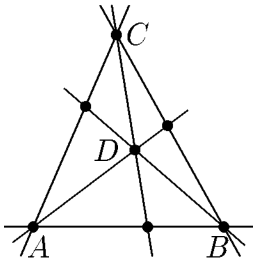
c) vnútri polpriamky opačnej k 24.

Doplníme priamky 15 a 35 a ich priesečníky s priamkami 14, resp. 34. V prípadoch a), b) dôjdeme vždy ku konfigurácii ako na obr. 11. V prípade c) môže ešte nastať niekoľko rôznych situácií podľa toho, kam padne priesečník priamok 15, 34 a priesečník priamok 35, 14, vždy však vedú ku konfigurácii ako na obr. 12.

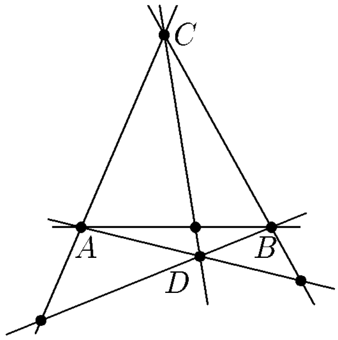
Do každej z týchto dvoch konfigurácií obsahujúcich 7 bodov a 6 priamok zostáva doplniť siedmu priamku tak, aby prechádzala práve tromi body. Každý z bodov A, B, C, D je už spojený s každým zo šiestich ostatných bodov, siedma priamka teda musí



Obr. 10



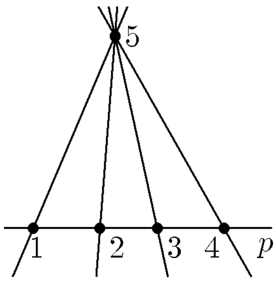
Obr. 11



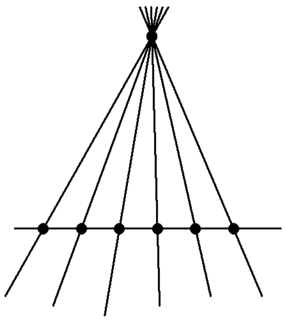
Obr. 12

prechádzať tromi bodmi neoznačenými písmenami. Tie však neležia na priamke, takže žiadna konfigurácia typu 1) neexistuje.

Pristúpime k vytvoreniu konfigurácie typu 2). Vyjdeme od priamky p, na ktorej ležia 4 body. Všetkých 7 bodov na nej ležať nemôže (to by sme nemali 7 rôznych priamok), zvoľme teda piaty bod mimo tejto priamky (obr. 13). Keby ďalší bod ležal mimo priamky p, určoval by spolu s predchádzajúcimi bodmi 3 alebo 5 priamok, čo nie je možné.



Obr. 13



Obr. 14

Zostávajúce dva body teda ležia tiež na priamke p. Úlohe vyhovuje jedine konfigurácia z obr. 14.

B – S – 1

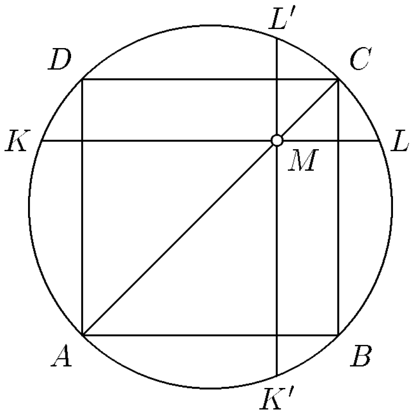
Vzhľadom na to, že $1\overbrace{99\ldots9}^{n}6 = 2(10^{n+1} - 2)$, je toto číslo deliteľné trinástimi, práve keď 10^{n+1} dáva po delení trinástimi zvyšok 2. Po delení čísel 1, 10, 100, … trinástimi však dostávame zvyšky 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, … (ďalej sa zvyšky periodicky opakujú). Preto žiadne z daných čísel nie je deliteľné trinástimi.

Iné riešenie. Ak delíme číslo 199…9 trinástimi obvyklým spôsobom, zapisujeme postupne zvyšky 6, 4, 10, 5, 7, 1, 6, … (ďalej sa zvyšky periodicky opakujú). Posledný krok pri delení čísla 199…96 trinástimi spočíva teda v tom, že trinástimi vydelíme niektoré z čísel 66, 46, 106, 56, 76 alebo 16. Žiadne z nich však nie je deliteľné trinástimi bezo zvyšku.

B – S – 2

Bodom M veďme ešte tetivu $K'L' \parallel BC$ (obr. 15). Zrejme je $|KD| = |LC| = |L'C|$, takže $|KL'| = |DC|$ (úsečka DC je obraz úsečky KL' v otočení okolo stredu kružnice). Platí teda

$$|AB|^2 = |CD|^2 = |KL'|^2 = |KM|^2 + |ML'|^2 = \\ = |KM|^2 + |ML|^2.$$



Obr. 15

B – S – 3

Existuje práve $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dvojíc indexov i, k takých, že $1 \leqq i < k \leqq n$. Preto pre žiadnych n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ neexistuje viac ako $\dfrac{n(n-1)}{2}$ rôznych súčtov a_i+a_k. Na druhej strane, ak je $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, je $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \dots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < < \dots < a_{n-1} + a_n$, a teda medzi súčtami $a_i + a_k$ je vždy aspoň $2n - 3$ rôznych súčtov. Extrémne možnosti nastávajú napr. pre n čísel

a) $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$;

b) $1, 2, 3, \dots, n$.

V našom prípade je $n = 1\,996$.

B – II – 1

Zostavíme tabuľku zvyškov po delení čísel 3^n, 5^n, $5^n - 3^n + 2$ siedmimi:

n	0	1	2	3	4	5	6	...
3^n	1	3	2	6	4	5	1	...
5^n	1	5	4	6	2	3	1	...
$5^n - 3^n + 2$	2	4	4	2	0	0	2	...

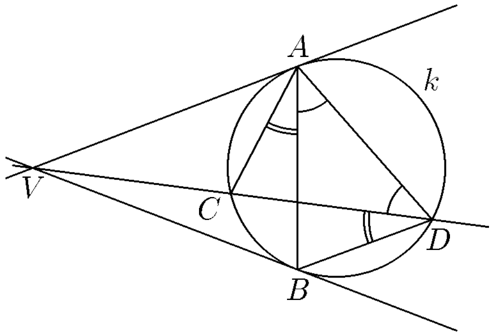
(Šestice zvyškov vo všetkých riadkoch sa periodicky opakujú.)

Vidíme, že riešením úlohy sú práve tie prirodzené čísla n, ktoré po delení šiestimi dávajú zvyšok 4 alebo 5, t.j. čísla tvaru $n = 6k + 4$, $n = 6k + 5$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

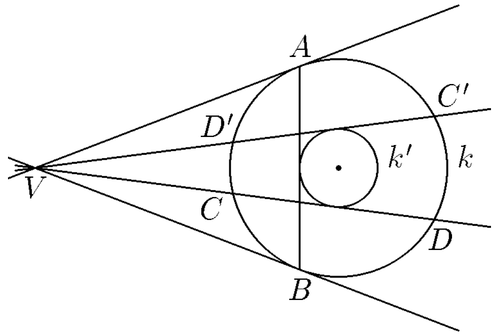
B – II – 2

Rozbor (obr. 16): Ak pre tetivy platí $|AC| = |BD|$, pre odpovedajúce obvodové uhly potom $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle ADC|$. Ďalej je $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CDB|$, takže $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADB|$ a pre príslušné tetivy je $|CD| = |AB|$.

Konštrukcia 1 (obr. 17): Zostrojíme kružnicu k', sústrednú s kružnicou k a dotýkajúcu sa tetivy AB. Hľadaná sečnica kružnice k je dotyčnica kružnice k' vedená z bodu V.

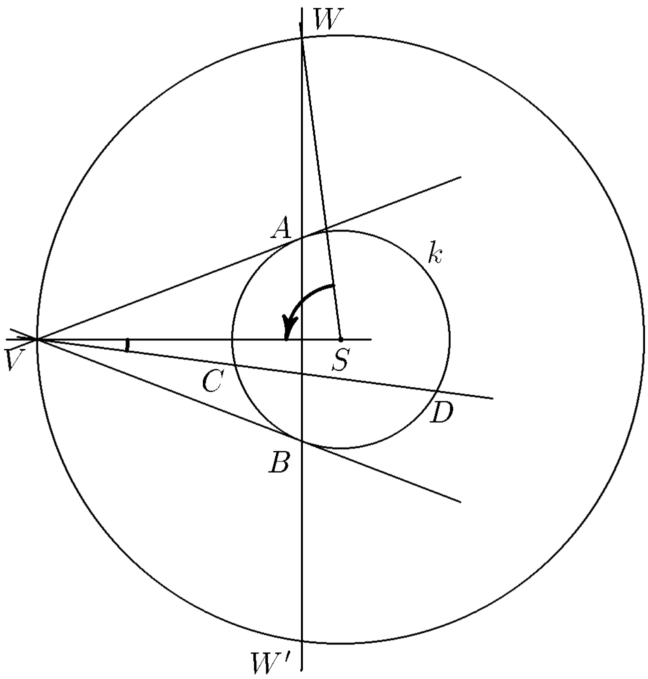


Obr. 16



Obr. 17

Konštrukcia 2 (obr. 18): Hľadanú sečnicu, prechádzajúcu bodom V, dostaneme ako obraz priamky AB v otočení okolo stredu S kružnice k: Zostrojíme kružnicu so stredom S a polomerom $|SV|$, jej priesečníky s priamkou AB označíme W a W'. Uhol otočenia je potom $\sphericalangle WSV$, resp. $\sphericalangle W'SV$ a $|\sphericalangle SVC| = 90^\circ - |\sphericalangle WSV|$.



Obr. 18

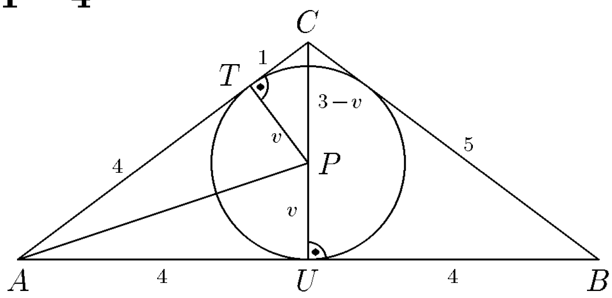
Úloha má vždy dve riešenia.

B – II – 3

Pripusťme, že by pre niektoré číslo r mala daná rovnica dva celočíselné korene a, b. Tretí koreň c musí byť tiež ale celý, pretože $a + b + c = 1\,996$. Všetky tri čísla a, b, c nemôžu byť nepárne, keď je ich súčet párny. Ich súčin je však nepárne číslo $1\,995$, čo nie je možné. Rovnica môže mať teda nanajvýš jeden celočíselný koreň.

B – II – 4

Označme U pätu výšky z vrcholu V v stene ABV. Pretože $VU \perp AB$ a $VP \perp AB$, je priamka AB kolmá na rovinu VUP, takže tiež $PU \perp AB$. Preto je $|\sphericalangle VUP| = 45°$ a trojuholník VUP je pravouhlý a rovnoramenný s ramenami VU, VP, takže $v = |VP| = |PU|$. Ak zopakujeme rovnakú úvahu aj pre bočné steny BCV a CAV,



Obr. 19

zistíme, že bod P je stredom kružnice vpísanej do podstavy ABC a veľkosť v výšky VP je jej polomerom. Úlohu sme tak previedli na výpočet polomeru kružnice vpísanej trojuholníku ABC (obr. 19). Z pravouhlého trojuholníka CUB dostaneme $|CU| = 3$. V pravouhlom trojuholníku PTC potom platí $|CT| = 1$ (pretože $|CT| = |CA| - |AT| = |CA| - |AU|$), $|PT| = v$ a $|CP| = 3 - v$, odkiaľ $1 + v^2 = (3 - v)^2$, takže $v = \dfrac{4}{3}$.

Kategória A

A – I – 1

a) Ukážeme, že celkový súčet vybraných čísel nezávisí na spôsobe ich výberu. Každé číslo v tabuľke je súčtom čísla riadku a stĺpca, v ktorom je umiestnené, preto je celkový súčet čísel rovný súčtu čísel stĺpcov plus súčet čísel riadkov, v ktorých sú umiestnené. Keďže vyberieme z každého stĺpca a každého riadku práve jedno číslo, bude celkový súčet rovný vždy súčtu čísel všetkých stĺpcov plus súčet čísel všetkých riadkov. Ale aj súčet čísel všetkých stĺpcov aj riadkov je rovný súčtu prirodzených čísel $1, 2, \ldots, 8$, preto je súčet vybraných čísel rovný

$$1 + 2 + \ldots + 8 + 1 + 2 + \ldots + 8 = 72,$$

a tento súčet nezávisí od spôsobu výberu čísel, teda je to aj súčet minimálny.

b) Označme a_1 číslo riadku, v ktorom je vybrané číslo z prvého stĺpca. Podobne a_2 číslo riadku, v ktorom je vybrané číslo z druhého stĺpca. Takto označíme a_i číslo riadku, v ktorom je vybrané číslo z i-teho stĺpca, pre $i = 1, 2, \ldots, 8$. Potom je súčin vybraných čísel rovný:

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \cdot \ldots \cdot (8 + a_8), \tag{1}$$

kde $a_1, \ldots, a_8$ je nejaká permutácia čísel $1, \ldots, 8$. Maximálnu hodnotu tohto výrazu môžeme určiť viacerými spôsobmi.

Prvý postup. Keďže máme len konečný počet možností výberu čísel $a_1, \dots, a_8$, maximum skúmaného výrazu zrejme existuje. Ukážeme, že súčin (1) je maximálny, keď $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_8$, čiže $a_1 = 8$, $a_2 = 7, \dots, a_8 = 1$. Nech by napríklad $a_i < a_j$ pre $i < j$. Súčin ostatných výrazov $a_k + k$ sa nezmení ak navzájom vymeníme a_i a a_j. Teraz dokážeme, že pri takejto výmene sa zväčší hodnota $(i + a_i)(j + a_j)$, a teda aj celkový súčin:

$$\begin{aligned}(i + a_i)(j + a_j) &< (j + a_i)(i + a_j)\\ ij + ia_j + ja_i + a_ia_j &< ji + ja_j + ia_i + a_ia_j\\ j(a_i - a_j) + i(a_j - a_i) &< 0\\ (j - i)(a_i - a_j) &< 0.\end{aligned}$$

Ale $i - j < 0$ a zároveň $a_j - a_i > 0$, čiže zámenou hodnôt a_i a a_j sa hodnota výrazu zväčšila. Preto vzrástol aj celý súčin a preto bude výraz maximálny pre $a_1 = 8$, $a_2 = 7, \dots, a_8 = 1$. Vtedy je rovný 9^8.

Druhý postup. Keďže čísla $i + a_i$, $i = 1, 2, \dots, 8$, sú prirodzené, sú aj kladné a môžeme použiť nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom tejto osmice čísel:

$$\sqrt[8]{(a_1 + 1)(a_2 + 2) \cdot \ldots \cdot (a_8 + 8)} \leqq \frac{(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)}{8}.$$

Ale z časti a) už vieme, že súčet $(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)$ je rovný 72 pre každý výber čísel a_i. Preto platí:

$$(a_1 + 1)(a_2 + 2) \cdot \ldots \cdot (a_8 + 8) \leqq \left(\frac{72}{8}\right)^8 = 9^8.$$

Keďže rovnosť v AG-nerovnosti nastáva len vtedy, keď je všetkých osem čísel rovnakých, súčin bude najväčší pre $a_1 + 1 = a_2 + 2 = \ldots = a_8 + 8 = \dfrac{72}{8}$. To však nastáva len pre $a_1 = 8$, $a_2 = 7, \dots, a_8 = 1$. Vtedy je skúmaný súčin rovný 9^8. Preto bude maximálny súčin vybraných čísel v prípade, keď vyberieme čísla na uhlopriečke vedúcej z ľavého horného do pravého dolného rohu.

c) Použijeme rovnaké označenie ako v časti b). Minimalizujeme hodnotu výrazu

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2. \tag{2}$$

Prvý postup. Po roznásobení (2) dostávame

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 + 2(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 8a_8).$$

Keďže časť $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2$ nezávisí na poradí $a_1, \dots, a_8$, potrebujeme minimalizovať výraz $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 8a_8$. O tom, že tento výraz je najmenší práve pre $a_1 = 8$, $a_2 = 7, \dots, a_8 = 1$, sa možno presvedčiť viacerými spôsobmi. Jedným z nich je použitie *Čebyševovej nerovnosti*, druhé, azda najjednoduchšie je použitie podobných úvah ako v časti b) v 1. postupe. Stačí uvážiť, že ak nie je $a_1 > a_2 > \ldots > a_8$, potom musí pre nejaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ platiť $a_i > a_j$ a zároveň $i > j$. Potom však výmenou hodnôt a_i a a_j dostávame:

$$ia_i + ja_j > ja_i + ia_j$$
$$(j - i)(a_j - a_i) > 0, \qquad \text{čiže}$$
$$1a_1 + \ldots + ja_j + \ldots + ia_i + \ldots + 8a_8 > 1a_1 + \ldots + ja_i + \ldots + ia_j + \ldots + 8a_8,$$

a preto takáto voľba nemôže byť najlepšia. Musí teda naozaj platiť $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, …, $a_8 = 1$. A platí:

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2 \geqq 648,$$

kde rovnosť nastáva len v spomínanom prípade.

Druhý postup. Z nerovnosti medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom pre čísla $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, …, $a_8 + 8$ dostávame:

$$\frac{(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2}{8} \geqq \left(\frac{(a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \ldots + (a_8 + 8)}{8}\right)^2 = 81,$$
$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 2)^2 + \ldots + (a_8 + 8)^2 \geqq 648,$$

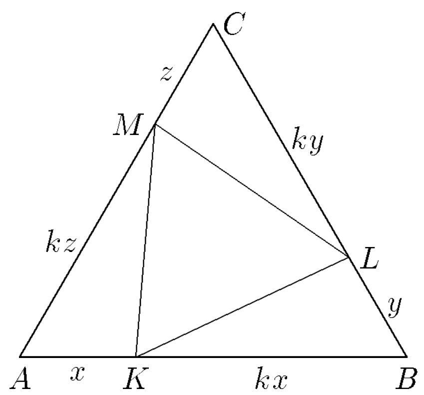
kde rovnosť nastáva len keď sú čísla $a_1 + 1$, $a_2 + 2$, …, $a_8 + 8$ rovnaké, čiže pre $a_1 = 8$, $a_2 = 7$, …, $a_8 = 1$, rovnako ako v časti b).

A – I – 2

Vzhľadom na zadanú rovnosť pomerov

$$0 < \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|BL|}{|BC|} = \frac{|CM|}{|CA|} = \frac{1}{k+1} < 1$$

($k > 0$), môžeme zaviesť nasledujúce označenie: $|AK| = x$, $|KB| = kx$, $|BL| = y$, $|LC| = ky$, $|CM| = z$, $|MA| = kz$ (obr. 20).



Obr. 20

Prvý postup. Použijeme dvakrát kosínusovú vetu:

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC| \cdot \cos\alpha,$$
$$|KM|^2 = |AK|^2 + |AM|^2 - 2|AK||AM| \cdot \cos\alpha.$$

Vylúčením $\cos\alpha$ a použitím nášho označenia dostaneme

$$|MK|^2 = x^2(1-k) + y^2k + z^2(k^2-k).$$

Analogicky

$$|KL|^2 = y^2(1-k) + z^2k + x^2(k^2-k),$$
$$|LM|^2 = z^2(1-k) + x^2k + y^2(k^2-k).$$

Keďže $|MK| = |KL|$, máme

$$x^2(1-k^2) + y^2(2k-1) + z^2(k^2-2k) = 0, \tag{1}$$

podobne z rovností $|KL| = |LM|$, $|LM| = |MK|$

$$y^2(1-k^2) + z^2(2k-1) + x^2(k^2-2k) = 0, \tag{2}$$
$$z^2(1-k^2) + x^2(2k-1) + y^2(k^2-2k) = 0. \tag{3}$$

Vylúčením z^2 z rovníc (1) a (2) dostaneme

$$(x^2-y^2)(k^2-k+1)^2 = 0.$$

Keďže rovnica $k^2-k+1=0$ nemá žiaden reálny koreň, dostávame odtiaľ $x=y$. Analogicky z rovníc (2) a (3) dostaneme $y=z$. Keďže $x=y=z$, tak $|AB| = |BC| = |CA|$.

Druhý postup. Označme obsahy trojuholníkov MAK, KBL, LCM a ABC po rade S_A, S_B, S_C a S. Potom

$$S_A = 0{,}5 \cdot x \cdot kz \cdot \sin\alpha = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot 0{,}5 \cdot (k+1)x \cdot (k+1)z \cdot \sin\alpha = \frac{k}{(k+1)^2}S.$$

Analogicky

$$S_B = \frac{k}{(k+1)^2}S, \qquad S_C = \frac{k}{(k+1)^2}S.$$

Máme $S_A = S_B = S_C$. Keďže trojuholníky MAK, KBL, LCM majú rovnaký obsah a $|MK| = |KL| = |LM|$, tak výšky na strany MK, KL, LM majú rovnaké.

Veďme bodmi A, B, C po rade rovnobežky XY, YZ, ZX po rade s priamkami MK, KL a LM. Trojuholník XYZ je rovnostranný (lebo trojuholník KLM je rovnostranný). Z predchádzajúceho vyplýva, že body K, L, M sú rovnako vzdialené od príslušných strán trojuholníka XYZ, a teda ležia na osiach príslušných uhlov. Preto môžeme zaviesť nasledujúce označenie. (Os uhla rozdeľuje protiľahlú stranu trojuholníka v pomere priľahlých strán.)

$$|AY| = s, \quad |YB| = ks, \quad |BZ| = t, \quad |ZC| = kt, \quad |CX| = u, \quad |XA| = ku.$$

Potom z rovností $|XY| = |YZ| = |ZX|$ dostaneme $ku + s = ks + t = kt + u$. Riešením tejto sústavy dostaneme $s = t = u$. Potom sú trojuholníky AYB, BZC, CXA zhodné, a teda $|AB| = |BC| = |CA|$.

Tretí postup. Zvoľme na stranách KL, LM, MK po rade body D, E, F tak, aby platilo

$$\frac{|LD|}{|DK|} = \frac{|ME|}{|EL|} = \frac{|KF|}{|FM|} = \frac{|AK|}{|KB|} = m.$$

Keďže trojuholník KLM je rovnostranný, tak aj trojuholník DEF je rovnostranný. Nech d_A, d_K, d_M, d_D, d_E sú po rade vzdialenosti bodov A, K, M, D, E od BC. Potom z daných pomerov vyplýva:

$$\begin{aligned} d_K &= \frac{1}{m+1} d_A, \quad & d_M &= \frac{m}{m+1} d_A, \\ d_D &= \frac{m}{m+1} d_K, \quad & d_E &= \frac{1}{m+1} d_M. \end{aligned}$$

Odtiaľ $d_D = d_E = \dfrac{m}{(m+1)^2} d_A$. Potom sú ED a BC rovnobežné. Analogicky sa dokáže, že aj dvojice EF, CA a FD, AB sú rovnobežné. Potom je trojuholník ABC rovnostranný.

A – I – 3

Ak si rekurentné vzťahy prepíšeme na tvar

$$\begin{aligned} a_{3n} &= a_n + a_{2n}, \\ a_{3n+1} &= a_{2n} + a_{2n+1} - a_n, \\ a_{3n-1} &= a_{2n} + a_{2n-1} - a_n \end{aligned}$$

vidíme, že daná postupnosť je jednoznačne určená svojimi prvými dvoma členmi. Nech $a_1 = r, a_2 = s$. Potom priamym výpočtom dostaneme:

$$\begin{gathered} a_3 = r + s, \ a_5 = r + 2s, \ a_7 = r + 3s, \ \dots, \\ a_{17} = r + 8s, \ \dots, \ a_{21} = r + 10s, \ \dots, \\ a_4 = 2s, \ a_6 = 3s, \ a_8 = 4s, \ \dots, \ a_{14} = 7s, \dots \end{gathered}$$

Keďže $a_1 = r$, $a_{14} = 7s$, $a_{17} = r + 8s$, $a_{21} = r + 10s$ sú prvočísla, tak nutne $s = 1$ a potom $r = 3$ (r, $r + 8$, $r + 10$ dávajú pri delení tromi rôzne zvyšky, teda jedno z nich je deliteľné 3). Jedna z možností (aj keď zdĺhavá) je pokračovať v postupnom používaní rekurentných vzťahov, či už od začiatku, alebo od konca, až do výpočtu a_{1995}, a_{2000}. Iná možnosť je vytvoriť si na základe výpočtu prvých členov hypotézu:

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= r + ks, \\ a_{2k} &= ks \qquad \text{pre každé prirodzené } k, \end{aligned}$$

a dokázať ju (môžeme pracovať aj so všeobecnou hypotézou). Vzhľadom na spomínanú jednoznačnosť stačí overiť, že každá takto definovaná postupnosť spĺňa rekurentné vzťahy zo zadania úlohy.

a) n je párne tvaru $n = 2k$

$$\begin{aligned} a_n + a_{2n} &= a_{2k} + a_{4k} = ks + 2ks = 3ks, \\ a_{3n} &= a_{6k} = 3ks, \\ a_n + a_{3n-1} &= a_{2k} + a_{6k-1} = ks + r + (3k-1)s = r + (4k-1)s, \\ a_{2n} + a_{2n-1} &= a_{4k} + a_{4k-1} = 2ks + r + (2k-1)s = r + (4k-1)s, \\ a_n + a_{3n+1} &= a_{2k} + a_{6k+1} = ks + r + 3ks = r + 4ks, \\ a_{2n} + a_{2n+1} &= a_{4k} + a_{4k+1} = 2ks + r + 2ks = r + 4ks. \end{aligned}$$

b) n je nepárne tvaru $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} a_n + a_{2n} &= a_{2k+1} + a_{4k+2} = r + ks + (2k+1)s = r + (3k+1)s, \\ a_{3n} &= a_{6k+3} = r + (3k+1)s, \\ a_n + a_{3n-1} &= a_{2k+1} + a_{6k+2} = r + ks + (3k+1)s = r + (4k+1)s, \\ a_{2n} + a_{2n-1} &= a_{4k+2} + a_{4k+1} = (2k+1)s + r + 2ks = r + (4k+1)s, \\ a_n + a_{3n+1} &= a_{2k+1} + a_{6k+4} = r + ks + (3k+2)s = r + (4k+2)s, \\ a_{2n} + a_{2n+1} &= a_{4k+2} + a_{4k+3} = (2k+1)s + r + (2k+1)s = r + (4k+2)s. \end{aligned}$$

Potom pre $r = 3$ a $s = 1$ dostávame $a_{1995} = 3 + 997 = 1000 = a_{2000}$.

A – I – 4

Po jednoduchej úprave dostávame:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}. \tag{1}$$

Číslo D delí aj a aj b, preto D^2 delí ab. Označme preto $a = Da_1$ a $b = Db_1$, kde a_1, b_1 sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Výraz (1) má potom (po vykrátení) tvar:

$$\frac{Da_1^2 + Db_1^2 + a_1 + b_1}{Da_1 b_1}. \tag{2}$$

Aby bol výraz (2) prirodzené číslo, musí byť čitateľ deliteľný menovateľom, a teda aj jeho všetkými deliteľmi. Preto musí byť čitateľ deliteľný D,

$$D | Da_1^2 + Db_1^2 + a_1 + b_1.$$

Číslo D zrejme delí čísla Da_1^2 a Db_1^2, preto musí platiť

$$D | a_1 + b_1. \tag{3}$$

Keďže čísla a_1, b_1, D sú prirodzené a platí (3), musí zároveň byť

$$D \leqq a_1 + b_1, \tag{4}$$

čo po prenásobení D ($D > 0$) dáva

$$D^2 \leqq a + b.$$

Po odmocnení (obe strany sú kladné):

$$D \leqq \sqrt{a + b}. \tag{5}$$

Ešte musíme zistiť, či niekedy nastane v (5) rovnosť. Zrejme práve vtedy, keď nastáva v (4). Preto musí byť $D = a_1 + b_1$. Aby bola zároveň splnená podmienka $D < a < b$, musí platiť $1 < a_1 < b_1$. Voľme preto $a_1 = 2$ a $b_1 = 5$. Potom musí byť $D = 2 + 5 = 7$, čiže $a = Da_1 = 14$ a $b = Db_1 = 35$. Poľahky sa presvedčíme, že v tomto prípade rovnosť (5) skutočne nastáva.

A – I – 5

Po chvíli skúšania si všimneme, že pre čísla x, y nesúdeliteľné platí:

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(1).$$

Preto keď je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ prvočíselný rozklad čísla n, dostávame, že $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_m^{\alpha_m}) - (m-1)f(1)$. Ďalej zistíme, že $f(p^\alpha) = f(p) = p$, pre p prvočíslo a α ľubovoľné prirodzené číslo. Preto vzniká hypotéza, že vždy:

$$f(n) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1).$$

Najprv dokážeme matematickou indukciou podľa α, že $f(p^\alpha) = f(p) = p$, pre p prvočíslo.

Prvý krok. Pre $\alpha = 1$ tvrdenie platí priamo zo zadania.

Druhý krok. Nech tvrdenie platí pre $\alpha, \alpha \geqq 1$.

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^\alpha) + f(p) - f(D(p^\alpha, p)).$$

Po využití indukčného predpokladu má predchádzajúca rovnica tvar:

$$f(p^{\alpha+1}) = f(p^{\alpha}) + f(p) - f(p) = f(p^{\alpha}) = f(p) = p.$$

V druhej časti dokážeme, že ak $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ je prvočíselný rozklad čísla $n \geqq 2$ ($p_1, p_2, \dots, p_m$ sú rôzne prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sú prirodzené čísla), potom

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) = p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1).$$

Opäť tvrdenie dokážeme indukciou, tentokrát podľa veľkosti počtu m prvočíselných deliteľov čísla n.

Prvý krok. Pre $m = 1$ je tvrdenie zrejmé (dokázali sme ho v predchádzajúcich riadkoch).

Druhý krok. Nech tvrdenie platí pre $m, m \geqq 1$. Potom platí:

$$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}) + f(p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) - f(D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}})).$$

Keďže ale $D(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) = 1$, potom má po použití indukčného predpokladu predchádzajúca rovnica tvar:

$$\begin{aligned} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}) &= p_1 + p_2 + \dots + p_m - (m-1)f(1) + p_{m+1} - f(1) = \\ &= p_1 + \dots + p_{m+1} - mf(1). \end{aligned} \tag{1}$$

Teraz ešte zostáva ukázať, že takto definovaná funkcia f vyhovuje zadanej podmienke pre ľubovoľnú hodnotu $f(1)$. Nech a a b sú prirodzené čísla. Označme $c = D(a, b)$. Číslo c má provčíselný rozklad $c = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$. Potom zrejme prvočíselný rozklad čísla a má tvar

$$a = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}}.$$

Podobne b má prvočíselný rozklad

$$b = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_t^{\gamma_{m+t}}.$$

Zároveň vieme, že prvočísla $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_s$ a $r_1, \dots, r_t$ sú všetky navzájom rôzne. Preto je rozklad čísla $a \cdot b$ na prvočinitele

$$a \cdot b = p_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots p_m^{\beta_m+\gamma_m} q_1^{\beta_{m+1}} \dots q_s^{\beta_{m+s}} r_1^{\gamma_{m+1}} \dots r_t^{\gamma_{m+t}}.$$

Podmienka zo zadania hovorí:

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b) - f(D(a, b)). \tag{2}$$

Spočítajme funkčné hodnoty f v bodoch $a, b, a \cdot b, c$ pomocou (1):

$$\begin{aligned} f(a) &= p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_s - (m+s-1)f(1) \\ f(b) &= p_1 + \dots + p_m + r_1 + \dots + r_t - (m+t-1)f(1) \\ f(a \cdot b) &= p_1 + \dots + p_m + q_1 + \dots + q_s + r_1 + \dots + r_t - (m+s+t-1)f(1) \\ f(c) &= p_1 + \dots + p_m - (m-1)f(1). \end{aligned}$$

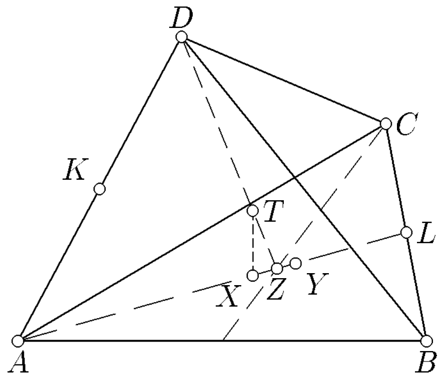
Poľahky nahliadneme, že po dosadení týchto hodnôt do (2) dostaneme identitu (ešte je potrebné uvedomiť si, že všetky tieto úvahy sú korektné aj v prípadoch $m = 0$, $s = 0$, $t = 0$). Preto je funkcia f definovaná pomocou (1) jediným riešením danej úlohy pre ľubovoľnú hodnotu $f(1)$.

A – I – 6

Zaveďme nasledujúce označenie: L a K sú stredy hrán BC a AD, X a Y sú kolmé priemety bodov T a O do roviny ABC a Z je ťažisko trojuholníka ABC (obr. 21).

V ďalšom budeme využívať nasledujúce vlastnosti:

- Body A, T, D, K, L ležia v jednej rovine, označme ju δ ($K = \frac{(A+D)}{2}, L = \frac{(B+C)}{2}, T$ je stred KL, $T = \frac{(K+L)}{2} = \frac{(A+B+C+D)}{4}$).
- Body O, T, X, Y ležia v jednej rovine, označme ju α.
- Y je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC.
- T leží v štvrtine ZD, bližšie k bodu Z ($Z = \frac{(A+B+C)}{3}$).
- Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, ak je kolmá na jej 2 rôznobežné priamky (potom je kolmá na všetky priamky roviny).



Obr. 21

Predovšetkým musíme vylúčiť prípad $O = T$, lebo vtedy OT nie je priamka.

a) Keďže TO je kolmá na δ, tak TO je kolmé na KL, a teda $|OL| = |OK|$. Potom $|AD| = |BC| = 12$ cm. Čiže D leží na guľovej ploche $\mathcal{G}$ so stredom A a polomerom 12 cm.

Naopak, ak D leží na $\mathcal{G}$, tak $|AD| = |BC| = 12$ cm. Potom $|OL| = |OK|$, a teda OT je kolmá na KL.

b) Keďže TX je kolmá na AL (TX je kolmá na rovinu ABC) a TO je kolmá na AL (TO je kolmá na δ), tak AL je kolmá na α. Rovina α je ale jednoznačne určená bodmi A, B, C (prechádza bodom Y a je kolmá na AL). Nech β je rovina, ktorá vznikne zrovnoľahlením α podľa rovnoľahlosti so stredom Z a koeficientom 4. Tá je tiež jednoznačne určená bodmi A, B, C (je kolmá na AL a prechádza bodom S, ktorý vznikne zrovnoľahlením bodu Y spomínanou rovnoľahlosťou) a leží v nej bod D. Naopak, ak D leží v β, tak ľahko nahliadneme, že X, Y, T, O ležia v rovine α, ktorá je kolmá na AL. Preto TO je kolmé na AL.

Prípad $O = T$ nastáva práve vtedy, ak DS je kolmá na rovinu ABC (DS vznikne zrovnoľahlením $|TY| = |OY|$).

Množina bodov D je teda kružnica (bez 4 bodov tvoriacich vrcholy štvorca, 2 z nich sú body roviny ABC), ktorá je prienikom guľovej plochy $\mathcal{G}$ a roviny β.

Iné riešenie. *(myšlienky)*

Predovšetkým $|AL| = 8$ cm. Zaveďme súradnicový systém tak, že BC je os x-ová ($B = (-6; 0; 0), C = (6; 0; 0)$ a AL je os y-ová ($A = (0; 8; 0)$). Nech $D = (x; y; z)$.

Z podobnosti trojuholníkov BLA a YNA (N je stred AC) dostaneme $|AY| = 6,25$. Potom $Y = (0; 1,75; 0)$ a $O = (0; 1,75; a)$.

$$T = \frac{(A + B + C + D)}{4} = \left(\frac{x}{4}; 2 + \frac{y}{4}; \frac{z}{4}\right).$$

Keďže OT je kolmá na AL, tak $OT \cdot AL = 0$. Odtiaľ dostaneme $y = -1$. Keďže OT je kolmá na LD, tak $OT \cdot LD = 0$. Odtiaľ dostaneme $x^2 + z^2 = 4az$ (už sme využili, že $y = -1$). Z rovnosti $|OA| = |OD|$ dostaneme $2x^2 + 2z^2 - 4za = 63$. (Už sme využili, že $y = -1$) Z posledných dvoch rovností máme $x^2 + z^2 = 63$. Teda súradnice bodu D spĺňajú podmienky $y = -1$ a $x^2 + z^2 = 63$.

A – S – 1

Upravíme obidva výrazy:

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab} \tag{1}$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 + b^3}{ab} \tag{2}$$

Pravé strany rovností (1), (2) sú celé čísla, preto musí $b|a^2 + a + b^2 + b$ a $b|a^3 + b^3$ (označenie $x|y$ znamená, že číslo x delí číslo y). Mocniny čísla b sú však deliteľné číslom b, preto musí platiť $b|a^2 + a$ a $b|a^3$ (označme tieto vzťahy (3)). Teraz možno viacerými spôsobmi ukázať, že potom platí aj $b|a$.

1) Z (3) vyplýva, že b delí aj číslo $a^3 - (a-1)(a^2 + a) = a$, čiže skutočne $b|a$.
2) Z (3) vyplýva, že b delí súčin dvoch nesúdeliteľných čísel a a $a+1$, teda delí práve jedno z nich (ak nie je jednotka). Keďže navyše delí aj a^3, musí byť deliteľom a.
3) Keď b delí $a^2 + a$, delí iste aj a-násobok tohto výrazu, čiže $a^3 + a^2$. Celé číslo b teda delí aj $a^3 + a^2$ aj a^3. Preto delí aj ich rozdiel a^2. My ale vieme, že b delí aj $a^2 + a$, preto delí aj číslo $a^2 + a - a^2 = a$, teda $b|a$.

Úloha je však vzhľadom na a a b symetrická, čiže zároveň platí aj $a|b$. Z toho už vyplýva $|a| = |b|$. Môžu nastať dve možnosti:

1) Pre $a = b$ sa dané výrazy zrejme rovnajú po rade $\frac{2(a+1)}{a}$ a $2a$. Vzhľadom na to, že čísla a a $a+1$ sú nesúdeliteľné, platí $a|2$ (prvý výraz musí byť celočíselný). Dostávame riešenia $a = b = -2, -1, 1, 2$.
2) Pre $a = -b$ sa dané výrazy vždy rovnajú po rade -2 a 0. V tomto prípade dostávame riešenia $a = -b = t$, kde t je ľubovoľné nenulové celé číslo.

A – S – 2

Pre $n = 2$ má platiť nerovnosť $4 \geqq 1 + 2q^2$, odkiaľ vyplýva horný odhad pre číslo q: $q \leqq \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Dokážeme matematickou indukciou, že číslo $q = \frac{\sqrt{6}}{2}$ má skúmanú vlastnosť.

1° Vzhľadom na voľbu čísla q, tvrdenie pre $n = 2$ platí.
2° Nech tvrdenie platí pre $n = k \geqq 2$, čiže $2^k \geqq 1 + kq^k$. Potom

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \geqq 2 + 2k \cdot q^k.$$

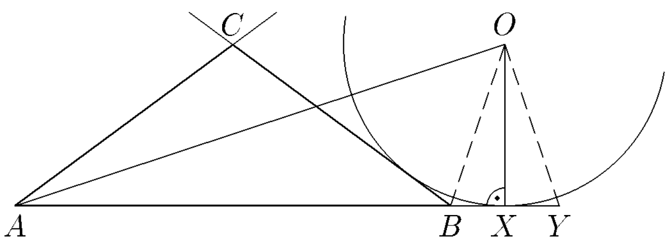
Zrejme stačí dokázať, že platí

$$2 + 2k \cdot q^k \geqq 1 + (k+1)q^{k+1},$$

čiže $1 \geqq q^k[(k+1)q - 2k]$. Posledná nerovnosť zrejme platí, pokiaľ $(k+1)q - 2k \leqq 0$, alebo $k \geqq \dfrac{q}{2-q}$ (pre naše q platí $2 - q < 0$). Ale pre $q = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ dostávame

$$k \geqq \frac{\sqrt{6}}{4-\sqrt{6}} = \frac{3+2\sqrt{6}}{5} \doteq 1,58.$$

Avšak podľa predpokladu $k \geqq 2$, a preto dokazované tvrdenie platí aj pre $n = k + 1$.
Odpoveď: Hľadané najväčšie q je rovné číslu $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



Obr. 22

A – S – 3

Označme X bod dotyku kružnice pripísanej k strane BC s priamkou $\overleftrightarrow{AB}$ (obr. 22). Keďže AO je os uhla $\sphericalangle CAB$ a BO je os uhla $\sphericalangle CBX$, tak $|\sphericalangle OAB| = \dfrac{\alpha}{2}$ $(|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = \alpha)$, $|\sphericalangle OBX| = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Na polpriamke $\overrightarrow{BX}$ zvoľme bod Y, $Y \neq B$ tak, aby $|BX| = |XY|$. Potom v trojuholníku AYO platí:

$$|AO| = 9 \text{ cm}, \qquad |OY| = |OB| = 3\,\text{cm},$$

$$|\sphericalangle AOY| = 180° - |\sphericalangle OAB| - |\sphericalangle XYO| = 180° - \frac{\alpha}{2} - |\sphericalangle XBO| = 90°.$$

Odtiaľ vyplýva konštrukcia:
1. $\triangle AYO$; podľa vety *sus*: $|AO| = 9$ cm, $|OY| = 3$ cm, $|\sphericalangle AOY| = 90°$,
2. X; $X \in AY$, $OX \perp AY$,
3. B; $B \in AX$, $|XB| = |XY|$,
4. $\overrightarrow{AD}$; $|\sphericalangle BAD| = 2 \cdot |\sphericalangle BAO|$, $D \in \overrightarrow{BO}$,
5. $\overrightarrow{BE}$; $|\sphericalangle ABE| = 2 \cdot |\sphericalangle BAO|$, $E \in \overrightarrow{AO}$,
6. C; $C \in \overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BE}$.

Poznámka: Riešiteľ môže postupovať aj inak. Najprv si vyjadrí všetky potrebné uhly pomocou uhla α a ďalej môže pokračovať napríklad

a) použitím *sínusovej vety* v trojuholníku ABO zistí $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$,

b) z podobnosti $\triangle AXO \sim \triangle OXB$ zistí $\dfrac{|BX|}{|OX|} = \dfrac{1}{3} \left(= \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{|OX|}{|AX|} \right)$.

Potom môže začať konštruovať trojuholník BXO alebo AXO. Prípadne ešte pomocou *Pytagorovej vety* počíta ďalej:

$$|BX| = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad |OX| = \frac{9\sqrt{10}}{10}, \quad |AX| = \frac{27\sqrt{10}}{10}, \quad |AB| = \frac{24\sqrt{10}}{10},$$

a zostrojí príslušné výrazy.

A – II – 1

Pre $n = 1$ také číslo samozrejme neexistuje, pre $n = 2$ je príkladom takého čísla číslo 13. Pre $n = 3$ a $n = 4$ také čísla neexistujú, pretože ani žiadne z čísel 301, 211, 121, 103, ani žiadne z čísel 3 001, 2 101, 2 011, 1 201, 1 111, 1 021, 1 003 nie je násobkom trinástich. (Vypísali sme všetky nepárne troj- a štvorciferné čísla s ciferným súčtom 4.) Pre väčšie n sa takéto číslo vždy dá nájsť. Stačí uvažovať n-ciferné číslo $1001 + 10^{n-4} \cdot 1001$. Toto číslo je evidentne deliteľné 13-timi (lebo $1001 = 13 \cdot 77$), pre $n \geqq 5$ je aj nepárne (končí sa na jednotku) a jeho ciferný súčet je zrejme 4.

Iné riešenie. Najprv obdobne ako v prvom type riešenia ukážeme, že pre $n = 2$ také číslo existuje a pre $n = 1, 3, 4$ neexistuje. Všimnime si teraz, aké zvyšky po delení trinástimi dávajú jednotlivé mocniny 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, … :

číslo:	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	…
jeho zvyšok:	1	10	9	12	3	4	1	10	9	…

Vidíme, že zvyšok čísla 10^n po delení trinástimi závisí len od toho, aký je zvyšok čísla n po delení šiestimi (tvrdenie sa ľahko dokáže matematickou indukciou):

n je tvaru:	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
zvyšok čísla 10^n:	1	10	9	12	3	4

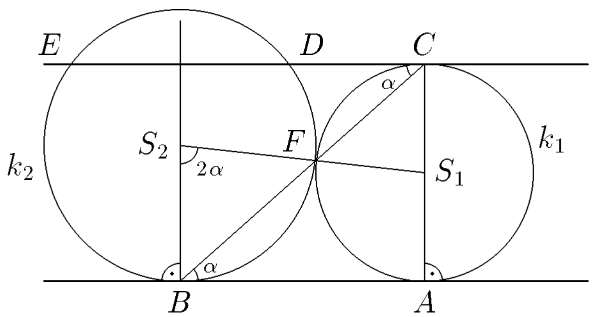
S pomocou tejto tabuľky nájdeme príklady n-ciferných čísel s potrebnou vlastnosťou pre každé prirodzené $n \geqq 5$:

počet cifier	číslo	rovné	dáva rovnaký zvyšok ako
$6k$ $(k \geqq 1)$	$100\ldots01101$	$10^{6k-1} + 1101$	$4 + 12 + 9 + 1 = 26$
$6k+1$ $(k \geqq 1)$	$200\ldots011$	$2 \cdot 10^{6k} + 11$	$2 \cdot 1 + 11 = 13$
$6k+2$ $(k \geqq 0)$	$100\ldots03$	$10^{6k+1} + 3$	$10 + 3 = 13$
$6k+3$ $(k \geqq 1)$	$100\ldots0101001$	$10^{6k+2} + 101001$	$9 + 4 + 12 + 1 = 26$
$6k+4$ $(k \geqq 1)$	$100\ldots010011$	$10^{6k+3} + 10011$	$12 + 3 + 11 = 26$
$6k+5$ $(k \geqq 0)$	$100\ldots01011$	$10^{6k+4} + 1011$	$3 + 12 + 11 = 26$

Odpoveď: $n = 2, n \geqq 5$.

A – II – 2

Ukážme, že F leží na BC. Nech $|\sphericalangle FBA| = \alpha$. Potom $|\sphericalangle FBS_2| = 90° - \alpha$ (obr. 23). Ďalej $|\sphericalangle BFS_2| = 90° - \alpha$. Z trojuholníka FBS_2 potom $|\sphericalangle BS_2F| = 2\alpha \Rightarrow |\sphericalangle AS_1F| = 180° - 2\alpha$. Z vety o obvodovom a stredovom uhle $|\sphericalangle ACF| = 90° - \alpha$. Z toho napokon $|\sphericalangle FCD| = \alpha$. Uhly $|\sphericalangle FCD| = |\sphericalangle FBA| = \alpha$ sú striedavé, a preto $F \in BC$. Toto tvrdenie ($F \in BC$) možno dokázať aj pomocou rovnoľahlosti kružníc k_1, k_2 podľa stredu F.



Obr. 23

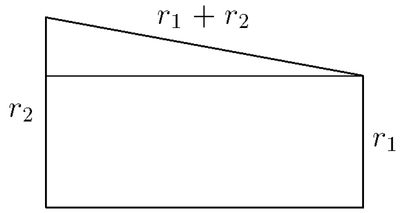
Ďalej vieme, že trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole A. Stred kružnice opísanej trojuholníku ABC leží potom na BC. Preto dokazované tvrdenie zo zadania platí, práve keď stred kružnice opísanej trojuholníku ADE leží na BC. Keďže DE je strana trojuholníka ADE a priamka S_2B je osou tejto strany, potom vzhľadom na to, že bod B leží na priesečníku BS_2 a BC, musí byť práve on stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE. Preto na dôkaz zadaného tvrdenia stačí dokázať $|BE| = |BD| = |BA|$.

Rovnosť $|BE| = |BD|$ je zrejmá. Teraz spočítajme $|BA|$ (obr. 24). (Úvahy, ktoré tu prevádzame sú pre prípad na obrázku ($2r_1 > r_2$), v opačnom prípade sa vykonajú úplne analogicky.)

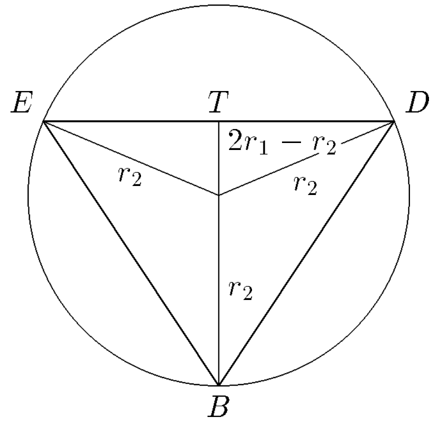
$$|BA| = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{4r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

Ešte spočítajme $|BD|$ (obr. 25).

$$|TD|^2 = r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2,$$



Obr. 24



Obr. 25

$$|BD|^2 = |TD|^2 + |TB|^2 = r_2^2 - (2r_1 - r_2)^2 + (2r_1)^2 = 4r_1r_2, \qquad |BD| = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

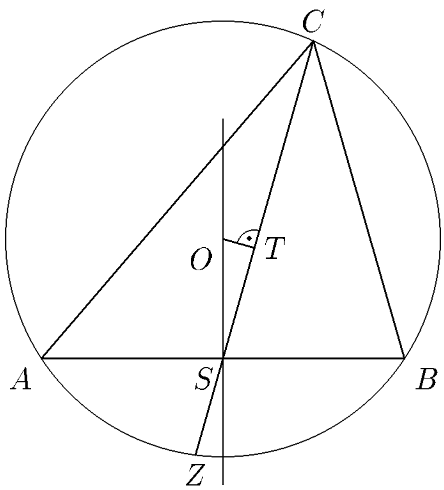
Dostali sme rovnosť $|BD| = |BA|$, teda B je stredom kružnice opísanej trojuholníku ADE, a preto všetky tri stredy kružníc ležia na priamke BC.

A – II – 3

Označme S stred úsečky AB, k kružnicu opísanú trojuholníku ABC, Z priesečník priamky CS s k ($Z \not\equiv C$) (obr. 26). Pretože $OT \perp CZ$, je T stredom tetivy CZ, naviac $|SC| = 3 \cdot |ST|$ (ťažisko), takže $|SZ| = |ST|$. Dvojakým vyjadrením mocnosti bodu S ku kružnici k (možno použiť aj podobnosť trojuholníkov AZS a CBS) máme

$$|SA| \cdot |SB| = |SZ| \cdot |SC|,$$

alebo $|SA|^2 = \dfrac{1}{3}|SC| \cdot |SC|$, čiže $|SC| = \sqrt{3}|SA|$. Bod C leží teda na kružnici $k_1(S; \sqrt{3}|SA|)$.



Obr. 26

Naopak, označme A_0, B_0 priesečníky priamky AB s kružnicou k_1, E, F priesečníky osi úsečky AB s kružnicou k_1, a nech C je ľubovoľný bod kružnice k_1 rôzny od A_0, B_0, E, F. Potom z mocnosti bodu S ku kružnici k (opäť možno úspešne použiť aj podobnosť trojuholníkov) vyplýva

$$|SZ| = \frac{|SA|^2}{|SC|} = \frac{|SA|}{\sqrt{3}} = \frac{|SC|}{3} = |ST|,$$

teda T je stred tetivy CZ, a preto buď $O = T$ alebo $OT \perp CZ$. Prípad $O = T$ môže nastať len pre T z osi úsečky AB, t.j. $CS \perp AB$, čiže $C \in \{E, F\}$, čo sme však vylúčili. Vzniknutý trojuholník ABC teda vyhovuje podmienkam úlohy.

Odpoveď: Hľadané geometrické miesto bodov je kružnica k_1 $(S; \sqrt{3}|SA|)$ bez bodov A_0, B_0, E, F.

A – II – 4

Rozdelenie nemohlo opäť dopadnúť *dobre*. Postupujme sporom. Označme počet náčelníkov v prvom výbere k a v druhom l. Nech $k \neq l$ a nech obe rozdelenia dopadli *dobre*. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $l > k$ (inak výbery vymeníme, zrejme na ich poradí nezáleží). Keďže druhýkrát bolo družín viac, musia (z *Dirichletovho princípu*) existovať aspoň dvaja náčelníci tohto výberu, ktorí boli v prvom výbere v jednej družine (označme túto družinu M). Ani jeden z nich nemohol byť náčelníkom M, inak by museli byť kamaráti a druhé rozdelenie by potom nemohlo vyjsť *dobre*. Potom ale majú obaja spoločného kamaráta – náčelníka družiny M, preto druhé rozdelenie nemohlo vyjsť *dobre* ani v tomto prípade. To je spor s predpokladom $k \neq l$.

A – III – 1

a) Postupujme sporom. Nech existuje také prirodzené číslo k, že

$$G(k-1) = G(k) = G(k+1) = A.$$

Potom zo zadania platia nasledujúce vzťahy

$$\begin{aligned} A &= G(k+1) = k+1-G(G(k)) = k+1-G(A),\\ A &= \quad G(k) \quad = k-G(G(k-1)) = k-G(A). \end{aligned}$$

Z toho ale $k+1 = G(A) + A = k$, čo je hľadaný spor, pretože $k+1 \neq k$.

Dokázali sme, že neexistuje také k, pre ktoré $G(k-1) = G(k) = G(k+1)$.

b) Po krátkom pozorovaní prvých členov postupnosti si môžeme všimnúť, že pre malé n je rozdiel $G(n) - G(n-1)$ buď 0 alebo 1. Toto tvrdenie (z ktorého už jednoducho vyplýva tvrdenie b)) pre každé prirodzené číslo n dokážeme matematickou indukciou.

1° Pre $n = 1$ platí zo zadania $G(0) = 0$, $G(1) = 1 - G(G(0)) = 1$, čiže $G(1) - G(0) = 1$, tvrdenie platí.

2° Nech $G(k) - G(k-1) \in \{0, 1\}$ pre každé prirodzené $k \leqq n$. Odtiaľ predovšetkým vyplýva, že $0 \leqq G(k) \leqq k$ pre každé $k \leqq n$, pretože $G(0) = 0$. Ďalej $G(n+1) - G(n) = 1 + G(G(n-1)) - G(G(n))$. Ak $G(n-1) = G(n)$, potom aj $G(G(n-1)) = G(G(n))$, a teda $G(n+1) - G(n) = 1$. V opačnom prípade $G(n) = G(n-1) + 1$, z čoho potom $G(G(n-1)) - G(G(n)) = G(a) - G(a+1)$, kde $a = G(n-1)$ je nezáporné celé číslo neprevyšujúce $n-1$, preto môžeme opäť použiť indukčný predpoklad, t.j. $G(a) - G(a+1) \in \{-1, 0\}$. To znamená, že $G(n+1) - G(n) = 1 + G(a) - G(a+1) \in \{0, 1\}$. Tým sme dôkaz indukciou a zároveň dôkaz tvrdenia zo zadania ukončili.

A – III – 2

Nech V je pevný vnútorný bod trojuholníka PQR. Steny ABD, BCD a CAD (zatiaľ neznámeho) štvorstena $ABCD$ sklopíme do roviny ABC. Tak dostaneme sieť tohto štvorstena, ohraničenú lomenou čiarou $AD_1BD_2CD_3A$. Našou úlohou je určiť bod D tak, aby trojuholník $D_1D_2D_3$ bol ostrouhlý, obsahoval $\triangle ABC$ a aby bod V bol stredom jemu opísanej kružnice. Platí totiž tvrdenie: Ak je S stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku KLM, potom pre každý jeho bod $X \neq S$ platí

$$\min\{|XK|, |XL|, |XM|\} < |SK| \, (= |SL| = |SM|) \, .$$

(To vyplýva z toho, že celý trojuholník KLM je pokrytý tromi kruhovými výsekmi so stredmi K, L, M a polomerom $|SK|$, každý bod $X \neq S$ leží vnútri jedného z nich.)

Potrebujeme dosiahnuť, aby priamka AV bola osou úsečky D_1D_3, priamka BV osou D_2D_1 a priamka CV osou D_3D_2. Musí teda platiť

$$|\sphericalangle D_1D_2D_3| = \pi - |\sphericalangle BVC|, \; |\sphericalangle D_2D_3D_1| = \pi - |\sphericalangle CVA|, \; |\sphericalangle D_3D_1D_2| = \pi - |\sphericalangle AVB| \, .$$

Vďaka tomu, že $V \in \triangle PQR$, sú uhly BVC, CVA a AVB tupé (uvážme Tálesove kružnice s priemermi BC, CA a AB) a vnútorné uhly hľadaného trojuholníka $D_1D_2D_3$ sú známe a ostré. Môžeme teda zostrojiť ľubovoľný trojuholník $D'_1D'_2D'_3$ podobný neznámemu trojuholníku $D_1D_2D_3$, označiť V' stred jemu opísanej kružnice a na troch polpriamkach s počiatkom V', ktoré prechádzajú stredmi strán $D'_3D'_1$, $D'_1D'_2$ a $D'_2D'_3$, vybrať (dostatočne blízko k bodu V') po rade body A', B' a C' tak, aby $\triangle A'B'C' \sim \sim \triangle ABC$. Potom lomená čiara $A'D'_1B'D'_2C'D'_3A'$ ohraničuje sieť niektorého štvorstena $A'B'C'D'$, ktorý je podobný s hľadaným štvorstenom $ABCD$.

A – III – 3

Označme dané podmnožiny A_1, A_2, …, A_6. Tvrdenie dokážeme indukciou podľa počtu n prvkov množiny X. Začneme s prípadom $n = 6$. (Ak má množina X menej ako 6 prvkov, doplníme ju na šesťprvkovú pridaním nových prvkov, ktoré nezmenia množiny A_i.) Pretože $\binom{6}{3} = 20 > 2 \cdot 6$, existuje trojprvková množina $Y \subset X$, ktorá sa nerovná ani žiadnej množine A_i, ani žiadnemu doplnku $X \setminus A_i$. Ak ofarbíme prvky Y jednou a prvky $X \setminus Y$ druhou farbou, dostaneme *správne* (hľadané) ofarbenie.

Teraz predpokladajme, že množina X má aspoň 7 prvkov. Potom existuje dvojica rôznych prvkov $u, v \in X$, ktoré neležia spolu v žiadnej množine A_i. (Dvojíc prvkov, ktoré ležia spolu v niektorej množine A_i je totiž najviac $6 \cdot \binom{3}{2} = 18$, kým všetkých dvojíc prvkov z X je aspoň $\binom{7}{2} = 21$.) Teraz *zlepíme* dvojicu prvkov u, v do jedného nového prvku w. Inými slovami, pokiaľ množina A_i obsahuje prvok u alebo v, nahradíme ho prvkom w. Dostaneme opäť šesť trojprvkových podmnožín množiny X', ktorá má o jeden prvok menej ako pôvodná množina X. Prvky množiny X' môžeme podľa indukčného predpokladu *správne* ofarbiť; ak dáme prvkom u, v farbu prvku w a farby ostatných prvkov v X' zachováme, dostaneme *správne* ofarbenie množiny X.

A – III – 4

Trojuholníky ALK a BYL sú podobné, pretože $|\sphericalangle LAK| = |\sphericalangle YBL|$ $(|CA| = |CB|)$

$$\text{a} \qquad \frac{|KA|}{|LA|} = \frac{|LB|}{|YB|} \qquad \text{(zo zadania)}.$$

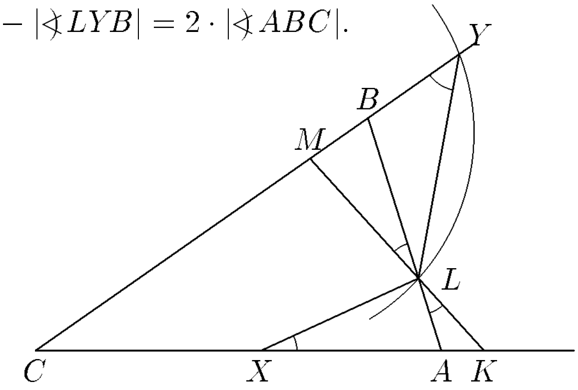
Odtiaľ $|\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BYL|$ (obr. 27). Analogicky z podobnosti trojuholníkov ALX a BML dostávame $|\sphericalangle AXL| = |\sphericalangle MLB|$. Keďže však body M, L a K ležia na priamke, platí tiež $|\sphericalangle MLB| = |\sphericalangle ALK|$. Potom $|\sphericalangle LYB| = |\sphericalangle ALK| = |\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$. Teraz

$$|\sphericalangle XLY| = |\sphericalangle XLB| + |\sphericalangle BLY| =$$
$$= (|\sphericalangle XAL| + |\sphericalangle AXL|) + |\sphericalangle ABM| - |\sphericalangle LYB| = 2 \cdot |\sphericalangle ABC|.$$

Z toho už vyplýva konštrukcia:

1. oblúk XDY, v polrovine $\overrightarrow{XYA}$, $|\sphericalangle XDY| = 2 \cdot |\sphericalangle ABC|$,
2. L; $L \in k \cap AB$,
3. $\sphericalangle BLM$; $M \in BC$, $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle AXL|$,
4. K; $K \in LM \cap \overrightarrow{CA}$.

Správnosť konštrukcie vyplýva z rozboru.
Úloha má vždy práve jedno riešenie.



Obr. 27

A – III – 5

Z daného vzťahu b) pre $x = y$ vyplýva $f(x^2) = f(x \cdot x) = (k+2) \cdot f(x)$. Dvojnásobnou aplikáciou predošlého vzťahu dostaneme

$$f(x^4) = f(x^2 \cdot x^2) = (k+2) \cdot f(x^2) = (k+2)^2 \cdot f(x).$$

Iným postupom však dostaneme

$$f(x^4) = f(x \cdot x^3) = f(x) + f(x^3) + k \cdot f(x) = (k+1) \cdot f(x) + f(x \cdot x^2) =$$
$$= (k+1) \cdot f(x) + f(x) + f(x^2) + k \cdot f(x) = (2k+2) \cdot f(x) + f(x^2) = (3k+4) \cdot f(x).$$

Teraz stačí nájsť ľubovoľné x, pre ktoré je $f(x)$ rôzne od 0, teda napríklad podľa zadania $x = 1995$. Potom porovnaním predchádzajúcich dvoch vzťahov dostaneme podmienku

$$(k+2)^2 \cdot f(1995) = f(1995^4) = (3k+4) \cdot f(1995),$$
$$(k+2)^2 = (3k+4),$$
$$k \in \{0, -1\}.$$

Pre $k = -1$ dostávame funkcionálnu rovnicu z úlohy A–I–5. Vieme, že jej všeobecným riešením je pre $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkcia

$$f(x) = f(p_1) + \dots + f(p_n) - (n-1)f(1).$$

Podmienku a) úlohy možno splniť napríklad voľbou $f(5) = 1996$, $f(p) = 0$, pre všetky prvočísla p rôzne od 5 a $f(1) = 0$.

Pre $k = 0$ dostávame funkcionálnu rovnicu $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$. Jej všeobecným riešením je pre $x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ funkcia

$$f(x) = \alpha_1 \cdot f(p_1) + \ldots + \alpha_n \cdot f(p_n),$$

a $f(1) = 0$, kde $f(p_i)$ sú ľubovoľné. Opäť stačí zvoliť $f(1)$ a $f(p_i) = 0$ ako vyššie.

A – III – 6

Dokážeme, že ak sú kružnice opísané trojuholníkom AKM, BLK a CML zhodné, potom je trojuholník ABC rovnostranný. Označme strany a uhly trojuholníka ABC obvyklým spôsobom. Z rovností

$$|KL| = 2R \sin\beta\,, \quad |LM| = 2R\sin\gamma\,, \quad |MK| = 2R\sin\alpha\,,$$

kde R je spoločný polomer troch opísaných kružníc, vyplýva

$$|KL| : |LM| : |MK| = \sin\beta : \sin\gamma : \sin\alpha\,,$$

takže $\triangle ABC \sim \triangle LMK$. Preto platí

$$|KL| = \lambda \cdot b\,, \quad |LM| = \lambda \cdot c\,, \quad |MK| = \lambda \cdot a\,,$$

pritom koeficient podobnosti λ zistíme úvahou o obsahoch trojuholníkov: z rovností

$$S_{AKM} = S_{BLK} = S_{CML} = \frac{2}{9} \cdot S_{ABC}$$

vyplýva, že $S_{KLM} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC}$, takže $\lambda^2 = \frac{1}{3}$. Teraz zapíšeme kosínusové vety pre trojuholníky ABC a AKM:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \\ \frac{1}{3}a^2 &= \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2b}{3} \cdot \frac{c}{3} \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Ak odčítame od deväťnásobku druhej rovnosti dvojnásobok prvej, vylúčime $\cos\alpha$ a dostaneme rovnosť $a^2 = 2b^2 - c^2$. Z ďalších dvojíc kosínusových viet sa úplne rovnako odvodia rovnosti $b^2 = 2c^2 - a^2$ a $c^2 = 2a^2 - b^2$, takže spolu $a = b = c$.

Preto sú zrejme aj trojuholníky AKM, BLK a CMA zhodné a majú zhodné aj vpísané kružnice.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Učebný text.

Trojuholníková sieť sa skladá z rovnostranných trojuholníkov s jednotkovou veľkosťou. Súradnicovú sústavu si trochu pozmeníme: x-ová os je orientovaná rovnako, ako sme zvyknutí z karteziánskej sústavy; y-ová os zviera s x-ovou 60 stupňový uhol. Napríklad vrcholy jedného z jednotkových trojuholníkov majú súradnice $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

V tejto sieti zadáme N-uholník – jeho vrcholy ležia vo vrcholoch siete, sú navzájom rôzne, pričom každé dva susedné vrcholy v N-uholníku majú jednotkovú vzdialenosť. N-uholník je zadaný na vstupe tak, že prvý riadok vstupu obsahuje číslo N a ďalších N riadkov obsahuje súradnice vrcholov, pričom tieto sú zadávané zaradom po obvode.

Súťažná úloha:

Napíšte a odlaďte program, ktorý

a) vykreslí tento N-uholník na obrazovke,

b) vypíše správu o tom, či je konvexný alebo nie (N-uholník je konvexný, ak úsečky spájajúce ľubovoľné dva vrcholy ležia vo vnútri, resp. na hranici N-uholníka.).

Poznámka: Minimalizujte pamäťovú a časovú zložitosť algoritmu. Môžete predpokladať, že vstup je zadaný korektne.

P – I – 2

Pre danú konštantu N (N je prvočíslo, napr. 991) máme vyhradené N-prvkové celočíselné pole P s indexmi 0 až $N-1$ (na začiatku je inicializované na nuly). Do tohoto poľa budeme postupne zaraďovať L celočíselných hodnôt (navzájom rôznych a rôznych od nuly), kde $2 < L < N$, pomocou procedúry `zarad`:

```
procedure zarad(X:integer);
var i:integer;
begin
  i := (x div 10 + x mod 10) mod N;
  while P[i] <> 0 do
    i := (i+7) mod N;
  P[i] := x;
end;
```

Táto procedúra najprv zo zaraďovanej hodnoty X vypočíta predpokladanú hodnotu indexu do poľa, a ak je tento prvok už obsadený (je tam nenulová hodnota), postupne hľadá najbližšiu voľnú pozíciu v poli (pole je pritom „zacyklené“ – za posledným $(N-1)$-vým prvkom nasleduje nultý). Ak pri hľadaní voľného miesta treba postupne prezerať nasledujúce prvky, budeme to nazývať *kolíziou* a budeme počítať počet týchto kolízií. Počet kolízií pri zaraďovaní j-tej hodnoty budeme označovať $K[j]$ ($K[j]$ bude teda rovné počtu prechodov cyklom `while` pri zaraďovaní j-tej hodnoty), celkový počet kolízií budeme označovať C_K.

Súťažná úloha:

Nájdite algoritmus, ktorý pre dané tri čísla L, G a C_K nájde takú vstupnú postupnosť hodnôt H (dĺžky L), aby celkový počet kolízií pre túto postupnosť bol C_K a posledná hodnota bola $H[L] = G$, prípadne zistí, že takáto postupnosť neexistuje.

P – I – 3

Majme kresliace zariadenie schopné kresliť rôzne obrázky. Ich popis však musí byť v špeciálnom tvare (zadaný ako znakový reťazec):

- je to postupnosť parametrov uzavretá v ‚[' a ‚]' zátvorkách;
- parametrom je buď číslo alebo opäť postupnosť parametrov;
- postupnosť parametrov je vždy párnej dĺžky, na nepárnych pozíciách je vždy číslo.

Túto postupnosť bude kresliace zariadenie interpretovať nasledovne:

- ak je postupnosť prázdna, tak sa nekreslí nič;
- ak je neprázdna, zrejme prvý parameter (P_1) je číslo a druhý (P_2) je buď číslo, alebo opäť postupnosť parametrov:
  - ak je P_2 číslo, tak kresliace pero prejde (so spusteným perom) v momentálnom smere natočenia vzdialenosť P_1 (všimnite si, že P_1 môže byť aj záporné, potom sa kresliace pero posunie a danú vzdialenosť v opačnom smere) a potom sa otočí o uhol P_2 vpravo (uhol je zadaný v stupňoch);
  - ak je P_2 postupnosť, tak kresliace zariadenie P_1-krát zopakuje postupnosť P_2.

Kresliace pero je stále natočené nejakým smerom (na začiatku algoritmu na sever) a podľa parametrov postupnosti buď mení toto natočenie, alebo sa v aktuálnom smere pohybuje dopredu alebo dozadu (kreslí čiaru) podľa toho, či je táto vzdialenosť kladná alebo záporná.

Napríklad postupnosť ‚`[4[100 90]]`' nakreslí štvorec so stranou 100. (Všimnite si, že číselné parametre sú oddelené medzerou.)

Súťažná úloha:

Napíšte a odlaďte program, ktorý načíta vstupnú postupnosť (v tvare znakového reťazca) a zinterpretuje ju na grafickej ploche obrazovky. Môžete predpokladať, že vstupná postupnosť je zadaná korektne, obsahuje len celočíselné hodnoty a že reťazec nie je dlhší ako 255 znakov.

P – I – 4

Učebný text.

Abecedou nazývame ľubovoľnú konečnú neprázdnu množinu. Prvky tejto množiny nazývame *znaky*. Konečnú postupnosť znakov z nejakej abecedy nazývame *slovom*. Znaky označujeme písmenami zo začiatku abecedy ($a, b, c, \ldots$), slová písmenami z konca abecedy ($u, v, w, \ldots$) a abecedy veľkými písmenami gréckej abecedy ($\Sigma, \Gamma, \ldots$).

Pod *dĺžkou slova* w rozumieme počet znakov, z ktorých sa skladá, označujeme $|w|$. Pod *zreťazením slov* $v = a_1a_2 \dots a_n$ a $u = b_1b_2 \dots b_m$ rozumieme slovo $v * u = a_1a_2 \dots a_nb_1b_2 \dots b_m$. Množinu všetkých slov, ktoré sa dajú utvoriť zo znakov abecedy Σ označujeme Σ^*. Táto množina obsahuje aj *prázdne slovo*, t.j. slovo nulovej dĺžky, ktoré označujeme ε.

Pravidlom nad abecedou Σ nazývame usporiadanú dvojicu (a, v), kde $a \in \Sigma$ a $v \in \Sigma^*$. Pravidlo zapisujeme v tvare $a \to v$.

Deterministický Lindermayerov systém bez interakcie (*D0L systém*) je usporiadaná trojica (Σ, P, w), kde

- Σ je abeceda,
- P je množina pravidiel, ktorá pre každý znak $a \in \Sigma$ obsahuje práve jedno pravidlo nad abecedou Σ tvaru $a \to u$,
- w je slovo zo Σ, ktoré nazývame *axióma*.

Takýto D0L systém produkuje postupnosť slov $w1, w2, w3, \dots$, ktorá začína axiómou a pokračuje vždy slovom, ktoré dostaneme z predchádzajúceho slova súčasným nahradením všetkých znakov za slová podľa pravidiel. Takže

1. $w_1 = w$,
2. ak $w_i = a_1a_2 \dots a_n$, tak $w_{i+1} = u_1 * u_2 * \dots * u_n$, kde $a_j \to u_j \in P$ pre $j = 1, 2, \dots, n$.

Uvedomme si, že pre každý znak máme práve jedno pravidlo, a teda práve jedno slovo, ktorým budeme tento znak nahrádzať. Postupnosť produkovaná D0L systémom je teda jednoznačne určená.

Rastovou funkciou D0L systému nazývame takú funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$), ktorá pre poradie slova postupnosti produkovanej D0L systémom udáva dĺžku tohoto slova. Presnejšie $f(i) = |w_i|$.

Príklad:

- $\{a, b\}$ je abeceda obsahujúca dva znaky: a a b.
- Dĺžka slova $aabab$ je 5.
- Zreťazením slov ab a aab je slovo $ab * aab = abaab$.
- Nad touto abecedou môžeme vytvoriť nekonečne veľa slov: ε, a, b, aa, ab, bb, aaa, ...
- Pravidlom je napríklad $a \to aa$.
- D0L systémom je napríklad $(\{a, b\}, \{a \to aa, b \to ab\}, ab)$.
- Postupnosť produkovaná týmto systémom je

$$ab, aaab, aaaaaaab, aaaaaaaaaaaaaaab, \dots$$

(Keď slovo obsahuje viac rovnakých písmen za sebou, môžeme nahradiť tieto písmená jedným písmenom, pri ktorom uvedieme počet písmen, ktoré zastupuje. Skrátene môžeme teda písať postupnosť tohoto D0L systému: ab, a^3b, a^7b, $a^{15}b$, ...).

- Rastová funkcia tohoto D0L systému je $f(n) = 2^n$.

Poznámka: Pri konštrukcii D0L systému uprednostňujeme také systémy, ktoré majú čo najmenší počet pravidiel.

Súťažná úloha:

Skonštruujte D0L systém, ktorého rastová funkcia je

a) $f(n) = 4$,
b) $f(n) = n$,
c) $f(n) = 3 \cdot n + 2$,
d) $f(n) = n^2$,
e) $f(n) = k \cdot n^3$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

P – II – 1

Učebný text pozri úloha P – I – 1, strana 58.

Súťažná úloha:

Napíšte program, ktorý vypočíta obsah N-uholníka v jednotkových trojuholníkoch.

P – II – 2

Pre danú konštantu N (N je prvočíslo, napr. 991) máme vyhradené N-prvkové celočíselné pole P s indexmi 0 až $N - 1$. V tomto poli máme uložených M rôznych kladných čísel ($M < N$). Neobsadené prvky poľa sú inicializované na nuly.

Prvky sú v poli P uložené tak, aby bolo možné použiť funkciu `vyhladaj` na zistenie, kde v poli sa nachádza prvok X (funkcia vráti polohu prvku X v poli P, ak sa X v poli nachádza, v opačnom prípade vráti hodnotu -1):

```
function vyhladaj(X:integer):integer;
var i:integer;
begin
  i:=(X div 10 + X mod 10) mod N;
  while P[i]>X do
    i:=(i+7) mod N;
  if P[i]=X then vyhladaj:=i
            else vyhladaj:=-1;
end;
int vyhladaj(int X) {
  int i;
  i=(X/10 + X  while(P[i]>X) i=(i+7)  if(P[i]==X) return(i);
  else return(-1); }
```

Súťažná úloha:

a) Napíšte, ako musia byť prvky uložené v poli P, aby bolo možné na ich vyhľadávanie použiť funkciu `vyhladaj`.
b) Napíšte čo najefektívnejšiu procedúru `zarad`, pomocou ktorej možno zaradiť prvok X do poľa P, aby mohla byť na vyhľadávanie použitá funkcia `vyhladaj` (predpokladajte, že pred použitím procedúry `zarad` boli prvky v poli P takto usporiadané a že prvok X sa v poli P ešte nenachádza).

P – II – 3

Majme kresliace zariadenie popísané v úlohe P – I – 3, strana 59.

Staršie kresliace zariadenia obvykle majú rozsynchronizované ovládacie obvody. Preto sa stáva, že často vykreslia namiesto čiary dĺžky P čiaru dĺžky $P+1$ alebo $P-1$. Preto pero obvykle skončí na inom mieste, ako malo skončiť podľa zadanej postupnosti.

Súťažná úloha:

Nájdite a dokážte algoritmus, ktorý pre danú vstupnú postupnosť (v tvare znakového reťazca) určí, ako najďalej môže pero staršieho kresliaceho zariadenia skončiť od miesta, kde malo skončiť podľa zadanej postupnosti.

P – II – 4

Učebný text pozri úloha P – I – 4, strana 59.

Skonštruujte D0L systém (alebo dokážte, že to nie je možné) s rastovou funkciou:

a) $f(n) = n^n$,

b) $f(n) = n^2 \cdot 2^n$.

P – III – 1

Učebný text pozri úloha P – I – 1, strana 58.

Súťažná úloha:

Na vstupe sú zadané M a N-uholník. Napíšte program, ktorý vypočíta obsah ich prieniku v jednotkových trojuholníkoch.

P – III – 2

Pre danú konštantu N (N je prvočíslo väčšie ako 10, napr. 991) máme vyhradené N-prvkové celočíselné pole P s indexmi 0 až $N-1$ (na začiatku je inicializované na nuly). Do tohoto poľa budeme postupne zaraďovať rôzne kladné celočíselné hodnoty pomocou procedúry `zarad`:

```
procedure zarad(x:integer);
var i:integer;
begin
  i := x mod N;
  while P[i] <> 0 do
    if P[i]>x then
      i := (i+7) mod N
    else
      i := (i+3) mod N;
  P[i] := x;
end;
```

```
void zarad(int x) {
  int i;
  i = x     while (P[i]!=0)
    if (P[i]>x) i = (i+7)       else i = (i+3)
  P[i] = x; }
```

Súťažná úloha:

a) Napíšte čo najefektívnejšiu funkciu `vyhladaj` s jedným celočíselným parametrom x, ktorá zistí, či sa prvok x nachádza v poli P. Ak áno, vráti hodnotu indexu prvku x v poli P, ak nie, vráti hodnotu -1.

b) Je procedúra `zarad` v prípade, že je v poli P aspoň jedno voľné miesto (t.j. aspoň jeden prvok s hodnotou 0), vždy konečná? Odpoveď dokážte.

P – III – 3

Učebný text pozri úloha P – I – 4, strana 59.

a) Skonštruujte D0L systém s najviac dvoma pravidlami, ktorého rastová funkcia je $f(n) = n^2$, alebo dokážte, že to nie je možné.

b) Zostrojte D0L systém s rastovou funkciou $\lfloor \log_{k+1}(n+1) \rfloor + 1$, kde k je počet symbolov abecedy, alebo dokážte, že to nie je možné.

P – III – 4

V meste sú verejné priestranstvá osvetlené N pouličnými lampami. Každá z lámp má jednoznačne priradené číslo od 0 po $N-1$. Na zapínanie a vypínanie verejného osvetlenia slúži v riadiacom stredisku verejného osvetlenia M prepínačov. Aby týchto prepínačov nebolo veľa, každý z prepínačov prepne naraz niekoľko lámp (prepnúť lampu znamená zapnúť ju keď nesvieti a vypnúť keď svieti). Presnejšie, prepínač číslo i prepne všetky lampy s číslami $a_i \ldots b_i$ (to znamená prepne lampy s číslami z daného intervalu). Môžete predpokladať, že $M < 100$, $N < 100$.

Súťažná úloha:

Napíšte program, ktorý zistí, či pomocou prepínačov v riadiacom stredisku možno zapnúť všetky lampy, ak predpokladáme, že na začiatku sú všetky lampy vypnuté.

Vstupný súbor.

Vstupný súbor obsahuje niekoľko zadaní. Prvý riadok súboru obsahuje počet zadaní v súbore. Pre každé zadanie vstupný súbor obsahuje blok údajov takto: v prvom riadku bloku sa nachádzajú čísla N a M, kde N je počet lámp v meste a M je počet prepínačov v riadiacom stredisku. Ďalších M riadkov obsahuje pre jednotlivé prepínače vždy dvojicu čísel a_i,b_i (pre každý vypínač interval čísel lámp, ktoré sa pomocou neho prepnú). Jednotlivé bloky údajov sú oddelené vždy jedným prázdnym riadkom.

Výstupný súbor.

Pre každé zadanie vo vstupnom súbore výstupný súbor obsahuje riadok z jednou z nasledujúcich správ:

`Mozno` – ak možno rozsvietiť všetky lampy pomocou vypínačov v riadiacom stredisku,
`Nemozno` – ak to nie je možné.

P – III – 5

V meste Manhatan sa všetky ulice tiahnu buď zo severu na juh, alebo z východu na západ (predpokladajte, že sa ulice tiahnu oboma smermi dostatočne ďaleko). Na priesečníku každých dvoch ulíc je križovatka.

Každú križovatku si očíslujeme dvojicou čísel (i, j), čo znamená, že križovatka leží na i-tej východozápadnej ulici zo severu a na j-tej severojužnej ulici zo západu. Križovatky sú teda očíslované od $(1, 1)$ do (M, N), kde M je počet východozápadných ulíc a N je počet severojužných ulíc. Môžete predpokladať, že $M < 100$, $N < 100$. Na niektorých križovatkách sa pracuje na oprave ciest, preto cez ne nie je možné prejsť. Na križovatkách $(1, 1)$ a (M, N) sa nepracuje.

Arpád vždy ráno vychádza z križovatky $(1, 1)$ a potrebuje sa dostať do firmy, ktorá sa nachádza na opačnom konci mesta, tzn. na križovatke (M, N).

Súťažná úloha:

Napíšte program, ktorý zistí, koľkými cestami sa môže Arpád dostať do firmy, pričom na svojej ceste sa môže vždy pohybovať len smerom na juh alebo na východ a vypíše najmenší počet križovatiek, cez ktoré sa môže takouto cestou do firmy dostať (vrátane $(1, 1)$ a (M, N)).

Vstupný súbor.

Vstupný súbor obsahuje niekoľko zadaní, prvý riadok vstupného súboru obsahuje ich počet. Pre každé zadanie obsahuje vstupný súbor blok dát. Na prvom riadku každého bloku sa nachádzajú čísla M a N, kde M je počet východozápadných ulíc a N je počet severojužných ulíc. Na ďalšom riadku sa nachádza číslo K – počet križovatiek v meste, na ktorých sa opravujú cesty a na každom z nasledujúcich K riadkov sa nachádzajú vždy dve čísla, ktoré určujú polohu križovatky, na ktorej sa pracuje. Bloky údajov sú oddelené vždy jedným prázdnym riadkom.

Výstupný súbor.

Pre každé zadanie vo vstupnom súbore výstupný súbor obsahuje riadok

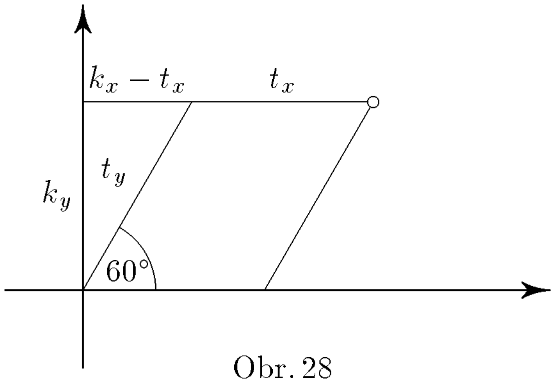
- s číslami A a B, kde A je počet rôznych ciest a B je počet križovatiek najkratšej z nich (vrátane $(1, 1)$ a (M, N)) v prípade, že existuje aspoň jedna cesta požadovaného typu;
- s hláškou „`Cesta neexistuje`“, ak neexistuje cesta požadovaného typu.

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

a) Najprv si ukážme, ako prepočítať zadané súradnice do pravouhlej súradnicovej sústavy. Označme (t_x, t_y) súradnice v našej trojuholníkovej sústave a (k_x, k_y) súradnice v pravouhlej súradnicovej sústave (obr. 28).



Obr. 28

Z vlastností pravouhlého trojuholníka na obrázku vyplýva:

$$\frac{k_y}{t_y} = \cos 30^\circ, \qquad \frac{k_x - t_x}{t_y} = \sin 30^\circ,$$

a teda pre súradnice (k_x, k_y) platí:

$$k_y = \frac{\sqrt{3}}{2} t_y, \qquad k_x = \frac{1}{2} \cdot t_y + t_x.$$

Pre účely prepočítania na súradnice na obrazovke zavedieme nasledujúce premenné:
– zväčšenie k (počet pixelov na obrazovke na jednotku dĺžky),
– súradnice začiatku súradnicovej sústavy na obrazovke (o_x, o_y).

Vo vzorovom riešení je k konštanta a o_x, o_y sa počítajú tak, aby bod $(0, 0)$ ležal v strede obrazovky.

Zhrnieme výsledky predchádzajúcich úvah. Bod zadaný v pravouhlej sústave súradnicami (k_x, k_y) sa zobrazí na obrazovke na súradnice $(o_x + k.k_x, o_y - k.k_y)$. Ak je bod zadaný v trojuholníkovej sústave súradnicami (t_x, t_y), potom jeho súradnice v pravouhlej sústave sú $k_y = \frac{\sqrt{3}}{2} t_y$, $k_x = \frac{1}{2} \cdot t_y + t_x$, a na obrazovke sa teda zobrazí na súradnice $(o_x + k.t_x + k\frac{1}{2} \cdot t_y, o_y - k\frac{\sqrt{3}}{2} t_y)$. Ak označíme $j_{xx} := k$, $j_{yx} := \frac{1}{2}k$, $j_{yy} := = -\frac{\sqrt{3}}{2}k$ dostávame, že sa bod so súradnicami (t_x, t_y) v trojuholníkovej sústave zobrazí na obrazovke na bod

$$(o_x + j_{xx} t_x + j_{yx} t_y, o_y + j_{yy} t_y).$$

b) Keďže všetky vrcholy nášho N-uholníka musia byť mrežové body a vzdialenosť nasledujúceho vrcholu od predchádzajúceho musí byť vždy 1, prichádzajú pre vrchol so súradnicami (t_x, t_y) do úvahy ako nasledujúce len tieto vrcholy (zodpovedajúce smery, v ktorých vrcholy ležia vzhľadom k (t_x, t_y) označme od 0 po 5 v poradí, v akom sú tu vypísané): (t_x, t_y+1), (t_x+1, t_y), (t_x+1, t_y-1), (t_x, t_y-1), (t_x-1, t_y), (t_x-1, t_y+1).

Nech sme do vrcholu (t_x, t_y) prišli zo smeru s_s a odchádzame z neho v smere s_n. Vidíme, že ak $s_n = s_s$, tak sme sa v bode neotočili, ak $s_n \equiv s_s + 1 \pmod 6$ alebo $s_n \equiv s_s + 2 \pmod 6$ tak sme sa otočili doprava, inak doľava (prípad $s_n \equiv s_s + 3 \pmod 6$ nemôže nastať).

Obchádzajme náš N-uholník po obvode (t.j. v poradí, v akom boli zadané jeho body; poradie bodov môže byť zadané buď v smere, alebo proti smeru hodinových ručičiek) a sledujme, v akom smere sa otáčame v jednotlivých vrcholoch (smer otáčania je daný menším z dvoch uhlov pri vrchole). Ak je náš N-uholník konvexný, potom sa zrejme musíme otáčať stále rovnakým smerom a naopak, ak konvexný nie je, musíme sa počas obchôdzky otočiť aspoň raz doprava a aspoň raz doľava.

Táto jednoduchá úvaha nám dáva základ nášho algoritmu. Obchádzame postupne N-uholník, pričom ak sa otočíme doprava, nastavíme premennú `doprava`, ak sa otočíme doľava, nastavíme premennú `dolava`. Ak sú na konci obidve premenné nastavené, N-uholník nie je konvexný, v opačnom prípade je konvexný.

Časová aj pamäťová zložitosť tohoto algoritmu je lineárna ($O(N)$), správnosť vyplýva z horeuvedenej úvahy.

P – I – 2

Zvyšok čísla A po delení číslom B budeme označovať A MOD B. Ak má existovať postupnosť hodnôt $H[1], \dots, H[L]$, musí predovšetkým platiť, že $L < N$. Ďalej platí, že ak do poľa zaraďujeme i-tu hodnotu, počet kolízií $K[i]$ je najviac $i-1$. ($K[i] = i-1$ vtedy, keď dôjde ku kolízii so všetkými už zaradenými prvkami). Z toho ale vyplýva, že ak $C_K > 0 + 1 + \cdots + (L-1) = \frac{L(L-1)}{2}$, postupnosť opäť neexistuje.

Označme $a \oplus b := (a + 7b)$ MOD N. Vezmime teraz ľubovoľný index nejakého prvku v našom poli j. Potom ak prechádzame prvkami $j \oplus 1, j \oplus 2, \dots, j \oplus N$, tak prejdeme každým prvkom nášho poľa práve raz (pretože N je prvočíslo).

Ak máme v poli obsadených k prvkov s indexmi $j_0, j_0 \oplus 1, j_0 \oplus 2, \dots, j_0 \oplus (k-1)$, tak pre ľubovoľné $K[k+1]$, kde $K[k+1] \in \{0, 1, \dots, k\}$, vieme nájsť vhodný prvok $H[k+1]$ taký, že sa zaradí do poľa na index $j_0 \oplus k$. Označme si $i_{k+1} := (H[k+1]$ DIV $10 + H[k+1]$ MOD $10)$ MOD N (pozri procedúru `Zarad`), prvý index vypočítaný pre prvok $H[k+1]$ v procedúre `Zarad`. Potom ak vezmeme

$$i_{k+1} = j_0 \oplus (k - K[k+1]),$$

tak sa nám prvok $H[k+1]$ zaradí na pozíciu $j_0 \oplus k$.

Pre každý počiatočný index j_0 a postupnosť K ($K[i] \leqq i-1$, $i = 1, 2, \dots, L$) teda vieme týmto spôsobom nájsť príslušnú postupnosť prvých indexov $j_0 = i_1, i_2, \dots, i_L$.

Postupnosť K však nie je zadaná, poznáme iba jej súčet C_K. Preto si ju môžeme určiť ľubovoľne, pokiaľ možno čo najjednoduchšie. Položme napríklad $K[i] := i - 1$

pre $i = 1, 2, \dots, m$ a ak $m \neq L$ $K[m+1] := C_K - \frac{m(m-1)}{2}$ a $K[i] := 0$ pre $i = m + 2, \dots, L$, pričom m vezmeme najväčšie také, že $\frac{m(m-1)}{2} \leqq C_K$. Riešením kvadratickej rovnice ľahko zistíme, že $m = \lfloor \frac{1+\sqrt{1+8\cdot C_K}}{2} \rfloor$.

Ďalej treba vyriešiť problém, ako zvoliť j_0 tak, aby sa pri vyššie opísanej voľbe postupnosti K prvý index posledného prvku postupnosti H nájdený pomocou vzťahu $i_L = j_0 \oplus (L-1-K[L])$ skutočne rovnal hodnote vypočítanej v procedúre `Zarad` $((H[L]\ \mathrm{DIV}\ 10 + H[L]\ \mathrm{MOD}\ 10)\ \mathrm{MOD}\ N)$. Pre operáciu $\oplus$ platí $a\ \mathrm{MOD}\ N = (a \oplus b) \oplus (-b)$, a teda ak $i_L = j_0 \oplus (L-1-K[L])$, potom

$$j_0 = i_0 \oplus (-(L-1-K[L])).$$

Zostáva určiť, ako z hodnoty prvého indexu i_j vypočítať hodnotu prvku postupnosti $H[j]$. Je zrejmé, že ak bude mať prvok hodnotu $10i_j$, určite bude jeho index i_j. Prvky postupnosti H však majú byť nenulové a navzájom rôzne. Preto k j-temu prvku ešte pripočítame číslo jN. Ak by sa takto vypočítaná hodnota náhodou rovnala číslu G, odčítame od nej číslo 9 (tým pádom bude $H[j]\ \mathrm{MOD}\ 10 = 1$, ale hodnota $H[j]\ \mathrm{DIV}\ 10$ klesne o 1, takže súčet sa zachová).

Zhrňme predchádzajúce úvahy do funkcie `Prvok` (i, j), ktorá pre daný prvý index i a poradové číslo j určí hodnotu $H[j]$.

Funkcia `Prvok` (i, j):
Ak $j = L$ vráť G, inak
- ak $10i + jN = G$ vráť $10i + jN - 9$,
- inak vráť $10i + jN$.

Na záver uveďme prehľadný zápis celého algoritmu tak, ako bol popísaný vyššie:

1. Ak $L > N$ alebo $C_K > \dfrac{L(L-1)}{2}$, postupnosť neexistuje, inak pokračuj bodom 2;
2. $m := \lfloor \dfrac{1+\sqrt{1+8\cdot C_K}}{2} \rfloor$, podľa hodnoty m urči $K[L]$:
   - ak $m = L$, $K[L] := L-1$,
   - ak $m+1 = L$, $K[L] := C_K - \dfrac{m(m-1)}{2}$,
   - ak $m+1 < L$, $K[L] := 0$ a $j_0 := i_0 \oplus (-(L-1-K[L]))$;
3. $K[i] :=$ `Prvok` $(0, i)$ pre $i = 1, 2, \dots, m$;
4. ak $m+1 < L$, tak $K[m+1] :=$ `Prvok` $(m - C_K + \dfrac{m(m-1)}{2}, m+1)$;
5. $K[i] :=$ `Prvok` $(j_0 \oplus (i-1), i)$ pre $i = m+2, \dots, L$.

Časová zložitosť algoritmu je lineárna ($O(N)$), pamäťová konštantná ($O(1)$), keďže hodnoty K[i] možno rovno vypisovať.

P – I – 3

Riešenie neobsahuje prakticky žiadne vážnejšie problémy.

P – I – 4

a) Riešením je D0L systém $(\{a\},\{a\to a\},a^4)$.
Tvrdenie: V n-tom kroku je tvar slova a^4, a teda $f(n)=4$.
Dôkaz: Pre $n=1$ tvrdenie zrejme platí.
Nech ďalej $w_n=a^4$. Potom sa uplatnením pravidla zmení každé písmeno a na a, a teda $w_{n+1}=a^4$, čím je tvrdenie dokázané.

b) Riešením je D0L systém $(\{a,b\},\{a\to a, b\to ab\},b)$.
Tvrdenie: V n-tom kroku je tvar slova $a^{n-1}b$, a teda $f(n)=n$
Dôkaz: Pre $n=1$ tvrdenie zrejme platí.
Nech ďalej $w_n=a^{n-1}b$. Potom sa uplatnením pravidiel zmení každé písmeno a na a a písmeno b na ab, a teda $w_{n+1}=a^{n-1}ab=a^nb$, čím je tvrdenie dokázané.

c) Riešením je D0L systém $(\{a,b\},\{a\to a, b\to a^3b\},a^4b)$.
Tvrdenie: V n-tom kroku je tvar slova $a^{3n+1}b$, a teda $f(n)=3n+2$.
Dôkaz: Pre $n=1$ tvrdenie zrejme platí.
Nech ďalej $w_n=a^{3n+1}b$. Potom sa uplatnením pravidiel zmení každé písmeno a na a a písmeno b na a^3b, a teda $w_{n+1}=a^{3n+1}a^3b=a^{3(n+1)+1}b$, čím je tvrdenie dokázané.

d) Riešením je D0L systém $(\{b,c,d\},\{b\to b, c\to bc, d\to bc^2d\},d)$.
Tvrdenie: V n-tom kroku je tvar slova $b^{(n-1)^2}c^{2(n-1)}d$, a teda $f(n)=(n-1)^2+2(n-1)+1=n^2$.
Dôkaz: Pre $n=1$ tvrdenie zrejme platí.
Nech ďalej $w_n=b^{(n-1)^2}c^{2(n-1)}d$. Potom po uplatnení pravidiel bude $w_{n+1}=b^{(n-1)^2}b^{2(n-1)}c^{2(n-1)}bc^2d=b^{n^2}c^{2n}d$, čím je tvrdenie dokázané.

Poznámka: Ukážeme ešte postup, akým možno tento D0L systém zostrojiť. Platí: $(n+1)^2-n^2=2n+1$. To znamená, že pri prechode od n-tého k $(n+1)$-vému slovu musí „pribudnúť“ $2n+1$ písmeniek. Ak by sme teda našli systém, ktorý má rastovú funkciu $f(n)=2n+1$, potom by stačilo, aby každé jeho písmenko v každom kroku vygenerovalo nejaké „neutrálne“ písmenko (t.j. písmenko, ktoré sa v ďalších krokoch mení už len samo na seba). Takýto stroj ale ľahko zostrojíme: $(\{c,d\},\{c\to c, d\to c^2d\},d)$ – dôkaz tu nebudeme robiť, keďže je úplne analogický s dôkazmi predchádzajúcich tvrdení. Potom náš stroj bude vyzerať takto: $(\{b,c,d\},\ \{b\to b, c\to bc, d\to bc^2d\},d)$.

Takýto postup možno takisto použiť ako dôkaz správnosti, vo veľa prípadoch je však jednoduchšie vzniknutý D0L systém dokázať indukciou (pozri vyššie). V skutočnosti na konštrukciu D0L systému v prípade e) bol použitý obdobný postup.

e) Riešením je D0L systém $(\{b,c,d,e,f\},\ \{b\to b, c\to bde^5f, d\to bd, e\to bde, f\to bde^6f\},c^k)$.
Tvrdenie: Pre $n\geqq 2$ je tvar slova $b^{k(n-1)^3}d^{k(3n^2-9n+7)}e^{k(6n-7)}f^k$. Keďže $f(1)=k$, je $f(n)=kn^3$ $(k((n-1)^3+3n^2-9n+7+6n-7+1)=kn^3$ pre $n\geqq 2)$.
Dôkaz: Pre $n=1$ a $n=2$ tvrdenie zrejme platí.

Nech tvrdenie platí pre nejaké $n \geqq 2$. Potom $w_n = b^{k(n-1)^3} d^{k(3n^2-9n+7)} e^{k(6n-7)} f^k$ a po uplatnení pravidiel

$$w_{n+1} = b^{k(n-1)^3} b^{k(3n^2-9n+7)} d^{k(3n^2-9n+7)} b^{k(6n-7)} d^{k(6n-7)} e^{k(6n-7)} b^k d^k e^{6k} f^k = \\ = b^{kn^3} d^{k(3n^2-3n+1)} e^{k(6n-1)} f^k = b^{kn^3} d^{k(3(n+1)^2-9(n+1)+7)} e^{k(6(n+1)-7)} f^k,$$

čím je tvrdenie dokázané.

P – II – 1

Uvažujme v našej súradnicovej sústave pás trojuholníkov, ktorý je vymedzený x-ovými súradnicami x a $x+1$. Zoberme prienik tohoto pásu s hranicou nášho n-uholníka. Priraďme každej hrane smer a to podľa toho, v akom poradí boli zadávané jej krajné body. Dostávame sústavu jednotkových hrán, pričom

1. počet hrán je párny (ak prejdeme cez tento pás doprava, potom aby sme n-uholník uzavreli, musíme cez tento pás prejsť aj doľava a naopak);
2. ak je smer niektorej hrany doľava, smer najbližšej nižšej a vyššej hrany je doprava a naopak;
3. najvyššia a najnižšia hrana ide vo všetkých pásoch rovnakým smerom, pričom najvyššia ide opačným smerom ako najnižšia;

Plocha prieniku pásu a nášho n-uholníka je zrejme súčet plôch ohraničených najvyššou hranou a druhou najvyššou hranou, treťou a štvrtou najvyššou hranou, $\ldots$, druhou a prvou najnižšou hranou. Predpokladajme teraz, že najnižšia hrana vedie doľava. Potom plochu prieniku n-uholníka a nášho pásu dostaneme tak, že plochu v páse „pod“ hranou idúcou doprava vždy pričítame a „pod“ hranou idúcou doľava odčítame.

To však nemusíme robiť po jednotlivých pásoch. Najprv položme *plocha* $:= 0$. Nech y je výška aktuálneho bodu n-uholníka. Ak ďalší bod je vpravo dole (relatívne súradnice $(1,-1)$) pripočítame k ploche $2y-1$, ak je vpravo (relatívne súradnice $(1,0)$) pripočítame $2y$. Ak je ďalší bod vľavo hore (relatívne súradnice $(-1,1)$) odpočítame od plochy $2y+1$, ak je vľavo (relatívne súradnice $(-1,0)$) odpočítame $2y$. V ostatných prípadoch (relatívne súradnice $(0,1)$ a $(0,-1)$) nepripočítavame nič, keďže tieto hrany nepretínajú žiadny pás.

Čo ak však bola orientácia hrán opačná, ako sme predpokladali? Potom dostávame záporné číslo a jeho absolútna hodnota je plocha n-uholníka.

Poznámka: V predchádzajúcom sme uvažovali, že sa celý n-uholník nachádza len nad osou x. Je však jasné, že algoritmus ostáva bez zmeny aj keď n-uholník leží celý prípadne čiastočne pod osou x.

Správnosť algoritmu je zrejmá z predchádzajúcich úvah. Časová zložitosť algoritmu je $O(n)$, pamäťová $O(1)$.

P – II – 2

a) Označme $h(x) := (x \text{ MOD } 10 + x \text{ DIV } 10) \text{ MOD } N$ (definície pozri P – I – 1). Funkcia `Vyhladaj` pri hľadaní prvku x postupne prezerá prvky poľa P s indexmi

$h(x), (h(x) + 7)$ MOD $N, (h(x) + 14)$ MOD $N, \ldots, (h(x) + 7l)$ MOD N. Skončí, keď nastane jedna z týchto troch možností:

1) nájde hľadaný prvok x;
2) nájde prvok menší ako x;
3) nájde prázdne políčko (prvok s hodnotou 0).

Ak nastala prvá možnosť, prvok sa v poli nachádza, inak sa nenachádza. N a 7 sú nesúdeliteľné čísla. Z toho vyplýva, že pre každé $i \in \{0, 1, \ldots N-1\}$ existuje $j \in \in \{0, 1, \ldots N-1\}$ také, že $i = (h(x) + 7j)$ MOD N. V poli je aspoň jedno prázdne políčko ($M < N$), a preto l bude vždy menšie ako N.

Nech sa v poli P prvok x nachádza na mieste s indexom i. Nech $j \in \{0, 1, \ldots N-1\}$ je také číslo, že $i = (h(x) + 7j)$ MOD N. Aby funkcia `Vyhladaj` prvok x našla, musí platiť, že prvky s indexmi $h(x), (h(x) + 7)$ MOD $N, (h(x) + 14)$ MOD $N, \ldots, (h(x) + + 7(j-1))$ MOD N budú väčšie ako x.

b) Pokiaľ do tabuľky chceme uložiť prvok x, postupujeme opäť po postupnosti indexov $h(x), (h(x)+7)$ MOD $N, (h(x)+14)$ MOD $N, \ldots, (h(x)+7l)$ MOD N, až kým nenájdeme prvok menší ako x alebo prázdne políčko. Ak sme našli prázdne políčko, prvok x tam môžeme uložiť a funkcia `vyhladaj` ho iste nájde, lebo pred ním bude prehľadávať len väčšie prvky. Ak však je na tomto mieste prvok s hodnotou y_1 ($y_1 < < x$), uložíme sem prvok x. Pri hľadaní prvku y_1 sa predtým funkcia `vyhladaj` zastavila na indexe $(h(x) + 7l)$ MOD N, ale tam je teraz prvok x väčší ako y_1, takže funkcia bude pokračovať ďalej po indexoch $(h(x)+7(l+1))$ MOD $N, \ldots, (h(x)+7l_1)$ MOD N. Prvok y_1 uložíme na miesto $(h(x)+7l_1)$ MOD N. Ak tam predtým bolo prázdne políčko, skončíme, ak tam bol prvok y_2 ($y_2 < y_1$) tak opäť postupujeme ďalej po indexoch $(h(x) + + 7(l_1 + 1))$ MOD $N, \ldots, (h(x) + 7l_2)$ MOD N. Toto opakujeme až kým nenájdeme prvok y_k, ktorý sa už uloží na prázdne políčko. Na základe tohto postupu môžeme zostaviť procedúru `zarad`:

```
procedure zarad(X:integer);
var i:integer;
begin
  i:=(X mod 10 + X div 10) mod N;      {i:=h(X)}
  while P[i]<>0 do begin
    if P[i]<X then      {našli sme menší prvok}
      swap(P[i],X);     {vymení hodnoty P[i] a X}
    i:=(i+7) mod N;     {posunieme sa ďalej}
  end;
  P[i]:=X;        {na voľné políčko uložíme X}
end;
```

Procedúra `zarad` vždy skončí, lebo $M < N$, a teda v poli je nejaké políčko $P[i]$, ktoré je prázdne a pre i existuje j tak, že $(h(x)+7j)$ MOD $N = i$. Preto najneskôr po j prechodoch cyklus `while` skončí. Po vykonaní procedúry všetky prvky, ktoré v poli P boli, v ňom ostanú (hoci možno na iných miestach) a pribudne jedine prvok x. Súčasne pre každý index i ($0 \leqq i < N$) platí, že hodnota $P[i]$ pred vykonaním procedúry `zarad(x)` je menšia alebo rovnaká ako hodnota $P[i]$ po vykonaní procedúry. Nech teda po vykonaní procedúry `zarad(x)` spustíme funkciu `vyhladaj(y)`. Môžu nastať tieto možnosti:

- Prvok y sa v poli P nenachádza. Funkcia `vyhladaj(y)` nemôže nájsť niečo, čo v poli P nie je, a preto vráti správny výsledok.
- $y = x$. Už z popisu algoritmu vyplýva, že funkcia `vyhladaj` prvok x nájde.
- $y \neq x$, y sa nachádza v poli P a jeho poloha sa počas behu procedúry `zarad(x)` nezmenila. Predtým funkcia `vyhladaj` prehľadávala indexy $h(y), (h(y) + 7)$ MOD $N, \ldots, (h(y) + 7l)$ MOD N. To znamená, že pre každé i, $0 \leqq i < l$ platilo $P[(h(y) + 7i)$ MOD $N] > y$. Keďže hodnota žiadneho prvku z P sa počas vykonania `zarad(x)` neznížila, platí to aj naďalej, a preto `vyhladaj(y)` bude prehľadávať tie isté indexy a úspešne y nájde.
- $y \neq x$, y sa nachádza v poli P a jeho poloha sa počas behu procedúry `zarad(x)` zmenila, t.j. je to jeden z prvkov $y_1, y_2, \ldots y_k$. Nech predtým `vyhladaj` prehľadávala indexy $h(y), (h(y)+7)$ MOD $N, \ldots, (h(y)+7l)$ MOD N. Rovnako ako v predchádzajúcom prípade ani teraz neskončí skôr, ale na mieste s indexom $(h(y) + 7l)$ MOD N je teraz prvok väčší ako y, preto funkcia bude pokračovať ďalej. Z popisu algoritmu však vyplýva, že prvok na ktorom sa zastaví je práve hľadaný prvok y.

P – II – 3

Celkový posun pera je súčtom jednotlivých vektorov určených vstupnou postupnosťou. Ak staršie zariadenie urobí pohyb o jednotku dlhší alebo kratší, je to to isté, ako keby sa okrem určeného vektora posunulo ešte o jednotkový vektor v smere alebo proti smeru svojho natočenia. Keďže sčítanie vektorov je komutatívne, predstavme si, že by sa tieto posuny o jednotkové vektory vykonali až nakoniec. Nech množina A je množina obsahujúca ku každému vektoru zo vstupnej postupnosti dva navzájom opačné jednotkové vektory (v smere a proti smeru tohto vektora). Úlohou teda je vybrať z množiny A podmnožinu, ktorej súčet je najdlhší. Vybraná podmnožina môže byť ľubovoľná (zariadenie sa síce vždy posunie najviac o jeden z dvojice navzájom opačných vektorov, ale ak by sme vybrali obidva, je to to isté, ako keby sme nevybrali ani jeden).

Podmnožina s najdlhším súčtom iste obsahuje z každej dvojice opačných vektorov práve jeden. To sa ľahko dokáže sporom: nech vektor (x, y) je súčtom podmnožiny s najdlhším súčtom, ktorá neobsahuje ani jeden z jednotkových vektorov (x_1, y_1) a $(-x_1, -y_1)$. Potom ale jeden z vektorov $(x+x_1, y+y_1)$, $(x-x_1, y-y_1)$ je určite dlhší ako vektor (x, y). (Platí, že $x_1^2+y_1^2 = 1$ a jedno z čísel $1+2(xx_1+yy_1)$, $1+2(xx_1+yy_1)$ je určite kladné. Dĺžka vektora $(x + x_1, y + y_1)$ je $\sqrt{x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 + 2(xx_1 + yy_1)}$ a dĺžka vektora $(x - x_1, y - y_1)$ je $\sqrt{x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - 2(xx_1 + yy_1)}$. Jedna z týchto dĺžok je teda určite väčšia ako dĺžka vektora (x, y), ktorá je $\sqrt{x^2 + y^2}$.) Preto vektor (x, y) nie je vektor s najväčšou možnou dĺžkou. Podobne sa dá zdôvodniť, že ak A obsahuje viac rovnakých dvojíc vektorov, do podmnožiny s najdlhším súčtom sa vyberie z každej dvojice ten istý vektor.

Dokážeme teraz nasledujúcu vetu: *Hľadané riešenie obsahuje všetky vektory z A ležiace v jednej polrovine určenej niektorou priamkou vedúcou cez bod $(0, 0)$. Ak sú niektoré dvojice vektorov rovnobežné s priamkou, vyberú sa vektory v jednom smere.*

Dôkaz: Nech (x, y) označuje súčet podmnožiny s najdlhším súčtom, nech priamka p je kolmá na (x, y) a prechádza cez $(0, 0)$. Nech (x_1, y_1) je ľubovoľný vektor z polroviny, v ktorej sa nachádza (x, y). Potom uhol vektorov (x_1, y_1) a (x, y) je najviac $90°$. Preto je dĺžka vektora $(x + x_1, y + y_1)$ väčšia ako dĺžka (x, y) (ľahko sa odvodí z kosínusovej vety). Ak by naša podmnožina neobsahovala niektorý z vektorov z tejto polroviny, jej súčet sa po pridaní tohto vektora predĺži, takže by nemohla byť hľadaným riešením. Ak by naopak obsahovala niektorý vektor z opačnej polroviny, tak jeho ubranie je to isté ako pridanie vektora k nemu opačného (ten je už z našej polroviny), čo však súčet predĺži.

Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ sú jednotkové vektory z množiny A zotriedené podľa smeru (vektor a_{i+n} je opačný k vektoru a_i pre $1 \leqq i \leqq n$). Vezmime dva susedné vektory z takto zotriedenej postupnosti. Polroviny určené všetkými priamkami prechádzajúcimi „medzi" týmito dvoma vektormi obsahujú rovnakú podmnožinu vektorov z A, a preto stačí uvažovať iba priamky so smermi vektorov z A. Polrovina určená priamkou v smere vektora a_i obsahuje vektory $a_i, a_{i+1} \ldots a_{i+n-1}, 1 \leqq i \leqq n$. Stačí teda spraviť všetky takéto súčty a nájsť z nich najväčší. Pre utriedenú postupnosť vektorov je to možné urobiť v čase $O(n)$.

Keďže smery vektorov určených vstupnou postupnosťou sú celé čísla od 0 po 359, môžeme ich zotriediť v čase $O(n)$ *Counting Sortom*, t.j. pre každý zo smerov spočítame, koľko vektorov je v tomto smere. Ak máme l jednotkových vektorov s tým istým smerom, tak ich môžeme považovať za jeden vektor dĺžky l. (Iste stačí použiť iba pole od 0 po 179, lebo dĺžka vektora so smerom j a vektora k nemu opačného so smerom $j + 180°$ sú vždy rovnaké.)

P – II – 4

a) Dokážeme sporom, že nie je možné zostrojiť požadovaný D0L systém. Nech teda existuje D0L systém s rastovou funkciou n^n. Vezmime k rovné maximálnej hodnote z dĺžok pravých strán pravidiel. Z toho ale vyplýva, že ak máme v i-tom kroku slovo dĺžky i^i, v $i+1$-vom kroku môže náš D0L systém vygenerovať slovo dĺžky najviac ki^i. Zoberme teraz slovo w_k. Jeho dĺžka je (k^k). Pre dĺžku slova w_{k+1} potom musí platiť:

$$|w_{k+1}| \leqq k|w_k| = kk^k = k^{k+1} < (k+1)^{(k+1)},$$

čo je spor, lebo dĺžka slova w_{k+1} má byť $(k+1)^{(k+1)}$.

b) Riešením je D0L systém $(\{b, c, d\}, \{b \to b^2, c \to b^2c^2, d \to b^2c^4d^2\}, dd)$.

Tvrdenie: V n-tom kroku je tvar slova $(b^{(n-1)^2}c^{2(n-1)}d)^{2^n}$, a teda $f(n) = 2^n((n- -1)^2 + 2(n-1) + 1) = 2^n n^2$

Dôkaz: Pre $n = 1$ tvrdenie zrejme platí.
Nech ďalej $w_n = b^{2^n(n-1)^2}c^{2^n 2(n-1)}d^{2^n}$. Potom po uplatnení pravidiel bude $w_{n+1} = = (b^{(n-1)^2}b^{2(n-1)}c^{2(n-1)}bc^2d = b^{n^2}c^{2n}d)^{2^{n+1}}$, čím je tvrdenie dokázané.

P – III – 1

Uvažujme v našej súradnicovej sústave vodorovný pás trojuholníkov, ktorý je vymedzený y-ovými súradnicami y a $y+1$. Ak vezmeme stranu mnohouholníka s prechádzajúcu týmto pásom s koncovými bodmi $[x_1, y]$, $[x_2, y+1]$, tak platí, že $x_1 = x_2$ alebo $x_1 + 1 = x_2$. Ak poznáme súčet $x_1 + x_2$, tak vieme určiť x_1 a x_2: $x_1 = \lfloor (x_1 + x_2)/2 \rfloor$, $x_2 = \lceil (x_1 + x_2)/2 \rceil$. Preto môžeme každú stranu, ktorá nie je vodorovná, jednoznačne popísať usporiadanou dvojicou čísel (i, j), kde $i = x_1 + x_2$ a $j = y$. Dvojicu (i, j) budeme nazývať súradnicami strany. Majme stranu s so súradnicami koncov $[x_1, y]$, $[x_2, y+1]$ a stranu s' so súradnicami koncov $[x'_1, y]$, $[x'_2, y+1]$, pričom strana s je naľavo od strany s'. Potom časť pásu ohraničená stranami s a s' je lichobežník alebo v krajnom prípade trojuholník a jeho obsah $S = (x'_1 - x_1) + (x'_2 - x_2)$ (prvý sčítanec určuje počet jednotkových trojuholníkov, ktoré majú jednu zo strán na spodnej priamke pásu, druhý počet tých, ktoré majú jednu zo strán na vrchnej priamke pásu). Po úprave dostaneme vzťah $S = (x'_1 + x'_2) - (x_1 + x_2)$, čo už je vyjadrenie priamo pomocou súradníc strán.

Majme teraz 2 mnohouholníky A a B a skúmajme prienik A, B a nášho vodorovného pásu. Tento prienik bude zrejme pozostávať z lichobežníkov (príp. trojuholníkov) ohraničených stranami mnohouholníkov. Bod pásu patrí prieniku, ak je naľavo od neho nepárny počet strán A aj nepárny počet strán B. Teda začiatkom nejakého takéhoto lichobežníka bude strana, od ktorej vľavo je párny počet strán jej vlastného mnohouholníka a nepárny počet strán druhého mnohouholníka. Naopak koncom takéhoto lichobežníka bude strana, od ktorej vľavo je nepárny počet strán jej vlastného a nepárny počet strán druhého mnohouholníka. Strany mnohouholníkov, ktoré prechádzajú jedným pásom môžeme zotriediť zľava doprava, t.j. podľa ich prvej súradnice. Potom jediným prechodom cez utriedenú postupnosť strán vieme plochu prieniku jednoducho vypočítať.

Algoritmus je teda nasledovný: zotriedime strany obidvoch mnohouholníkov podľa pásu, v ktorom sa nachádzajú (druhej súradnice), pričom vodorovné strany môžeme vynechať. Strany z toho istého pásu zotriedime zľava doprava (podľa druhej súradnice). Potom prechádzame naraz obidvoma zoznamami zotriedených strán a hľadáme strany, ktoré sú začiatkami alebo koncami lichobežníkov a ich prvé súradnice odpočítavame alebo pripočítavame k celkovému súčtu.

Zostáva ešte popísať realizáciu triedenia. Tu si treba uvedomiť, že ak mnohouholník má nejaké dva vrcholy s x-ovými súradnicami i a j $(i < j)$, tak má aj vrcholy s x-ovými súradnicami $i+1, i+2, \ldots, j-1$, lebo dĺžka každej strany je 1. Rozdiel maximálnej a minimálnej x-ovej súradnice mnohouholníka je teda najviac N. To isté samozrejme platí aj pre y-ovú súradnicu. Preto na triedenie strán sa používa algoritmus *Radixsort*. Strany sa zotriedia najprv podľa prvej súradnice a potom podľa druhej, pričom v obidvoch prípadoch sa používa stabilné a lineárne triedenie *Countsort*. Prvé súradnice strany sú však súčtom dvoch súradníc vrcholov, rozdiel dvoch súradníc strán môže byť preto aj dvojnásobok rozdielu súradníc vrcholov.

Vďaka lineárnemu triedeniu je pamäťová aj časová zložitosť algoritmu $O(N + M)$, kde N a M sú počty strán mnohouholníkov.

P – III – 2

b) Keďže 7 a N sú nesúdeliteľné čísla, existuje l také, že $7l$ MOD $N = N - 3$ a $0 \leqq l < N$. Platí, že $l < N - 1$, lebo ak by sa rovnali, tak by muselo platiť $(7N - 7)$ MOD $N = N - 3$, čo pre žiadne $N > 10$ zjavne neplatí.

Vkladajme do prázdneho poľa P procedúrou `zarad` postupne prvky $(l + 2)N$, $(l + 1)N, \ldots, 4N$, $3N$, N. Uložia sa postupne v tomto poradí na miesta $0, 7, 14, \ldots, N-3$. V poli je teraz obsadených $l + 1$ miest, a teda aspoň jedno miesto je voľné. Keď teraz zavoláme procedúru `zarad` s parametrom $2N$, bude premenná i postupne nadobúdať hodnoty $0, 7, 14, \ldots, N-3$, lebo na pozíciách $0, 7, 14, \ldots, N-10$ sú uložené čísla väčšie ako $2N$. Ale $P[i] = N$, a preto ďalšia hodnota indexu bude opäť 0. Takže procedúra bude cyklicky nadobúdať stále tieto hodnoty, a teda nie je konečná pre každý vstup.

a) Majme funkciu `posun`, ktorá nám vráti ďalšiu hodnotu, akú by nadobudol index i v procedúre `zarad` (táto hodnota závisí od pôvodnej hodnoty i, prvku x a prvku $P[i]$):

```
function posun(i:integer; x:integer):integer;
begin
  if P[i]>x then
    posun:=(i+7) mod N
  else
    posun:=(i+3) mod N;
end;
```

Pri určitom stave poľa P chceme vyhľadávať prvok x. Definujme (nekonečnú) postupnosť indexov $h_0, h_1, h_2, \ldots$, kde $h_0 = x$ MOD N a $h_{i+1} =$ posun (h_i, x).

Môžu nastať tri prípady:

1) Prvok x sa v poli P nachádza. Všimnime si, že procedúra `zarad` mení iba hodnoty nulových prvkov poľa P, a teda hodnoty na indexoch, cez ktoré prechádzala procedúra `zarad(x)` sa nezmenili. Sú to teda indexy $h_0, h_1, \ldots h_k$, kde k je najmenšie číslo také, že $P[h_k] = x$.
2) Prvok x sa v poli nenachádza a procedúra `zarad` by ho zaradila na voľné miesto $P[i]$. Pri tomto zaradení by procedúra prezerala prvky P s indexmi $h_0, h_1, \ldots h_k$, kde k je najmenšie číslo také, že $P[h_k] = 0$ (resp. že $i = h_k$).
3) Prvok x sa v poli P nenachádza a procedúra `zarad` pre vstup x neskončí. Aj v tomto prípade by procedúra prezerala indexy $h_0, h_1, \ldots$. Nech k je najmenšie číslo také, že existuje $l < k$ také, že $h_l = h_k$. Potom postupnosť $\{h_n\}$ začína indexmi $h_0, h_1, \ldots h_{l-1}$, a potom sa už stále periodicky opakujú indexy $h_l, h_{l+1}, \ldots h_{k-1}$.

Funkcia `vyhladaj` teda rozpoznáva tieto tri prípady, v prvom vráti h_k a v druhých dvoch -1. V prvých dvoch prípadoch stačí postupne vypočítavať indexy h_n, až kým nenájdeme 0 alebo x. Ak však chceme zistiť, či nenastal tretí prípad, potrebujeme zistiť, či sa práve vypočítaný index h_n už predtým v postupnosti nevyskytoval. Budeme sa po poli posúvať dvoma indexmi i a j, každý bude postupne nadobúdať hodnoty postupnosti h_n. Ale index i budeme posúvať „rýchlejšie", ak i nadobudne hodnotu h_n, tak hodnota j bude $h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. V prípade, že sa indexy v postupnosti periodicky opakujú, po istom čase bude platiť $i = j$. V okamihu, keď j nadobudne prvýkrát hodnotu h_l, i

sa nachádza tiež niekde v cykle, nech najbližšie nadobudne hodnotu h_l po p posunoch. Po každom posune j sa ale vzdialenosť i a j zmenší o 1, lebo index i sa medzitým posunul dvakrát, a tak vlastne „dobieha" index j. Preto index j sa posunie najviac k-krát, a keďže sa i posúva raz tak často, celkový počet posunov je najviac $3k$.

```
function vyhladaj(x:integer);
var i,j,vysledok:integer;
    menitj:boolean;
begin
  vysledok:=0;                          {výsledok ešte nepoznáme}
  i:=x mod N;                           {prvý index}
  j:=i;
  menitj:=false;
  while vysledok=0 d  o                 {kým nepoznáme  výsledok}
    if P[i]=x then                      {našli sme x}
      vysledok:=i
    else if P[i]=0 then                 {x v poli nie je}
      vysledok:=-1
    else begin
      i:=posun(i,x);                    {posunieme i}
      if menitj then begin             {ak treba, posunieme j}
        j:=posun(j,x);
        if j=i then vysledok:=-1;       {i a j sa stretli - cyklus}
      end;
      menitj:=not menitj;
    end;
  vyhladaj:=vysledok;
end;
```

P – III – 3

a) Dokážeme sporom, že nie je možné zostrojiť požadovaný D0L systém. Nech teda existuje D0L systém s rastovou funkciou n^2. Nech má tento D0L systém iba jedno pravidlo. Potom toto pravidlo musí mať tvar $a \to a^i$ a $w_1 = a$, lebo $|w_1| = f(1) = 1$. Pre w_2 platí $w_2 = a^i$ a $|w_2| = f(2) = 4$. Z toho vyplýva, že $i = 4$. Ale potom pre w_3 platí $w_3 = a^{i^2}$ a $|w_3| = f(3) = 9$. Dostávame teda, že $9 = i^2 = 4^2 = 16$, čo je spor.

Náš D0L systém musí mať teda aspoň 2 pravidlá. Nech tieto pravidlá sú $a \to u$, $b \to v$, kde $u, v \in \{a, b\}^*$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $w_1 = a$. Potom $w_2 = u$, a teda $|u| = f(2) = 4$. Nech slovo u obsahuje k znakov a. Potom $w_3 = u^k v^{4-k}$ a platí, že $|w_3| = f(3) = 9$. Ale súčasne platí $|w_3| = k|u| + (4-k)|v|$ a $|u| = 4$. Dostávame teda rovnicu $4k + 4|v| - k|v| = 9$. Ak za k postupne dosadíme všetky možné hodnoty $(0, 1, 2, 3, 4)$, dostávame pre $|v|$ nasledujúce rovnosti: $4|v| = 9$, $4 + 4|v| - |v| = 9$, $8 + 4|v| - 2|v| = 9$, $12 + 4|v| - 3|v| = 9$ a $16 + 4|v| - 4|v| = 9$. Ani jedna z týchto rovností však nemá nezáporné celočíselné riešenie, a preto D0L systém s požadovanými vlastnosťami neexistuje.

b) D0L systém s požadovanými vlastnosťami neexistuje. Dokážeme to opäť sporom, nech teda existuje D0L systém s k-prvkovou abecedou a rastovou funkciou $f(n) = \lfloor \log_{k+1}(n+1) \rfloor + 1$.

Nech $m > 1$, označme n_1 najmenšie také číslo n, že $f(n) = m$, a n_2 najväčšie také číslo. Potom $n_1 = (k+1)^{m-1} - 1$ a $n_2 = (k+1)^m - 2$. Teda všetky slová $w_{n_1}, w_{n_1+1}, \dots, w_{n_2}$ majú dĺžku m. Ich počet je $n_2 - n_1 + 1 = k(k+1)^{m-1}$. Ale rôznych slov dĺžky m je k^m a $k^m < k(k+1)^{m-1}$. Preto určite existujú čísla $i, l > 0$, také, že $w_i = w_{i+l}$. Ale ak zo slova w_i vznikne po l krokoch zas w_i, tak sa úsek $w_i, w_{i+1}, \dots w_{l-1}$ sa bude ďalej stále periodicky opakovať. Teda D0L vyprodukuje nekonečne veľa slov dĺžky m, čo je spor, lebo takýchto slov má byť $n_2 - n_1 + 1$.

P – III – 4

Riešme trochu všeobecnejšiu úlohu – na začiatku nemusia byť všetky lampy vypnuté. Stav lámp si bude pamätať v poli l, kde $l[i] =$ `true`, ak je i-ta lampa zapnutá a $l[i] =$ `false`, ak je zapnutá. Riešením takejto úlohy budeme nazývať takú podmnožinu daných prepínačov, že ak ich všetky prepneme, tak všetky lampy budú zapnuté. Ak $N = 0$, riešením úlohy je prázdna množina, nech $N > 1$. Môžu nastať dva prípady:

- $l[1] =$ `false`.

Ak žiaden interval nezačína lampou 1, úloha zjavne nemá riešenie.

V opačnom prípade vezmime najkratší interval, ktorý začína lampou 1 (nech jeho koniec je b). Zmeňme všetky $l[i]$ z tohto intervalu na opačné a všetkým intervalom, ktoré začínajú lampou 1 zmeňme začiatok na $b+1$ (intervaly, ktoré sa takto stanú prázdnymi už ďalej neuvažujeme) Dostávame takto novú úlohu pre lampy $2, 3, \dots, N$, ktorá má riešenie vtedy a len vtedy, keď má riešenie pôvodná úloha.

Dôkaz: Nech pozmenená úloha má riešenie R. Potom ak prepneme lampy z pôvodnej úlohy prepínačmi z R, budú svietiť iba lampy s číslom väčším ako b. Nech R obsahuje k intervalov, ktorým sme začiatok zmenili z 1 na $b+1$. Nech R' vznikne z R tak, že týmto intervalom zmeníme začiatok späť na 1. Ak k je nepárne, každú lampu z intervalu $\langle 1, b \rangle$ sme oproti riešeniu R prepli ešte nepárny počet krát, teda zostane zapnutá. V tomto prípade je teda R' riešením našej pôvodnej úlohy. Ak je k párne, lampy z intervalu $\langle 1, b \rangle$ zostanú vypnuté, a preto k R' treba ešte pridať interval $\langle 1, b \rangle$.

Naopak, nech naša pôvodná úloha má riešenie R. Počet intervalov z R, ktoré obsahujú lampu 1 je iste nepárny. Keď všetkým takýmto intervalom zmeníme začiatok na $b+1$ a vyhodíme intervaly nulovej dĺžky, dostaneme riešenie zmenenej úlohy.

- $l[1] =$ `true`.

Keďže lampa 1 už svieti, nie je potrebné, aby sa dala nejakým prepínačom prepnúť. Ak neexistuje interval, ktorý začína lampou 1, úloha má riešenie vtedy a len vtedy, keď úloha pre lampy $2, 3, \dots, N$ a tú istú množinu intervalov má riešenie.

Ak existuje interval, ktorý začína lampu 1, opäť z nich vezmeme najkratší, zmeníme začiatky intervalov rovnako ako v predchádzajúcom bode, ale nemeníme hodnoty poľa l. Takáto pozmenená úloha má opäť riešenie práve vtedy ako pôvodná úloha.

Dôkaz je obdobný, ako v prípade $l[1] =$ `true` (uvedomte si však, že počet intervalov, ktoré obsahujú lampu 1 musí byť tentokrát samozrejme párny).

Našou úlohou však nie je nájsť riešenie, iba zistiť, či nejaké existuje. Treba teda na začiatku nastaviť všetky prvky poľa l na `false` a podľa uvedených úvah postupovať od prvej lampy až po poslednú, pričom modifikujeme pole l a začiatky príslušných intervalov. Dostávame algoritmus s časovou zložitosťou $O(nm)$ a pamäťovou $O(n+m)$.

P – III – 5

Je dôležité si uvedomiť, že môžeme ísť iba smerom na východ alebo na juh. Aby sme sa dostali z križovatky $(1,1)$ na križovatku (M,N), musíme prejsť o M ulíc na juh a o N ulíc na východ. Je jedno v ako poradí striedame smery, počet križovatiek, ktoré prejdeme, je vždy $M+N+1$.

Počet rôznych ciest tiež vypočítame jednoducho. Označme $a[i,j]$ počet rôznych ciest z $(1,1)$ do (i,j). Ak sa križovatka (i,j) opravuje, platí $a[i,j] = 0$. Na ľubovoľnú križovatku na východozápadnej ulici číslo 1 (t.j. na najsevernejšej z nich) sa môžeme dostať najviac jedným spôsobom, tak, že pôjdeme stále na východ. Ak sa však opravuje niekde medzi touto križovatkou a križovatkou $(1,1)$, nemôžeme sa tam dostať vôbec. To isté platí aj pre severojužnú ulicu číslo 1.

Majme teraz križovatku (i,j), kde $i,j > 1$ a táto križovatka sa neopravuje. Na túto križovatku môžeme prísť buď z križovatky $(i-1,j)$, alebo z križovatky $(i,j-1)$. Takže ak poznáme hodnoty $a[i-1,j]$ a $a[i,j-1]$, potom $a[i,j] = a[i-1,j] + a[i,j-1]$.

Na základe týchto úvah môžeme zostrojiť algoritmus, ktorý bude postupne po riadkoch vypĺňať pole a. Napokon budeme mať v $a[m,n]$ počet rôznych ciest z $(1,1)$ do (M,N). Ak je tento počet 0, žiadna taká cesta neexistuje.

Keďže musíme vyplniť celú tabuľku a pre každé políčko robíme konštantný počet operácií, zložitosť algoritmu je $O(MN)$.

Výberové sústredenia pred MMO a MOI

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) a medzinárodnou olympiádou v informatike (MOI) sa každoročne konajú prípravné sústredenia, po ktorých ÚK MO vyberie najlepších študentov do reprezentačných družstiev Slovenska.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 9 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Pri pozývaní na toto sústredenie sa prihliada aj na úspechy v minulých ročníkoch MO a na výsledky korešpondenčného seminára ÚK MO. Sústredenie sa konalo v dňoch 6.–11.5.1996 v Bratislave. Súťažiaci boli ubytovaní v priestoroch EKOIUVENTY a súťažili na MFF UK. Každé ráno dostali sériu troch až piatich úloh, ktorú riešili zväčša 4,5 hodiny. Po obede ich zadávajúci opravil a pred večerou boli spoločne vyhodnotené. Poukázalo sa na najčastejšie chyby, prípadne sa doučili chýbajúce teoretické poznatky. Na konci boli body získané za jednotlivé dni sčítané, prihliadlo sa na výsledky III. kola MO a na základe tohto bolo vybrané šesťčlenné družstvo na MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Eugen Kováč*	50,25
2.	*Ivan Cimrák*	44,25
3.	*Tamás Varga*	43,5
4.	*Vladimír Marko*	39,5
5.	*Miroslav Dudík*	37,5
6.	*Daniel Pártoš*	28,75
7.	*Viera Růžičková*	26
8.	*Martin Jandačka*	25
9.	*Peter Kozák*	24,75

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Richard Kollár, MFF UK, úlohy 1 – 4 (Nerovnosti),
Doc. RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK, 5 – 9 (Planimetria),
Martin Niepel, MFF UK, 10 – 13 (Dôkazové úlohy v planimetrii),
RNDr. Martin Knor, StF STU, 14 – 17 (Kombinatorika),
Mgr. Martin Dindoš, MFF UK, 18 – 21 (Funkcionálne rovnice),
Doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., MFF UK, 22 – 26 (Teória čísel).

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 17.–21. 6. 1996 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS VŠDS Žilina (Matematická analýza),
Prof. Pavol Kostyrko, DrSc., MFF UK Bratislava (Funkcie),
Doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., MFF UK Bratislava (Teória čísel),
Richard Kollár, MFF UK Bratislava (Nerovnosti).

Pre najlepších riešiteľov tretieho kola MO kategórie P bolo v dňoch 13.–18. 5. 1996 výberové sústredenie na MFF UK v Bratislave. Počas sústredenia účastníci riešili úlohy z programovania a na základe dosiahnutých výsledkov bolo na jeho konci vybrané družstvo reprezentujúce Slovensko na MOI. Organizáciu sústredenia zabezpečovali *Tomáš Vinař* a *RNDr. Andrej Blaho* z MFF UK s pomocou mnohých ďalších študentov usporiadajúcej fakulty.

Výsledky sústredenia:

1.	*Miroslav Dudík*	272,3	7.	*Juraj Gottweis*	208,8
2.	*Dušan Bezák*	236,8	8.	*Vladimír Marko*	205,3
3.	*Martin Jandačka*	230,9	9.	*Tomáš Kaláb*	183,2
4.	*Martin Hajduch*	225,9	10.	*Peter Helcmanovský*	176,2
5.	*Stanislav Funiak*	212,3	11.	*Martin Plesch*	174,7
6.	*Ivan Ströhner*	211,1	12.	*Róbert Macho*	149,8

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Nech $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Dokážte, že

$$|a \sin x + b \sin y| \leqq \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(x + y)}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

2. Dokážte, že ak $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sú prirodzené čísla, potom platí

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

3. Nech $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k y_k} \geqq \frac{4n^2}{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

4. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je postupnosť rôznych prirodzených čísel.
a) Dokážte nerovnosť:

$$(a_1^7 + a_2^7 + \ldots + a_n^7) + (a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_n^5) \geqq 2(a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3)^2.$$

b) Nájdite všetky postupnosti, pre ktoré nastáva rovnosť.

5. Zo všetkých mnohouholníkov vpísaných do danej kružnice vyberte ten, ktorý má najväčší súčet druhých mocnín dĺžok jeho strán.

6. Zistite, či existuje konečná množina trojrozmerných vektorov $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ (nad $\mathbb{R}$) s vlastnosťou, že pre všetky dvojice rôznych čísel i, j z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ existuje iná dvojica čísel z tejto množiny s, t (rôzna od $\{i, j\}$ taká, že platí $a_i + a_j = a_s + a_t$.

7. Zostrojte lichobežník $ABCD$, $AB \parallel CD$, ak je dané $|AB| = 0,6$ cm, $|AC| = \sqrt{2}$ cm, $S_{ABCD} = 1\,\mathrm{cm}^2$, $|AC| \geqq |BD|$.

8. Zo všetkých štvoruholníkov $ABCD$, $|BC| = a, |CD| = b$, $|\sphericalangle BAC| = 40°$ vyberte ten, ktorý má najväčší obsah a vypočítajte jeho uhol $|\sphericalangle ACB|$ (a, b sú dané parametre).

9. Určte všetky ostrouhlé trojuholníky ABC, pre ktoré platí (r je polomer opísanej a ϱ vpísanej kružnice $\triangle ABC$):

$$r + \varrho = 3\mathrm{cm}, v_a = 3\mathrm{cm}, a \leqq b \leqq c.$$

10. V trojuholníku ABC na strane BC vyberme taký bod M, aby vzdialenosť ťažiska AMC od vrcholu B bola rovná vzdialenosti ťažiska AMB od vrcholu C. Dokážte, že $|BM| = |CD|$, kde D je päta výšky na na BC.

11. Konvexný štvoruholník je rozdelený svojimi uhlopriečkami na štyri trojuholníky. Dokážte, že priamka spájajúca ťažiská protiľahlých trojuholníkov je kolmá na priamku spájajúcu priesečníky výšok zvyšných dvoch trojuholníkov.

12. Nech BD je výškou trojuholníka ABC. Zostrojme kružnicu, v ktorej tvorí úsečka BD priemer. Táto nech pretína strany AB a BC v bodoch K a L. Priamky dotýkajúce sa kružnice v bodoch K a L sa pretínajú v bode M. Dokážte, že priamka BM delí stranu AC na polovice.

13. Dve kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v bodoch A a B. Veďme ľubovoľnú priamku cez bod B. Tá pretína druhýkrát k_1 v bode C a k_2 v bode D. Dotyčnice ku k_1 v C a ku k_2 v D sa pretínajú v bode M. Priesečníkom AM a CD veďme rovnobežku s CM, ktorá pretína AC v bode K. Dokážte, že KB sa dotýka k_2.

14. Majme $2n$ futbalových družstiev $1, 2, \ldots, 2n$, ktoré budú hrať turnaj jednokolovo (t.j. bez odviet). Urobte taký rozvrh zápasov na $2n - 1$ dní, aby každé mužstvo hralo každý deň práve raz, a aby po $2n-1$ dňoch hral každý s každým.

15. Desať ľudí si kúpilo nejaké knihy, pričom zistili nasledovné:
a) Každý z nich si kúpil tri rôzne knihy;
b) Každá dvojica z nich si kúpila aspoň jednu knihu rovnakú.
Uvažujme knihu, ktorú si kúpilo najviac (n) z týchto ľudí. Aká je minimálna možná hodnota n?

16. Peter má tri dolárové kontá v troch bankách, v každej celočíselný počet peňazí. Peniaze môže presúvať z jednej banky do inej len vtedy, ak sa tým presunom počet dolárov v tej druhej zdvojnásobí.
a) Dokážte, že Peter môže vždy popresúvať peniaze tak, že bude mať nenulové len dve kontá.
b) Môže vždy popresúvať peniaze tak, aby mu zostalo len jedno nenulové konto?

17. Dvaja hráči hrajú hru na štvorčekovej sieti 5×5. Prvý vpisuje do prázdnych polí jednotky a druhý nuly, pričom ich ťahy sa striedajú (prvý začína), až pokiaľ nezaplnia celú sieť. Aký najväčší súčet polí v štvorci o veľkosti 3×3 štvorcov (takých je tu 9) môže dosiahnuť prvý hráč pri ľubovoľnej stratégii druhého?

18. Dokážte, že neexistuje taká funkcia f definovaná na všetkých reálnych číslach, pre ktorú platí:

$$f(f(x)) = x^2 - 2.$$

19. Funkcia f je definovaná na množine všetkých kladných celých čísel podmienkami:

$$\begin{aligned}&f(1)=1, \quad f(3)=3,\\&f(2n)=f(n),\\&f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),\\&f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n), \quad n=1,2,3,\dots\end{aligned}$$

Určte počet takých celých čísel $n, 1 \leqq n \leqq 1996$, pre ktoré $f(n)=n$.

20. Nech $\mathbb{Q}^+$ je množina kladných racionálnych čísel. Určte, či existuje funkcia $f:\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ taká, že pre ľubovoľnú dvojicu kladných racionálnych čísel (x,y) platí:

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

Ak takáto funkcia existuje, nájdite ju!

21. Nech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je spojitá funkcia taká, že pre každé $x\in\mathbb{R}$ platí:

$$2f(x+1) = f(x) + 4f(2x).$$

Ukážte, že potom platí: $f(x)=0$ pre všetky $x\in\mathbb{R}$.

22. Nech $k\in\mathbb{N}$ a f je polynóm s celočíselnými koeficientami stupňa n, pre ktorý sú čísla $f(0), f(1), \dots, f(n)$ deliteľné číslom k. Dokážte, že potom je číslo $f(1996)$ deliteľné k.

23. Ak x, y a z sú prirodzené čísla a $x^2+y^2+z^2=1993$, tak $x+y+z$ nie je štvorec prirodzeného čísla. Dokážte!

24. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel x, y a z, pre ktoré platí $7^x+1=3^y+5^z$.

25. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n>2$ je číslo $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{3k}$ deliteľné tromi.

26. Nech p je prvočíslo väčšie ako 4, $Z_p=\{1,2\dots,p-1\}$. Dokážte, že pre každý rozklad množiny Z_p na tri neprázdne po dvoch disjunktné množiny so zjednotením Z_p existujú také čísla a, b a c z rôznych množín rozkladu, že $a+b\equiv c \pmod p$.

2. československé stretnutie

Žilina, 2.– 5. júna 1996

Po minuloročnej premiére v Jevíčku v Českej republike sa v tomto ročníku MO konala medzištátna súťaž medzi družstvami mladých matematikov po prvýkrát na Slovensku. Celé stretnutie prebiehalo v priestoroch SOU chemického v Žiline. Organizáciu zabezpečoval *Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.,* z VŠDS v Žiline.

Úlohou tejto súťaže nie je len porovnanie síl zúčastnených družstiev, prípadne príprava na MMO, jej cieľom je najmä spoznanie sa najlepších riešiteľov olympiád z dvoch tradíciami spriaznených krajín. Nakoľko medzi súťažiacimi nie je žiadna jazyková bariéra, celá organizácia podujatia je oproti iným medzinárodným súťažiam značne zjednodušená. Preto nie je potrebné prekladať zadania, či riešenia do iných jazykov. Po rozdelení bývalého spoločného štátu Čechov a Slovákov sa mnoho kontaktov prerušilo. Môže nás tešiť, že matematickú olympiádu tento vývoj nepostihol a okrem spoločných úloh a spolupráce pri zabezpečovaní MO pretrvávajú kontakty nielen medzi vedeniami olympiád (predovšetkým Úlohová komisia MO), ale aj medzi riešiteľmi.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.-2.	Michal Beneš	4 G Zborovská, Praha	7	4	7	7	7	7	39
	Ivan Cimrák	4 G V.Okružná, Žilina	7	4	7	7	7	7	39
3.-5.	Miroslav Dudík	3 G Trebišov	7	4	7	7	7	7	38
	Vladimír Marko	3 G J.Hronca, Bratislava	3	7	7	7	7	6	38
	David Opěla	4 G M.Kopernika, Bílovec	5	5	7	7	7	7	38
6.	Tomáš Bárta	4 G Zborovská, Praha	7	4	7	7	4	7	36
7.	Daniel Kráľ	4 G Zlín	7	4	7	7	3	7	35
8.-10.	Eugen Kováč	4 G Stropkov	7	5	7	7	1	7	34
	Tamás Varga	4 G Komárno maď.	7	4	7	7	2	7	34
	Robert Špalek	4 G tř.kpt. Jaroše, Brno	6	7	6	7	1	7	34
11.	Ján Spěvák	3 G Hellichova, Praha	7	0	7	7	1	7	29
12.	Viera Růžičková	2 G V.Okružná, Žilina	4	2	7	0	2	6	21

Opravovanie riešení vždy zabezpečuje domáca strana a na koordinácii hodnotenia sa podieľajú vedúci jednotlivých družstiev. Tento rok nimi boli *Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.* a *Richard Kollár* zo Slovenska a *Doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.* z Českej republiky. Potešujúcou skutočnosťou môže byť, že Úlohová komisia MO sa venuje aj tejto súťaži, a tak boli všetky predložené úlohy pôvodné. Boli to najmä úlohy, ktorých náročnosť, alebo tematické zameranie prekračuje možnosti kategórie A. Zoznam súťažiacich aj s výsledkami súťaže je v tabuľke. Rovnako ako v minulom ročníku lepšie obstál tím Českej republiky. Budúci ročník súťaže sa uskutoční v Českej republike.

Zadania úloh 2. československého stretnutia

Úloha č.1

Nech $\mathbb{Z}^*$ je množina všetkých celých čísel rôznych od nuly. Dokážte, že celé číslo $p > 3$ je prvočíslo, práve keď pre každú dvojicu čísel $a, b \in \mathbb{Z}^*$ práve jedno z čísel

$$N_1 = a + b - 6ab + \frac{p-1}{6}, \qquad N_2 = a + b + 6ab + \frac{p+1}{6}$$

leží v množine $\mathbb{Z}^*$. *(J.Šimša)*

Úloha č.2

Na neprázdnej množine M je daná operácia $*$, ktorá každej usporiadanej dvojici prvkov $(a, b) \in M \times M$ priradí nejaký prvok $c \in M$, ktorý označujeme $c = a * b$. Zaoberajme sa operáciami $*$ s vlastnosťou: vzťahy

$$(a * b) * b = a \qquad \text{a} \qquad a * (a * b) = b$$

platia pre ľubovoľné prvky $a, b \in M$.

a) Dokážte, že každá takáto operácia je komutatívna, t.j. pre všetky $a, b \in M$ platí rovnosť $a * b = b * a$.

b) Na ktorých konečných množinách M takáto operácia existuje?

(J.Šimša, T.Werner)

Úloha č.3

Pravidelný štvorboký ihlan má dĺžku hrany podstavy $2a$ a dĺžku bočnej hrany $a\sqrt{17}$. Vo vnútri ihlana je zvolený bod M. Uvažujme 5 ihlanov podobných danému, ktoré majú hlavný vrchol v bode M, a ktorých podstavy ležia v rovinách stien daného ihlana. Dokážte, že súčet povrchov týchto ihlanov je väčší alebo rovný jednej pätine povrchu daného ihlana. Kde je potrebné zvoliť bod M, aby nastala rovnosť?

(P.Leischner)

Úloha č.4

Nech $\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel. Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taká, že pre každé $k = 0, 1, 2, \ldots , 1996$ a pre každé $m \in \mathbb{Z}$ má rovnica $f(x) + k \cdot x = m$ aspoň jedno riešenie x v obore celých čísel.

(J. Šimša)

Úloha č.5

Na priamke sú dané dve množiny intervalov $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Množina $\mathcal{A}$ obsahuje $2m - 1$ intervalov, kde $m \in \mathbb{N}$, pričom žiadne dva intervaly z $\mathcal{A}$ nie sú disjunktné, nemajú spoločný iba krajný bod, a každý interval z $\mathcal{A}$ obsahuje aspoň dva disjunktné intervaly z $\mathcal{B}$. Dokážte, že v $\mathcal{B}$ možno nájsť interval, ktorý patrí aspoň m intervalom z $\mathcal{A}$.

(P.Hliněný)

Úloha č.6

Vo vnútri strán AC a BC trojuholníka ABC sú po rade zvolené body E a D. Označme F priesečník priamok AD a BE. Dokážte, že podiel obsahov trojuholníkov ABC a ABF spĺňa vzťah

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{|AC|}{|AE|} + \frac{|BC|}{|BD|} - 1.$$

(P.Leischner)

Riešenia úloh 2. československého stretnutia

Úloha č.1

Keď je výraz N_1 nulový, dostaneme zo zadania rovnosť $p = (6a-1)(6b-1)$. Podobne, ak je nulový výraz N_2, dostaneme rovnosť $p = -(6a+1)(6b+1)$.

Najprv dokážeme prvú časť ekvivalencie. Nech je $p > 3$ prvočíslo. Rozlíšime dva prípady $p \equiv 1 \pmod 6$ a $p \equiv -1 \pmod 6$ (iný prípad zrejme nemôže nastať). V prvom z nich zrejme $N_2 \notin \mathbb{Z}^*$. Predpokladajme, že pre niektorú dvojicu $a, b \in \mathbb{Z}^*$ platí aj $N_1 \notin \mathbb{Z}^*$, čiže $N_1 = 0$. To je však zrejme možné, len ak je jedno z čísel $|6a-1|$ alebo $|6b-1|$ rovné 1 (inak by p nebolo prvočíslom). Preto by muselo byť jedno z čísel a, b rovné nule, čo však nie je možné. Obdobný spor dostávame aj v prípade $p \equiv -1 \pmod 6$.

Teraz predpokladajme, že $p > 3$ nie je prvočíslo. Okrem prípadov $p \equiv 1, -1 \pmod 6$ nemôžeme dostať ani N_1, ani N_2 celé. Potom však majú všetky delitele čísla p tvar $6k \pm 1$. Číslo p má teda aspoň jeden z možných rozkladov:

$$p = (6c+1)(6d+1), \qquad p = (6c-1)(6d-1), \qquad p = (6c+1)(6d-1),$$

kde c a d sú prirodzené čísla. V prvom prípade N_2 nie je celé a pre $a = -c$ a $b = -d$ dostávame $N_1 = 0$, v druhom prípade opäť N_2 nie je celé a $N_1 = 0$ pre $a = c$ a $b = d$. Napokon v treťom prípade N_1 nie je celé a pre $a = c$ a $b = -d$ dostávame $N_2 = 0$.

V každom prípade sme našli dvojicu čísel $a, b \in \mathbb{Z}^*$, pre ktorú nie je žiadne z čísel N_1, N_2 z množiny $\mathbb{Z}^*$.

Úloha č.2

a) Podľa prvej identity v zadaní platí $[a*(a*b)]*(a*b) = a$. Výraz v hranatej zátvorke je ale podľa druhej identity v zadaní rovný prvku b, čiže platí $b*(a*b) = a$, a teda $b*a = b*[b*(a*b)]$. Pretože posledný výraz je podľa druhej identity v zadaní rovný $a*b$, platí $b*a = a*b$ a dôkaz komutativity je hotový.

b) Prvky ľubovoľnej n–prvkovej množiny označíme číslami $1, 2, \ldots, n$ a definujeme $a*b = c$ práve keď $n|(a+b+c)$. Táto definícia je korektná (t.j. pre každú dvojicu (a, b) existuje práve jeden taký prvok c) a má okamžitý dôsledok: ak platí $a*b = c$, potom $c*b = a$ a $a*c = b$. Preto operácia $*$ s požadovanou vlastnosťou existuje na každej konečnej množine.

Úloha č.3

Všimnime si, že obsah podstavy aj bočnej steny daného ihlana je rovnaký $S_1 = 4a^2$. Spojnice bodu M s vrcholmi ihlana rozdelia ihlan na štyri štvorsteny a jeden štvorboký ihlan. Všetky tieto telesá majú spoločný vrchol M. Súčet ich objemov je objem daného ihlana. Ak označíme v_i, $(i = 1, \ldots, 5)$ výšky týchto telies z bodu M potom

$$\frac{1}{3} S_1 \sum_{i=1}^{5} v_i = \frac{1}{3} S_1 v,$$

z čoho vyplýva $\sum_{i=1}^{5} v_i = v$, kde v je výška daného ihlana. Teraz si uvedomme, že tieto výšky sú zároveň aj výškami piatich ihlanov podobných danému zo zadania. Z toho:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{v_i}{v} = 1 = \sum_{i=1}^{5} k_i = \sum_{i=1}^{5} \sqrt{\frac{S_i}{S}},$$

pričom S je povrch daného ihlana, S_i sú povrchy piatich vzniknutých ihlanov a k_i sú ich koeficienty podobnosti s daným ihlanom. Z toho ďalej $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{S_i} = \sqrt{S}$, čo po umocnení dáva

$$S = \sum_{i=1}^{5} S_i + \sum_{1 \leqq i < j \leqq 5} 2\sqrt{S_i S_j}.$$

Ak ďalej použijeme AG-nerovnosť, čiže $2\sqrt{S_i S_j} \leqq S_i + S_j$, dostaneme

$$S \leqq \sum_{i=1}^{5} S_i + 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} S_i = 5 \cdot \sum_{i=1}^{5} S_i.$$

Teda $\sum_{i=1}^{5} S_i \geqq \frac{1}{5} S$. Rovnosť nastáva len keď sú všetky ihlany zhodné. Potom je však M stredom gule vpísanej danému ihlanu.

Úloha č.4

Dokážeme, že hľadaná funkcia existuje. Po krátkej úvahe možno nahliadnuť, že stačí nájsť jednoznačné (injektívne) priradenie $(k, m) \to x$ a potom definovať $f(x) = m - kx$. Zrejme potom už bude funkcia $f(x)$ splňať zadané podmienky.

Položme $d = 1996 + 1 = 1997$. Podľa vety o delení celých čísel možno každé číslo $x \in \mathbb{Z}$ zapísať jediným spôsobom v tvare $x = m \cdot d + k$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $k \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$. Na základe tohoto vyjadrenia (s pevným d) položme $f(x) = m - kx$, t.j. $f(m \cdot d + k) = m - k(m \cdot d + k)$. Potom každá rovnica $f(x) + k \cdot x = m$ má riešenie (nie nutne jediné) $x = m \cdot d + k$.

Úloha č.5

Označme si intervaly v množine $\mathcal{A}$ ako $\alpha_i = \langle a_i, b_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, 2m - 1$; indexy môžeme zrejme voliť tak, aby platilo

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots a_{2m-1}. \tag{1}$$

Nech ďalej b_k, $k \in \{m, m+1, \ldots, 2m-1\}$ je najmenšie z čísel $b_m, b_{m+1}, \ldots, b_{2m-1}$. Podľa zadania obsahuje interval $\alpha_k \in \mathcal{A}$ dva disjunktné intervaly z množiny $\mathcal{B}$. Označme ich $\beta_1 = \langle c_1, d_1 \rangle$ a $\beta_2 = \langle c_2, d_2 \rangle$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že

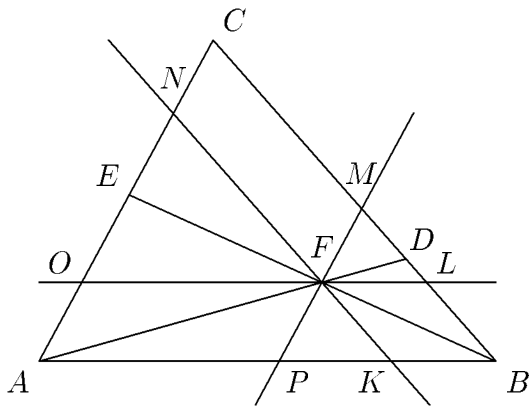
$$a_k \leqq c_1 < d_1 < c_2 < d_2 \leqq b_k. \tag{2}$$

Teraz rozlíšime nasledujúce prípady:

1) $d_1 \leqq b_i$ pre všetky $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom ale z (1) aj $\beta_1 \subset \alpha_i$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, m$, a teda β_1 má požadovanú vlastnosť.
2) $d_1 > b_s$ pre nejaké $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Vďaka (2) aj $c_2 > b_s$. Pretože podľa zadania majú každé dva intervaly z $\mathcal{A}$ spoločný bod, platí zároveň $b_s \geqq a_i$ pre všetky i, a teda $c_2 > a_i$ pre všetky i. Napokon z definície b_k je $b_k \leqq b_i$ pre $i = m, m + 1, \ldots, 2m - 1$. Celkom teda platí $a_i < c_2 < d_2 \leqq b_k \leqq b_i$, pre každé $i \in \{m, m + 1, \ldots, 2m - 1\}$, čiže $\beta_2 \subset \alpha_i$ pre všetky $i \in \{m, m + 1, \ldots, 2m - 1\}$. Interval β_2 má potom požadovanú vlastnosť.

Tým je dôkaz ukončený.

Úloha č.6



Obr. 29

Veďme bodom F rovnobežky so stranami trojuholníka ABC a ich priesečníky s týmito stranami označme K, L, M, N, O, P (obr. 29).

Ak ďalej označíme v_C, v_F vzdialenosti bodov C, F od priamky AB, potom

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{v_C}{v_F} = \frac{|BC|}{|FK|}. \tag{3}$$

Keď teraz použijeme podobnosť trojuholníkov FLM, PKF a rovnoľahlosť úsečiek MP a AC so stredom v B (bod F sa v tejto rovnoľahlosti zobrazí na bod E) – rovnoľahlosť zachováva pomery dĺžok úsečiek, dostaneme

$$\frac{|LM|}{|FK|} = \frac{|FM|}{|FP|} = \frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AE|} - 1. \tag{4}$$

Ďalej platí

$$\frac{|CM|}{|FK|} = \frac{|NF|}{|FK|} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BD|} - 1 \tag{5}$$

a podľa (3)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABF}} = \frac{|BC|}{|FK|} = \frac{|BL| + |LM| + |MC|}{|FK|}.$$

Do poslednej rovnosti dosadíme $|BL| = |FK|$ a dĺžky $|LM|$, $|CM|$ vyjadrené zo (4) a (5). Tak dostaneme zadaný vzťah.

37. medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 5. až 17. júla 1996 sa v Bombayi v Indii konala 37. medzinárodná matematická olympiáda IMO'96. Zúčastnilo sa jej 424 súťažiacich zo 75 krajín. Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zo zúčastnených krajín na ňu vysiela súťažné družstvo zložené z najviac šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tvorili *Ivan Cimrák* zo 4.ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline, *Miroslav Dudík* z 3.ročníka Gymnázia v Trebišove, *Eugen Kováč* z 3.ročníka Gymnázia v Stropkove, *Vladimír Marko* z 3.ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *Viera Růžičková* z 2.ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline a *Tamás Varga* zo 4.ročníka Gymnázia s vyučovacím jazykom maďarským v Komárne.

Vedúcim delegácie bol *Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.*, z VŠDS v Žiline a zástupcom vedúceho *Richard Kollár* z MFF UK v Bratislave.

Samotná súťaž je rozdelená do dvoch súťažných dní, počas ktorých súťažiaci riešia po 3 úlohy, na ktorých vyriešenie majú vždy 4,5 hodiny čistého času. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Ivan Cimrák	7	1	2	6	1	1	18	3.
Miroslav Dudík	7	0	5	1	1	7	21	2.
Eugen Kováč	4	1	6	4	1	3	19	3.
Vladimír Marko	4	1	7	1	1	7	21	2.
Viera Růžičková	0	0	4	1	0	7	12	3.
Tamás Varga	1	1	6	0	2	7	17	3.

Pre zaujímavosť uvádzame aj výsledky družstva Českej republiky:

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Tomáš Bárta	7	1	6	0	0	7	21	2.
Michal Beneš	7	1	6	0	0	7	21	2.
Daniel Kráľ	4	2	1	0	0	1	8	–
David Opěla	4	1	7	0	0	6	18	3.
Jan Spěvák	2	1	1	1	0	0	5	–
Robert Špalek	1	0	5	3	0	1	10	–

Výsledky sú veľmi netradičné, prekvapujúca je hlavne veľmi nízka (12 bodov) hranica na zisk tretej ceny, na druhú bolo treba 20 (trom našim účastníkom ušla len tesne) a na prvú len 28 bodov. To, že úlohy neboli úplne neriešiteľné, potvrdil svojim výkonom najmä *Ciprian Manolescu* z Rumunska, ktorý – tak ako minulý rok – aj teraz získal plný počet bodov – 42. V Kanade bol však len jeden zo 14 absolútnych víťazov, tentokrát zvíťazil sám s náskokom 3 bodov pred ďalším súťažiacim z Kórei. Naše družstvo prekvapilo. Napriek mladému zloženiu dosiahlo najlepší výsledok za posledné tri roky, aj keď tentoraz chýbala výrazná individualita. Nečakaný je hlavne zisk za jednotlivé úlohy. Kým sa nám nepodarilo nadviazať na tradične dobré výsledky v geometrii (treba však pripomenúť, že piata úloha bola podľa celkových výsledkov suverénne najťažšia a po nej nasledovali druhá a tretia), vynikajúci bodový zisk priniesla šiesta úloha - jednoduchá kombinatorika, v ktorej sme mali pre zmenu tradične zlé výsledky. Výborné hodnotenie sme získali aj za tretiu úlohu (funkcionálna rovnica). Do budúceho roku zostáva len veriť, že obaja strieborní medailisti siahnu aj po najvyššom ocenení. V neoficiálnom poradí sme obsadili 17. miesto, čo zároveň znamená po prvýkrát umiestnenie pred tímom Českej republiky, ktorý tentokrát sklamal.

Zhodnotiť nematematický priebeh medzinárodnej matematickej olympiády je neľahké. Obzvlášť pre člena družstva Slovenska. Celé podujatie bolo sprevádzané množstvom problémov. Už samotná cesta do dejiska sa ukázala problematická, naše družstvo docestovalo do Bombaya len jeden deň pred súťažou po namáhavej ceste cez Viedeň, Frankfurt a Dílli, kde aj pobudlo v nedýchateľnom ovzduší šesť nočných hodín. Pred špinavým vnútroštátnym letiskom v Bombayi sme potom strávili spolu s jediným telefónnym číslom ďalšie tri hodiny. Na spomínanom čísle však nebol nik kompetentný a ani dobre hovoriaci anglicky. Na vetu „We need a bus.“ odpovedal otázkou „Bulgarian Airlines?“. Po dlhom čakaní sa nás napokon ujal jeden z usporiadateľov a objednal nám do miesta súťaže taxík. V tento nádherný deň sme sa ešte okrem nejedlej stravy mohli pokochať viac ako trojhodinovým otváracím ceremoniálom obsahujúcim okrem vynikajúcich prejavov aj dvojhodinové tanečné predstavenie. Únavu sme už skoro ani necítili, a tak sme hneď po odloženej (neskorý začiatok) večeri šli spať. Desaťhodinový spánok pred súťažou mohol postačovať, ak by však naša jediná súťažiaca nebola najprv vyrušovaná údržbármi, ktorým už v noci nedovolila opravovať kúpeľňu. To však nebolo najmúdrejšie, pretože zdvorilí usporiadatelia nemôžu nechať hosťa spať v miestnosti s pokazenou kúpeľňou ani chvíľu, a tak sa musela o desiatej v noci ešte sťahovať. Prvý poriadny oddych si teda užila až počas súťaže, čo sa prejavilo aj na jej výsledku za prvý súťažný deň.

Ďalší priebeh už bol lepší, autobusy meškajúce hodinu až dve, nočné návraty z exkurzií bez večere, či celodenné vozenie sa v daždi sa stali bežnou záležitosťou. Tieto nekonečné cesty autobusmi (klimatizovanými, ak práve nebola klimatizácia pokazená) nám poukazovali azda všetky chudobné predmestia tohto 13-miliónového mesta. Slumy, ako sa milióny papierových, plechových a trstinových stanov volajú, boli naozaj všade. A tiež špina, smrad a tisíce žobrákov. Veľká škoda, že nás nezaviedli do centra mesta, kde to podľa usporiadateľov vyzerá inak. Napokon sme však predsa navštívili luxusný hotel v centre. Nakoľko ide o jednu z najvyšších budov v tejto časti Ázie, bol usporiadaný banket priamo v jeho podzemí. Šťastie, že poznáme toľko matematických hier, ktoré sme mohli počas tohto zaujímavého programu predviesť ostatným výpravám. Na záver ešte spomeňme vynikajúce vystúpenie indických gymnastov na tyči (azda najlepšia časť kultúrneho programu) žiaľ nasledované vystúpením dedinského kúzelníka, ktoré však bolo našťastie pre obrovský nezáujem v polovici prerušené, a slávnostné udeľovanie cien, ktorého polovičku však vedenie našej výpravy zmeškalo pre neskorý príchod autobusu.

Špeciálnu časť programu absolvoval náš súťažiaci *Vladimír Marko*, ktorému pred niekoľkodňovou návštevou miestnej nemocnice nepomohli ani antimalariká. Žalúdočné problémy ako on mali však azda všetci súťažiaci, nielen naši. Dlhodobejšie hospitalizovaný bol však len on. Našťastie sa oňho v nemocnici naozaj príkladne starali, a tak si dokonca mohol osobne prevziať na vyhodnotení svoju striebornú medailu. V takejto situácii možno preto hodnotiť náš výsledok ako vynikajúci.

Pred úplným ukončením MMO ešte zástupcovia Argentíny pozvali všetky zúčastnené krajiny na nasledujúcu, už 38. medzinárodnú matematickú olympiádu, ktorá sa u nich bude konať koncom júla na budúci rok. Ďalšie ročníky by mali usporiadať Tchaj-wan, Rumunsko, Južná Kórea, USA, Filipíny a Japonsko.

Výsledky 37. medzinárodnej matematickej olympiády

Krajina	Počet	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Albánsko	4	15	0	0	0	67.–68.
Argentína	6	80	0	1	3	29.
Arménsko	6	63	0	0	1	35.
Austrália	6	93	0	2	3	23.
Azerbajdžan	6	27	0	0	0	58.
Bielorusko	6	99	1	1	2	21.
Belgicko	6	75	0	0	4	31.
Bosna a Hercegovina	4	30	0	0	1	57.
Brazília	6	36	0	0	0	52.
Bulharsko	6	136	1	4	1	11.–12.
Cyprus	5	14	0	0	0	69.
Česká republika	6	83	0	2	1	28.
Čína	6	160	3	2	1	6.
Dánsko	6	44	0	0	2	48.–51.
Estónsko	6	33	0	0	0	55.
Filipíny	6	8	0	0	0	74.
Fínsko	6	58	0	0	2	39.
Francúzsko	6	61	0	2	0	36.
Grécko	6	95	0	1	5	22.
Gruzínsko	6	78	1	0	2	30.
Holandsko	6	26	0	0	0	59.
Hong Kong	6	84	0	1	4	27.
Chile	2	10	0	0	0	71.
Chorvátsko	6	63	0	1	1	34.–35.
India	6	118	1	3	1	14.
Indonézia	6	11	0	0	0	70.
Irán	6	143	1	4	1	9.
Island	4	31	0	0	1	56.
Izrael	6	114	1	2	2	15.
Írsko	6	24	0	0	0	61.
Japonsko	6	136	1	3	1	11.–12.
JAR	6	50	0	0	2	43.
Juhoslávia	6	87	0	1	2	24.
Južná Kórea	6	151	2	3	0	8.
Kanada	6	111	0	3	3	16.
Kazachstan	6	20	0	0	0	64.
Kirgizstan	6	15	0	0	0	67.–68.

Krajina	Počet	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Kolumbia	6	48	0	1	0	46.
Kuba	1	16	0	0	1	66.
Kuvajt	2	1	0	0	0	75.
Litva	6	66	0	0	3	33.
Lotyšsko	6	68	0	1	2	32.
Macao	6	44	0	0	1	48.–51.
Macedónsko	6	44	0	0	2	48.–51.
Maďarsko	6	167	3	2	1	3.
Malajzia	4	9	0	0	0	72.
Maroko	6	19	0	0	1	65.
Mexiko	6	34	0	0	0	53.-54.
Moldavsko	5	55	0	0	2	41.
Mongolsko	6	49	0	0	2	44.–45.
Nemecko	6	137	3	1	1	10.
Nový Zéland	6	60	0	0	3	37.–38.
Nórsko	6	60	0	0	3	37.–38.
Poľsko	6	122	0	3	3	13.
Portugalsko	6	21	0	0	0	63.
Rakúsko	6	54	0	1	0	42.
Rumunsko	6	187	3	3	0	1.
Rusko	6	162	2	3	1	4.
Singapúr	6	86	0	1	3	25.–26.
Slovensko	6	108	0	2	4	17.
Slovinsko	6	49	0	0	2	44.–45.
Srí Lanka	6	34	0	0	1	53.–54.
Španielsko	6	44	0	0	0	48.–51.
Švajčiarsko	4	23	0	0	1	62.
Švédsko	6	57	0	1	1	40.
Taliansko	6	86	0	2	2	25.–26.
Thajsko	6	47	0	0	1	47.
Tchaj-wan	6	100	0	2	3	20.
Trinidad a Tobago	6	25	0	0	0	60.
Turecko	6	104	0	2	3	19.
Turkménsko	4	9	0	0	0	73.
Ukrajina	6	105	1	0	5	18.
USA	6	185	4	2	0	2.
Veľká Británia	6	161	2	4	0	5.
Vietnam	6	155	3	1	1	7.

Zadania úloh 37. medzinárodnej matematickej olympiády

1. Nech $ABCD$ je obdĺžniková doska s rozmermi $|AB| = 20$, $|BC| = 12$. Doska je rozdelená na 20×12 jednotkových štvorcov. Nech r je dané prirodzené číslo. Mincou možno ťahať z jedného štvorca na druhý vtedy a len vtedy, keď vzdialenosť stredov týchto štvorcov je $\sqrt{r}$. Úlohou je nájsť postupnosť ťahov mincou vedúcu zo štvorca s vrcholom A do štvorca s vrcholom B.

a) Ukážte, že úloha sa nedá splniť, ak je r deliteľné 2 alebo 3.

b) Dokážte, že úloha sa dá splniť, ak $r = 73$.

c) Dá sa úloha splniť pre $r = 97$? *(Fínsko)*

2. Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC, pre ktorý platí

$$|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|.$$

Nech D a E sú po rade stredy kružníc vpísaných trojuholníkom APB a APC. Dokážte, že priamky AP, BD a CE sa pretínajú v jednom bode.

(Kanada)

3. Nech $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu všetkých nezáporných celých čísel. Nájdite všetky funkcie f definované na $\mathcal{S}$, ktorých funkčné hodnoty sú z $\mathcal{S}$, s vlastnosťou

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad \text{pre všetky } m, n \in \mathcal{S}.$$

(Rumunsko)

4. Dané sú prirodzené čísla a, b také, že obe čísla $15a + 16b$ a $16a - 15b$ sú druhou mocninou prirodzených čísel. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu, ktorú môže nadobudnúť minimum oboch druhých mocnín.

(Rusko)

5. Nech $ABCDEF$ je konvexný šesťuholník taký, že AB je rovnobežné s DE, BC je rovnobežné s EF a CD je rovnobežné s AF. Označme R_A, R_C a R_E po rade polomery kružníc opísaných trojuholníkom FAB, BCD a DEF a nech p je obvod daného šesťuholníka. Dokážte, že platí $R_A + R_C + R_E \geqq \frac{p}{2}$.

(Arménsko)

6. Nech n, p, q sú prirodzené čísla, pre ktoré $n > p + q$. Nech $x_0, x_1, \dots, x_n$ sú celé čísla spĺňajúce nasledujúce podmienky:

a) $x_0 = x_n = 0$;

b) pre každé celé číslo i, $1 \leqq i \leqq n$ je buď $x_i - x_{i-1} = p$, alebo $x_i - x_{i-1} = -q$.

Ukážte, že existuje dvojica indexov (i, j) taká, že $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$ a $x_i = x_j$.

(Francúzsko)

Riešenia úloh 37. medzinárodnej matematickej olympiády

Úloha č. 1 *(Ivan Cimrák)*

Zavedieme súradnicovú sústavu s počiatkom v strede štvorca s vrcholom A a tak, aby stred štvorca s vrcholom B mal súradnice $[19,0]$. (Potom má stredu štvorca s vrcholom D zrejme súradnice $[0,11]$.)

a) Najprv rozoberme prípad $r = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Ak ťah mincou možno v našej súradnicovej sústave reprezentovať posunutím o vektor (a,b), $a,b \in \mathbb{Z}$, potom musí platiť $a^2 + b^2 = r = 2k$. Zrejme teda majú čísla a aj b rovnakú paritu. Keďže vychádzame z pozície $[0,0]$, súčet oboch súradníc polohy mince po každom pohybe musí byť párny. Na konci preto nemôžeme dosiahnuť polohu $[19,0]$.
V prípade $r = 3k$ analogicky $a^2 + b^2 = 3k$, avšak zvyšky druhých mocnín po delení číslom 3 sú len 0 alebo 1, preto jediná vhodná kombinácia zvyškov čísel a,b nastáva vtedy, keď sú obe deliteľné tromi. Tvrdenie potom už ľahko dokážeme obdobnými argumentami ako vyššie.

b) Príkladom takejto cesty je napríklad táto: $[0,0]$; $[8,3]$; $[16,0]$; $[19,8]$; $[11,5]$; $[19,2]$; $[16,10]$; $[8,7]$; $[16,4]$; $[8,1]$; $[11,9]$; $[19,6]$; $[11,3]$; $[19,0]$.

c) Rovnica $a^2+b^2 = 97$ má v celých číslach riešenia len $(\pm 4)^2+(\pm 9)^2 = 97$. Uvažujme teraz všetky pohyby, ktoré môže minca pri tejto podmienke absolvovať. Ťahy mincou možno rozdeliť na dva typy - typ $\mathcal{G}$, keď sa y-ová súradnica bodu mení o 4 a typ $\mathcal{H}$, keď sa y-ová súradnica bodu mení o 9. Všímajme si teraz možný počet ťahov typu $\mathcal{G}$ medzi dvomi susednými (nasledujúcimi) ťahmi typu $\mathcal{H}$. Rozoberme niekoľko prípadov.

- *Oba ťahy typu $\mathcal{H}$ zväčšujú y-ovú súradnicu o 9* – potom pred týmito ťahmi mohli byť y-ové súradnice polohy mince len 0, 1 alebo 2, z čoho, vzhľadom na zachovávanie zvyšku y-ovej súradnice po delení štyrmi pri ťahoch typu $\mathcal{G}$, vyplýva, že tieto súradnice museli byť rovnaké, teda ťahov typu $\mathcal{G}$ naozaj musel byť párny počet.
- *Oba ťahy typu $\mathcal{H}$ zmenšujú y-ovú súradnicu o 9* – tento prípad je obdobný ako predchádzajúci.
- *Jeden ťah typu $\mathcal{H}$ zväčšuje y-ovú súradnicu o 9, druhý zmenšuje* – potom pred týmito ťahmi mohli byť y-ové súradnice polohy mince len 0, 1 alebo 2, resp. 9, 10, 11. Rozdiel polôh je teda číslo z množiny $\{7,8,9,10,11\}$. Ak opäť uvážime zvyšok modulo 4, do úvahy pripadá len rozdiel 8. Ten však znamená párny počet ťahov typu $\mathcal{G}$.

V každom prípade je počet ťahov typu $\mathcal{G}$ párny. Poľahky sa (opäť použitím modula 4) ukáže, že ak by sme mali vyjsť z pozície $[0,0]$ a prísť do pozície $[19,0]$, tak aj pred prvým ťahom typu $\mathcal{H}$ aj po poslednom ťahu typu $\mathcal{H}$ musel byť párny počet ťahov typu $\mathcal{G}$. Preto bol nutne počet všetkých ťahov typu $\mathcal{G}$ párny. Ak si teraz pre zmenu všimneme x-ové súradnice začiatku aj konca cesty, zistíme, že majú rôznu paritu. To však nie je pri párnom počte ťahov typu $\mathcal{G}$ možné (ťahy typu $\mathcal{H}$ paritu nemenia). Preto hľadaná cesta neexistuje.

Iné riešenie, časť c) *(Miroslav Dudík)*

Skúmajme y-ovú súradnicu pri pohybe mincou z bodu $[0,0]$ do $[19,0]$. Jej zmeny sú čísla z množiny $\{-9,-4,4,9\}$. Keďže začíname aj končíme v pozícii 0, musí byť celková zmena súradníc v tvare $9k + 4l$, $k,l \in \mathbb{Z}$ rovná nule. Čísla 4 a 9 sú však nesúdeliteľné, preto musí byť $k = 4m, l = -9m$, $m \in \mathbb{Z}$. Zrejme $m \neq 0$, pretože potom by bol celkový počet pohybov oboch typov párny, čo nám neumožňuje zmeniť x-ovú súradnicu z 0 na 19. Bez ujmy na všeobecnosti nech je m kladné. Potom je počet pohybov so zmenou y-ovej súradnice o $+9$ aspoň o 4 väčší ako počet pohybov so zmenou o -9. Celý proces zmeny súradníc potom musí prebiehať nasledovne:

$$d_1+\ldots+d_u+9+d_{u+2}+\ldots+d_v+9+d_{v+2}+\ldots+d_w+9+d_{w+2}+\ldots+d_z+9+d_{z+2}+\ldots+d_n,$$

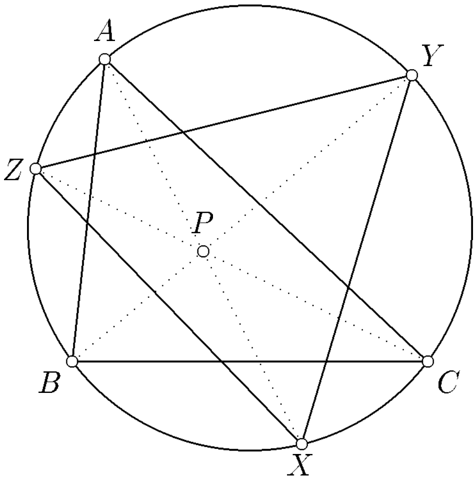
kde $d_1, \ldots, d_n$ sú postupne zmeny y-ovej súradnice vo všetkých ťahoch mincou a platí

$$d_1+\ldots+d_u \equiv d_{u+2}+\ldots+d_v \equiv d_{v+2}+\ldots+d_w \equiv d_{w+2}+\ldots+d_z \equiv d_{z+2}+\ldots+d_n \pmod 4$$

(Toto tvrdenie si dobre rozmyslite.) V takomto prípade sa však štvrtá vyznačená deviatka pripočítava v situácii, keď dáva y-ová súradnica zvyšok 3 modulo 4, čo však zrejme nie je možné, pretože tento zvyšok z prípustných polôh dávajú len čísla 3, 7, 11, a ani k jednému tomuto číslu nemožno pripočítať 9 bez toho, aby sme prekročili 11 (teda vyšli z dosky). Prípad m záporné sa rozoberie obdobne. Preto aj tu dochádzame k záveru, že hľadaná cesta neexistuje.

Úloha č. 2

Na dôkaz tvrdenia je potrebné dokázať, že osi uhlov $\sphericalangle ABP$ a $\sphericalangle ACP$ sa pretínajú na AP. Označme k kružnicu opísanú trojuholníku ABC a ďalej X, Y a Z po rade jej priesečníky s polpriamkami AP, BP a CP. Podmienka $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$ je ekvivalentná s $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle PCB|$, čo možno zjednodušiť na $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XYZ|$, teda $|XY| = |XZ|$. Trojuholníky BPC a ZPY sú podobné, preto $|BC|/|ZY| = |BP|/|ZP| = |PC|/|PY|$. Nech $|BP| \cdot |PY| = t$, potom $|PC| \cdot |ZP| = t = |AP| \cdot |PX|$. Z toho (obr. 30)



Obr. 30

$$\frac{|BC|}{|ZY|} = \frac{|BP|}{|ZP|} = \frac{|BP| \cdot |PC|}{t},$$

čo možno upraviť na

$$|YZ| = t\left(\frac{|BC|}{|BP| \cdot |PC|}\right).$$

Cyklickou zámenou máme tiež

$$|XY| = t\left(\frac{|AB|}{|AP| \cdot |BP|}\right), \qquad |XZ| = t\left(\frac{|AC|}{|AP| \cdot |CP|}\right).$$

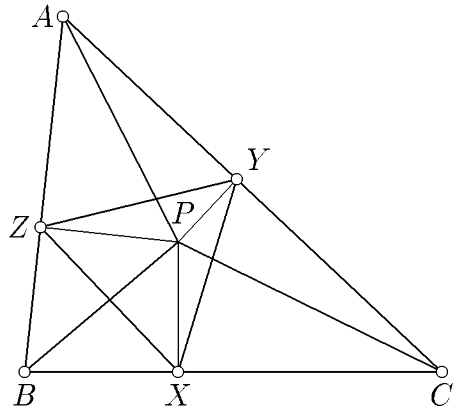
Keďže $|XY| = |XZ|$, dostávame $\dfrac{|AB|}{|BP|} = \dfrac{|AC|}{|PC|}$, čiže $\dfrac{|BA|}{|BP|} = \dfrac{|CA|}{|CP|}$, teda osi uhlov sa pretínajú na AP.

Iné riešenie.

Použijeme nasledujúcu netriviálnu lemu.

LEMA: *Označme päty kolmíc z bodu P na strany BC, CA a AB po rade X, Y a Z (obr. 31). Potom platí $|YZ| = |PA| \cdot \sin|\sphericalangle BAC|$ a $|\sphericalangle YXZ| = |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle BAC|$.*

Túto lemu možno dokázať využitím tetivových štvoruholníkov $AZPY$, $BXPZ$ a $CYPX$ a použitím pravých uhlov, ktoré sa v nich nachádzajú. Nech teraz BD a CE pretínajú AP po rade v bodoch Q a R. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení zrejme stačí dokázať, že $|AB|/|BP| = |AC|/|CP|$. To je však ekvivalentné s $|AB| \cdot |CP| = |AC| \cdot |BP|$. Použitím sínusovej vety v trojuholníku ABC je to ďalej ekvivalentné s $|CP| \cdot \sin|\sphericalangle ACB| = |BP| \cdot \sin|\sphericalangle ABC|$. Teraz použijeme lemu, stačí teda dokázať $|XY| = |XZ|$. Avšak z daného $|\sphericalangle APB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle APC| - |\sphericalangle ABC|$ pomocou lemy vyplýva $|\sphericalangle XZY| = |\sphericalangle XYZ|$, čo vedie k $|XY| = |XZ|$, čo bolo treba dokázať.



Obr. 31

Úloha č. 3 *(Vladimír Marko)*

Dosadením $m = n = 0$ do zadanej rovnice dostávame $f(0) = 0$. Teraz dosadením $m = 0$ dostávame $f(f(n)) = f(n)$, čiže $f(h) = h$ pre každé $h \in \mathcal{H}_f$, kde $h \in \mathcal{H}_f$ je obor hodnôt f.

Jedno z riešení rovnice je $f(n) = 0$ pre všetky nezáporné celé n. Ináč existuje najmenší nenulový prvok množiny $h \in \mathcal{H}_f$, označme ho c. Platí $f(c) = c$. Dokážeme, že pre každé $q < c, q \in \mathcal{S}$ platí $c|f(q)$. Ak by existovalo také q, $q < c$, $q \in \mathcal{S}$, že $f(q) = r + kc$, kde $k \in \mathcal{S}$, $r \in \{1, 2, \ldots, c-1\}$, potom $f(r + kc) = r + kc$, pretože $r + kc \in \mathcal{H}_f$, čo možno pomocou daného vzťahu rozpísať

$$r + kc = f(r + kc) = f(r + \underbrace{f(c) + f(c) + \ldots + f(c)}_{k\text{-krát}}) =$$
$$= f(r) + \underbrace{f(c) + f(c) + \ldots + f(c)}_{k\text{-krát}} = f(r) + kc,$$

čiže $f(r) = r$, čo je spor s výberom c. Pre každé $q > c$ môžeme písať $q = kc + l$, kde $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{0, 1, \ldots, c-1\}$. Potom

$$f(q) = f(l + kc) = f(l) + f(kc) = f(l) + kc.$$

Teda funkcia f je presne daná svojimi hodnotami $f(0) = 0, f(1), \ldots, f(c-1)$, $c|f(i)$, pre $i = 1, 2, \ldots, c-1$. Skúškou sa overí, že každá takáto funkcia naozaj vyhovuje.

Úloha č. 4

Označme $15a + 16b = r^2$ a $16a - 15b = s^2$, kde $r, s \in \mathbb{N}$. Odtiaľ dostávame

$$r^4 + s^4 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Číslo $481 = 13 \times 37$. Teraz využijeme fakt, že x^4 nedáva zvyšok -1 ani modulo 37 ani modulo 13. (Ak by $-1 \equiv x^4 \pmod{13}$, pre nejaké $x \in \mathbb{N}$, potom z *Malej Fermatovej vety* $(-1)^3 \equiv 1 \pmod{13}$, čo neplatí; druhá kongruencia $-1 \equiv x^4 \pmod{37}$, pre nejaké $x \in \mathbb{N}$, vedie ku $(-1)^9 \equiv 1 \pmod{13}$, čo tiež neplatí.) Keďže $r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{13}$, buď $r \equiv s \equiv 0 \pmod{13}$, alebo $r \not\equiv 0$, $s \not\equiv 0 \pmod{13}$. Druhá možnosť nemôže nastať, pretože x^4 nikdy nedáva zvyšok -1 modulo 13; preto $13|r, 13|s$. Obdobne $37|r, 37|s$. Preto $481|r, 481|s$, čiže $r \geqq 481, s \geqq 481$. Pre $r = s = 481$ ľahko nájdeme dvojicu $a = 481 \cdot 31, b = 481$. Preto je hľadané minimum rovné 481^2.

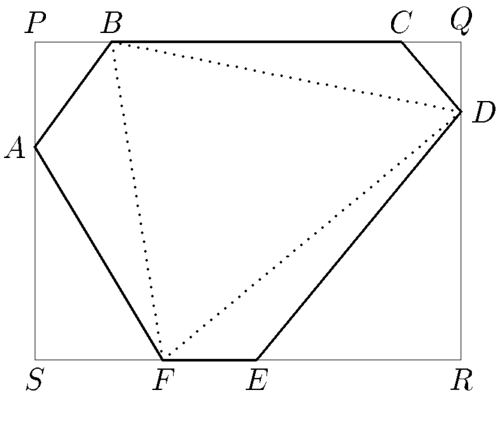
Iné riešenie

Vhodným sčítaním prvých dvoch rovníc dostávame $481a = 16r^2 + 15s^2$. Ak uvažujeme túto rovnicu modulo 13, dostávame $3r^2 + 2s^2 \equiv 0 \pmod{13}$. Ak však preskúmame všetky kvadratické zvyšky modulo 13, zistíme, že táto možnosť môže nastať len pre $13|r$, $13|s$. Obdobne môžeme uvažovať túto rovnicu modulo 37, teda $16r^2 + 15s^2 \equiv \equiv 0 \pmod{37}$. Teraz preskúmame 15- a 16-násobky kvadratických zvyškov modulo 37 a zistíme, že aj táto možnosť nastáva len pre $37|r, 37|s$. Ďalší postup je už potom rovnaký ako v prvom riešení.

Úloha č. 5

Označme po rade a, b, c, d, e a f dĺžky strán AB, BC, CD, DE, EF a FA. Všimnime si, že zo zadania vyplýva, že protiľahlé uhly šesťuholníka sú zhodné ($|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle CDE|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$, $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle EFA|$) (obr. 32). Uvažujme nasledujúce kolmice: $AP \perp BC$, $AS \perp EF$, $DQ \perp BC$, $DR \perp EF$. Potom $PQRS$ je pravouholník a $|BF| \geqq \geqq |PS| = |QR|$. Preto $2|BF| \geqq |PS| + |QR|$, čiže

$$2|BF| \geqq (a \sin |\sphericalangle ABC| + f \sin |\sphericalangle BCD|) + (c \sin |\sphericalangle BCD| + d \sin |\sphericalangle ABC|).$$



Obr. 32

Obdobne

$$2|DB| \geqq (c \sin |\sphericalangle FAB| + b \sin |\sphericalangle ABC|) + (e \sin |\sphericalangle ABC| + f \sin |\sphericalangle FAB|),$$
$$2|FD| \geqq (e \sin |\sphericalangle BCD| + d \sin |\sphericalangle FAB|) + (a \sin |\sphericalangle FAB| + b \sin |\sphericalangle BCD|).$$

Pre polomery kružníc opísaných trojuholníkom FAB, BCD a DEF platí

$$R_A = \frac{|BF|}{2\sin|\sphericalangle FAB|}\,, \qquad R_C = \frac{|DB|}{2\sin|\sphericalangle BCD|}\,, \qquad R_E = \frac{|FD|}{2\sin|\sphericalangle ABC|}\,.$$

Odtiaľ

$$\begin{gathered} 4(R_A + R_C + R_E) \geqq \\ \geqq a\left(\frac{\sin|\sphericalangle ABC|}{\sin|\sphericalangle FAB|} + \frac{\sin|\sphericalangle FAB|}{\sin|\sphericalangle ABC|}\right) + b\left(\frac{\sin|\sphericalangle ABC|}{\sin|\sphericalangle BCD|} + \frac{\sin|\sphericalangle BCD|}{\sin|\sphericalangle ABC|}\right) + \ldots \geqq \\ \geqq 2(a+b+c+d+e+f) = 2P, \end{gathered}$$

a teda $R_A + R_C + R_E \geqq \frac{P}{2}$, čo bolo treba dokázať. Rovnosť platí, ak $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD|$ a zároveň $BF \perp BC, \ldots$; teda práve vtedy, keď je šesťuholník pravidelný.

Úloha č. 6 *(Vladimír Marko)*

Ak p a q nie sú nesúdeliteľné, môžeme p, q aj x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ vydeliť najväčším spoločným deliteľom čísel p a q a prevedieme celý problém na riešenie s p, q nesúdeliteľnými.

Teraz už môžeme predpokladať, že p, q sú nesúdeliteľné. Ak posledný člen postupnosti x_n vznikol k-krát pričítaním čísla p a l-krát odčítaním čísla q, potom $0 = x_n = kp - lq$, kde $k + l = n$. Teda triviálne $q|k$ a $p|l$. Nech $k = k_0 q$ a $l = l_0 p$. Potom $x_n = (k_0 - l_0)pq$, čiže $k_0 = l_0$. Z toho $n = k + l = k_0(p+q)$.

Ďalej označme $f_i = x_i - x_{i-p-q}$ pre $i = p+q, p+q+1, \ldots, n$. Ak niektoré z týchto $f_i = 0$, potom $x_i = x_{i-p-q}$ a tvrdenie zrejme platí. Preto môžeme predpokladať, že všetky $f_i \neq 0$. Člen f_{p+q} možno napísať v tvare $f_{p+q} = (q - a_{p+q})p - (p + a_{p+q})q$ (pretože $q - a_n + p + a_n = q + p$). Toto po úprave dáva $f_{p+q} = -a_{p+q}(p+q)$. Keďže $f_{p+q} \neq 0$, potom aj $a_{p+q} \neq 0$. Ďalej

$$f_i = f_{i-1} + x_i - x_{i-1} - x_{i-p-q} + x_{i-p-q-1}, \qquad \text{pre } i = p+q+1, \ldots, n.$$

Môžu preto nastať len tri možnosti

$$f_i = f_{i-1} - (p+q), \qquad f_i = f_{i-1}, \qquad f_i = f_{i-1} + (p+q).$$

Keďže však vieme, že f_{p+q} je tvaru $-a_{p+q}(p+q)$, potom aj každé $f_i = -a_i(p+q)$, pre $i = p+q, \ldots, n$. Predchádzajúce tri možnosti sa menia na $a_i = a_{i-1} + c$, kde $c \in \{-1, 0, 1\}$. Zrejme sú všetky $a_i \neq 0$. Potom však musia mať stále rovnaké znamienko. Potom majú rovnaké znamienko aj všetky f_i, čo ale znamená, že $x_n = f_{p+q} + f_{2(p+q)} + \ldots + f_{k_0(p+q)}$, kde každý člen súčtu má rovnaké znamienko. To je však spor s predpokladom $x_n = 0$. Preto musí existovať nejaké vhodné i také, že $x_i = x_{i-p-q}$. Keďže $n - p - q \neq 0$, je táto dvojica indexov rôzna od $(0, n)$.

Iné riešenie *(Viera Růžičková)*

Pre jednoduchosť opäť uvážme prípad p, q nesúdeliteľné. Uvažujme nasledujúcu tabuľku:

- do ľavého dolného rohu umiestnime číslo 0;
- do políčka vzdialeného o k polí vpravo a o l polí hore od ľavého dolného rohu umiestnime číslo $kp - lq$.

Postupnosť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ si možno predstaviť v tejto tabuľke ako lomenú čiaru vychádzajúcu z ľavého dolného rohu vedúcu do nejakého políčka, v ktorom je nula (okrem políčka v $(q+1)$-vom stĺpci a $(p+1)$-vom riadku – pretože $n > p + q$). Všetky nuly v tabuľke zrejme ležia na jednej priamke, prechádzajúcej ľavým dolným rohom. Ďalej si môžeme všimnúť, že v tabuľke sa vždy periodicky opakuje podtabuľka, ktorej ľavý dolný roh a pravý horný roh ohraničujú dve za sebou idúce nuly. Prvá takáto podtabuľka má ľavý dolný roh v ľavom dolnom rohu celej tabuľky a pravý horný roh v políčku v $(q+1)$-vom stĺpci a $(p+1)$-vom riadku (v prípade p a q nesúdeliteľných).

Teraz postupujme nasledovne. V tabuľke zaznačujeme členy postupnosti x_i pohybom vždy buď vpravo alebo nahor. Pri prechode na nové políčko vždy v tabuľke preškrtneme všetky políčka, na ktorých sú čísla rovnaké, ako je číslo na novom políčku. Na dôkaz tvrdenia v zadaní potrebujeme dokázať, že vždy, keď chceme lomenú čiaru ukončiť v políčku s nulou, musíme aspoň raz vstúpiť na preškrtnuté políčko. Keďže lomená čiara nemôže skončiť v prvej podtabuľke, musí ju raz nadobro opustiť. Bez ujmy na všeobecnosti nech ju opustí pod ďalšou podtabuľkou (mohla aj nad ňou). To však znamená, že v každom stĺpci podtabuľky je už vyškrtnuté aspoň jedno políčko. Potom však nemôže existovať lomená čiara neprechádzajúca preškrtnutým políčkom vedúca do políčka s nulou, pretože nula sa nachádza vždy až v najvyššom riadku každej podtabuľky a je (ak už nebola vyškrtnutá nula v $(q+1)$-vom stĺpci a $(p+1)$-vom riadku – potom je hľadaná dvojica indexov $(0, p+q)$) „odrezaná“ od aktuálnej polohy neprerušenou lomenou čiarou vedúcou pod ňou. Preto sa v postupnosti nutne musí nachádzať dvojica členov s rovnakou hodnotou rôzna od dvojice (x_0, x_n).

Tretia Stredoeurópska olympiáda v informatike

THE 3rd CENTRAL EUROPEAN OLYMPIAD IN INFORMATICS

9 - 13 October 1996, Bratislava, Slovak Republic

Tretí ročník Stredoeurópskej olympiády v informatike (CEOI) sa konal v dňoch 9.–13. októbra 1996 v Bratislave na pôde Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského. Je potrebné poznamenať, že o konaní CEOI v Bratislave medzinárodná komisia rozhodla až v júli tohto roku, keďže sa nepodarilo CEOI zorganizovať v Chorvátsku.

Na CEOI sa zúčastnilo 28 súťažiacich zo siedmych krajín (Česká Republika, Chorvátsko, Maďarsko, Poľsko, Rumunsko, Slovensko a Slovinsko).

Slovensko na CEOI'96 reprezentovali štyria súťažiaci: *Miroslav Dudík* zo 4. ročníka Gymnázia v Trebišove, *Stanislav Funiak* zo 4. ročníka Gymnázia v Sučanoch, *Martin Hajduch* zo 4. ročníka Gymnázia v Považskej Bystrici a *Vladimír Marko* zo 4. ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave. Vedúcou slovenského družstva bola *RNDr. Gabriela Andrejková* z Univerzity P.J.Šafárika v Košiciach.

Súťažiaci boli ubytovaní v Bratislave v peknom prostredí na Kolibe. Prvý deň bol vyhradený na ubytovanie, prezentáciu súťažiacich a slávnostné otvorenie, druhý a štvrtý deň sa súťažilo, tretí deň bol venovaný oddychu (študenti mohli absolvovať prehliadku mesta, zo športových činností bolo možné vyskúšať vodnú turistiku v lodenici MFF UK, k dispozícii bolo množstvo ďalších aktivít podľa výberu študentov) a piaty deň sa konalo slávnostné vyhodnotenie a ukončenie súťaže.

Samotná súťaž sa konala na Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského. Súťažiaci mali k dispozícii počítače PC 486DX v prostredí MS-DOS, súťažnými programovacími jazykmi boli PASCAL (Borland Pascal v. 7.0) a C++ (Borland C++ v. 3.1). Oba súťažné dni sa súťažilo po päť hodín, každý deň súťažiaci riešili tri súťažné úlohy. Úlohy boli zaujímavé, aj keď z pohľadu predchádzajúcich ročníkov CEOI a IOI trochu netradičné. Hlavným rozdielom oproti predchádzajúcemu ročníku bolo, že sa dopredu nezverejňovali časové limity pre beh programov. Súťažiaci boli iba oboznámení so skutočnosťou, že časový limit sa pohybuje okolo trojnásobku času, ktorý potrebuje oficiálne riešenie. Riešenia boli vyhodnocované bežným spôsobom (testovanie správneho výstupu pri zadaní testovacích vstupných dát).

Medzinárodná porota sa na základe výsledkov súťaže a pravidiel CEOI rozhodla udeliť 13 medailí z toho 2 zlaté, 4 strieborné a 7 bronzových. Naši získali jednu zlatú *(Funiak)*, dve strieborné *(Dudík, Marko)* a jednu bronzovú *(Hajduch)* medailu. Celkové výsledky súťažiacich, ktorí získali medaily sú v tabuľke.

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.	Adam Borowski	Poľsko	28	30	30	34	40	20	182
2.	Stanislav Funiak	Slovensko	33	17	30	40	40	20	180
3.	Eryk Kopczyński	Poľsko	40	25	30	18	40	20	173
4.	Miroslav Dudík	Slovensko	40	30	30	5	40	20	165
5.	Piotr Zieliński	Poľsko	40	22	20	2	40	20	144
6.	Vladimír Marko	Slovensko	40	3	10	14	40	20	127
7.-8.	Andrzej Gąsienica-Samek	Poľsko	0	30	30	2	40	20	122
	Vlad Petric	Rumunsko	18	25	8	11	40	20	122
9.	Martin Hajduch	Slovensko	40	9	12	2	40	14	117
10.	Mitja Šlenc	Slovinsko	16	17	5	14	40	20	112
11.	Zoran Majstrović	Chorvátsko	19	10	17	2	40	20	108
12.	Zvonimir Bujanović	Chorvátsko	40	17	2	2	29	17	107
13.	Sergiu Ştefanov	Rumunsko	13	25	22	2	40	3	105

V neoficiálnom hodnotení krajín sa Slovensko umiestnilo na druhom mieste hneď za Poľskom, čím sme len obhájili úspechy na CEOI a IOI z predchádzajúcich rokov. Predpokladá sa, že skúsenosti získané na CEOI súťažiaci zúročia v budúcich ročníkoch IOI. Neoficiálne poradie krajín je v nasledujúcej tabuľke.

1.	Poľsko	621
2.	Slovensko	589
3.	Rumunsko	405
4.	Chorvátsko	362
5.	Česká republika	273
6.	Maďarsko	259
7.	Slovinsko (len 3 súťažiaci)	177

Po organizačnej stránke prebiehala celá súťaž hladko a nevyskytli sa žiadne závažné problémy. Na tomto mieste je potrebné poďakovať hlavnej organizátorke celého podujatia *RNDr. Viere Blahovej* ako aj *RNDr. Andrejovi Blahovi*, *Tomášovi Vinařovi*, *Bronislave Brejovej*, *Ivone Bezákovej*, *Martinovi Pálovi*, *Dušanovi Bezákovi*, *Jurajovi Gottweisovi*, *Martinovi Irmanovi*, *Miroslavovi Šiketovi* a ďalším členom jednotlivých komisií za množstvo práce, ktoré pre uskutočnenie tretieho ročníka CEOI na Slovensku urobili. Poďakovanie takisto patrí Matematicko-fyzikálnej fakulte Univerzity Komenského, keďže bez jej podpory by nebolo možné konanie celej súťaže. Štvrtý ročník CEOI sa uskutoční v roku 1997 v Poľsku.

8. medzinárodná olympiáda v informatike

Ôsma medzinárodná olympiáda v informatike IOI'96 sa konala v dňoch 25.7.–1.8.96 vo Veszpréme v Maďarsku. Nad podujatím držal záštitu prezident republiky *Árpád Göncz*. Prvá medzinárodná olympiáda v informatike sa uskutočnila pred 8 rokmi a účastnilo sa na nej 12 štátov. Tento rok to už bolo 215 súťažiacich z 56 krajín všetkých kontinentov. Napriek tomu, že ide o prestížnu medzištátnu súťaž, MOI je najmä súťaž jednotlivcov.

Na rozdiel od našej kategórie P matematickej olympiády sú všetky úlohy MOI praktické, programovacími jazykmi boli Pascal, C++ a QBasic. Príklady zostavuje krajina, ktorá súťaž usporadúva. Konečné formulácie znenia úloh tvorí a schvaľuje valné zhromaždenie, ktoré je zostavené z vedúcich jednotlivých delegácií. Nakoľko príklady musia byť vyriešené na počítači, vyhodnocovanie potom prebieha automaticky. K práci vedúceho delegácie spolu so zástupcom patrí zabezpečenie prekladu úloh do slovenčiny a prekladu otázok študentov do angličtiny. Súťaží sa dva dni, medzi ktorými je jeden deň oddychový. Každý súťažný deň dostanú súťažiaci tri príklady, ktoré treba vyriešiť v časovom limite 5 hodín. Zadania majú k dispozícii v angličtine a v materinskom jazyku.

Slovensko reprezentovali štyria gymnazisti, ktorí patria k tohtoročným víťazom MO – kategórie P a po týždennom výberovom sústredení sa umiestnili na prvých štyroch miestach (výsledky výberového sústredenia nájdete v kapitole *Výberové sústredenia*). Boli to *Dušan Bezák* zo 4. ročníka Gymnázia Grösslingová v Bratislave, *Miroslav Dudík* z 3. ročníka Gymnázia v Trebišove, *Martin Hajduch* z 3. ročníka Gymnázia v Považskej Bystrici a *Martin Jandačka* zo 4. ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave. Vedúcou slovenskej delegácie bola *RNDr. Viera Blahová* zo Štátneho pedagogického ústavu v Bratislave a jej zástupcom *RNDr. Juraj Balázs* z PF UPJŠ v Košiciach.

Otvorenie olympiády sa uskutočnilo na Hlavnom námestí v Starom meste vo Veszpréme vztýčením olympijskej vlajky za prítomnosti čelných predstaviteľov mesta, prezidenta IOI'96 pána *Petra Hanáka* z Maďarska, prezidenta medzinárodnej komisie pána *Riesa Kocka* z Holandska, dychovej hudby a dievčat na koňoch v husárskej uniforme. Olympiádou žilo celé mesto, všetky zástavky MHD boli polepené plagátmi s informáciami o olympiáde, na ktorej sa zišiel rekordný počet účastníkov. Organizátori sa však pripravili dobre, na súťaž zabezpečili neuveriteľných 500 počítačov, všetky boli zapojené do medzinárodnej siete Internet. Každá delegácia mala pridelený jeden počítač, navyše každý účastník dostal konto a heslo, a teda v skutočnosti mohol pracovať na ktoromkoľvek počítači. Veľmi zaujímavá bola možnosť získania najčerstvejších správ z prebiehajúcich olympijských hier v Atlante, čítanie slovenských denníkov, zasielanie správ elektronickou poštou domov, resp. pozeranie si fotografií z udalostí práve prežitého dňa.

V predvečer súťažných dní sa zišla medzinárodná porota na prerokovanie úloh. Po trojhodinovej diskusii sa začalo prekladanie úloh do materinského jazyka. Prekladalo sa do hlbokej noci. Boli vykonané bezpečnostné opatrenia ako napr. vypnutie počítačovej siete, zákaz telefonovania alebo uzamknutie budovy so študentmi.

Súťažné úlohy sa nám veľmi páčili. Boli pripravené na vysokej profesionálnej úrovni. Na rozdiel od minulého roku, keď texty boli veľmi rozsiahle, tento rok nepresiahli jednu stranu A4. Vyhodnocovanie začalo krátko po súťaži. Každý príklad prechádzal 10 testovacími dátami. Body sa získavali za správne výsledky vypočítané v časovom limite 20–30 sekúnd. Vyhodnotenie vykonal pridelený vyhodnocovateľ za prítomnosti oboch vedúcich a súťažiaceho. K vyhodnoteniu sa potom mohli vyjadriť, podať protest, resp. pripomienky po anglicky, ktoré zapísal vyhodnocovateľ ako komentár do vyhodnocovacieho protokolu. Problémy tohto druhu potom riešila na to špeciálne určená komisia. Výsledky slovenských účastníkov sú v nasledujúcej tabuľke:

Poradie	Meno	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet	Cena
4.-5.	Dušan Bezák	30	28	32	20	40	40	190	1.
8.	Miroslav Dudík	30	28	28	20	40	40	186	1.
43.-45.	Martin Hajduch	30	20	26	20	24	36	156	2.
51.	Martin Jandačka	30	16	26	20	20	40	152	2.

Slovensko dosiahlo v tomto ročníku mimoriadny úspech. Naše družstvo sa s celkovým počtom 684 bodov umiestnilo na vynikajúcom 3. mieste. Poradie družstiev na prvých dvadsiatich miestach je uvedené v nasledujúcej tabuľke.

1.	Čína	736	11.	Thajsko	558
2.	Rusko	709	12.	Česká republika	556
3.	Slovensko	684	13.	Bielorusko	535
4.	Poľsko	682	14.	Chorvátsko	531
5.	Rumunsko	652	15.	Vietnam	515
6.	Tchaj-wan	647	16.	Bulharsko	507
7.	Litva	611	17.	Estónsko	497
8.	Irán	607		Maďarsko	497
9.	Juhoslávia	575	19.	Nemecko	469
10.	Kórea	565	20.	Turecko	458

Celkovo bolo odovzdaných 20 zlatých, 36 strieborných a 52 bronzových medailí. Súťažiaci dostali aj vecné dary - sieťové karty, programové balíky Windows'95, rádiá s CD prehrávačom. Špeciálnu trofej – putovný pohár a špeciálnu cenu - počítač - dostal absolútny víťaz súťaže, *Daniel Kráľ* z Českej republiky.

Súčasťou olympiády je odmenenie súťažiacich za ich celoročné úsilie, prácu, ktorú preukazujú vynikajúcimi výsledkami. Preto sa za týždeň, ktorý strávia v cudzej krajine, snaží táto ukázať niečo zo svojich prírodných krás, pamätihodností, priemyslu a kultúry. Voľný deň sme trávili športovaním na Balatóne. Navštívili sme kláštor v Pannonhalme, absolvovali výlet loďou v Tihany, navštívili sme závody Videoton a IBM v Székesfehérvári, arborétum v Zircu, parlament v Budapešti a pod. V skutočnosti sme všetky tieto miesta všetci nenavštívili, pretože návštevy niektorých miest boli obmedzované z kapacitných dôvodov, preto rôzne skupiny účastníkov mali odlišný program.

Olympiádu zabezpečovalo 150 organizátorov, zväčša študentov vysokých a stredných škôl. Každá delegácia mala prideleného jedného študenta, ktorý mal zabezpečovať informácie a riešiť problémy. Táto časť programu nebola úplne zvládnutá, pretože študenti nemali dostatočné vedomosti z angličtiny a slabé informácie o programe. Prejavovalo sa to hlavne u stredoškolákov. V areáli strednej školy - Vetesi Albert - vo voľnom čase mohli študenti aktívne športovať. Družstvo našich študentov dokonca zvíťazilo vo volejbalovom turnaji. Mohli však aj surfovať po sieti Internetu, zúčastniť sa počítačovej výstavy Atlantis, tancovať a pod. Odovzdávanie cien sa uskutočnilo v budove Opery za prítomnosti maďarského štátneho tajomníka ministerstva školstva. Poukázal na tamojší nový školský zákon, v ktorom sa zameranie na informatiku považuje za prioritnú úlohu ministerstva. Na záver olympiády bol ohňostroj.

Delegáti využívali možnosť na výmenu skúseností s organizáciou a odbornou prípravou národných olympiád. Niektoré štáty už informácie a príklady zo svojich olympiád dali na `www` stránky, a preto sa s nimi môže každý, kto má prístup k Internetu zoznámiť. Na olympiáde sa stretol aj výbor 3. Stredoeurópskej olympiády v informatike, ktorú organizujeme tento rok na Slovensku (tejto súťaži je venovaná samostatná kapitola). Okrem Slovenska prisľúbilo účasť 7 štátov. Záujem by bol aj väčší, ale vzhľadom na nedostatok financií sme si ďalšie štáty nedovolili pozvať.

Vystúpenie slovenských účastníkov na MOI možno hodnotiť ako veľmi úspešné. Súťažiaci podali mimoriadne pekný výkon a dôstojne reprezentovali našu republiku. Naši študenti si na súťaž z vlastných prostriedkov zakúpili tričká s nápisom Slovakia. Niektoré delegácie dokonca prišli v jednotnom oblečení, preto sa ukazuje ako perspektívne hľadať sponzorov na zabezpečenie reprezentačného oblečenia aj pre našu delegáciu. Študenti ďalej vysoko oceňovali prípravu formou týždenného sústredenia, treba ju zabezpečiť v krátkom čase pred odchodom na olympiádu. Na budúci rok sa súťaž uskutoční netradične v dňoch 30.11.–7.12.1997 v Juhoafrickej republike. Desiaty ročník usporiada Portugalsko.

Dr. Viera Blahová

Zadania úloh 8. medzinárodnej olympiády v informatike

1. Hra (30 bodov)

Predstavte si nasledujúcu hru pre dvoch hráčov. Na hracej doske je napísaná postupnosť kladných celých čísel. Hráči ťahajú striedavo. Keď je hráč na ťahu, vyberie si číslo z ľavého alebo pravého konca postupnosti. Vybrané číslo sa z plochy zmaže. Hra sa končí, keď na hracej doske nie sú už žiadne čísla. Prvý hráč vyhráva, ak súčet čísel, ktoré počas hry vybral, je aspoň taký veľký, aký je súčet vybraných čísel pre druhého hráča. Druhý hráč hrá, ako najlepšie dokáže. Prvý hráč začína.

Ak hracia doska obsahuje na začiatku párny počet čísel, potom má prvý hráč vyhrávajúcu stratégiu. Vašou úlohou je napísať program, ktorý implementuje vyhrávajúcu stratégiu prvého hráča. Odpovede druhého hráča sú zadávané pomocou daného počítačového programu. Hráči komunikujú pomocou troch procedúr modulu `Play`, ktorý je vám k dispozícii. Tieto procedúry sú `StartGame`, `MyMove` a `YourMove`. Prvý hráč musí inicializovať hru vykonaním procedúry bez parametrov `StartGame`. Ak prvý hráč vyberie číslo z ľavého konca, vykoná procedúru `MyMove('L')`. Podobne vykonanie inštrukcie `MyMove('R')` pošle správu druhému hráčovi o tom, že si prvý hráč vybral číslo z pravého konca. Druhý hráč, napríklad počítač, okamžite odpovie a prvý hráč sa môže jeho ťah dozvedieť vykonaním inštrukcie `YourMove(C)`, kde C je premenná typu `character` (v C/C++ je potrebné napísať `YourMove(&C)`). Hodnota C je `'L'` alebo `'R'` v závislosti od toho, či si druhý hráč vybral číslo z ľavej alebo pravej strany.

Vstupný súbor.

Prvý riadok súboru `INPUT.TXT` obsahuje veľkosť N hracej dosky. N je párne a platí $2 \leqq N \leqq 100$. Zvyšných N riadkov obsahuje na každom riadku jedno číslo, obsah hracej dosky v poradí zľava doprava. Veľkosť ľubovoľného čísla je najviac 200.

Výstupný súbor.

Keď hra skončí, váš program musí vypísať konečný výsledok hry do súboru `OUTPUT.TXT`. Súbor bude obsahovať dve čísla na prvom riadku. Prvé číslo je súčtom čísel vybraných prvým hráčom a druhé číslo je súčtom čísel vybraných druhým hráčom. Váš program musí hru zohrať a výstup musí zodpovedať zohranej hre.

2. Spracovanie výrobkov (30 bodov)

Továreň prevádzkuje výrobnú linku. Na každom výrobku musia byť vykonané dve operácie: najskôr operácia $\mathcal{A}$, potom operácia $\mathcal{B}$. V továrni majú niekoľko strojov, ktoré môžu vykonávať každú operáciu. Výrobná linka funguje takto: Stroj typu $\mathcal{A}$ vezme výrobok zo vstupného kontajnera, vykoná operáciu $\mathcal{A}$ a uloží ho do medzikontajnera. Stroj typu $\mathcal{B}$ vezme výrobok z medzikontajnera, vykoná operáciu $\mathcal{B}$ a vloží výrobok do výstupného kontajnera. Všetky stroje môžu pracovať súčasne a nezávisle od ostatných, veľkosť každého kontajnera nie je obmedzená. Stroje majú rôzne charakteristiky výkonu, daný stroj pracuje s daným časom vykonania príslušnej operácie.

Vypočítajte najmenší možný čas, za ktorý môže byť vykonaná operácia $\mathcal{A}$ na všetkých N výrobkoch, pričom všetky výrobky sú k dispozícii v čase 0 (Podproblém A). Taktiež vypočítajte najmenší možný čas, ktorý je potrebný na vykonanie oboch operácií na N výrobkoch (Podproblém B).

Vstupný súbor.

Súbor `INPUT.TXT` obsahuje kladné čísla v piatich riadkoch. Prvý riadok obsahuje N, počet výrobkov ($1 \leqq N \leqq 1000$). Na druhom riadku sa nachádza počet M_1 strojov typu $\mathcal{A}$ ($1 \leqq M_1 \leqq 30$). Na treťom riadku sa nachádza M_1 celých čísel, čas vykonania operácie na každom type stroja $\mathcal{A}$. Štvrtý a piaty riadok podobne obsahuje počet M_2 strojov typu $\mathcal{B}$ ($1 \leqq M_2 \leqq 30$) a čas vykonania operácie na každom stroji typu $\mathcal{B}$. Čas vykonania operácie je meraný v jednotkách času a zahrňuje čas potrebný na vybratie výrobku z kontajnera pred vykonaním a uloženie výrobku do kontajnera po vykonaní. Ľubovoľný čas spracovania je najmenej 1 a najviac 20.

Výstupný súbor.

Váš program má do súboru `OUTPUT.TXT` zapísať dva riadky. Prvý riadok obsahuje jedno kladné číslo — riešenie podproblému A. Druhý riadok obsahuje riešenie podproblému B.

3. Sieť škôl (40 bodov)

Množstvo škôl je zapojených do počítačovej siete. Medzi týmito školami bola uzavretá dohoda: každá škola obdržala zoznam škôl, do ktorých distribuuje software (tzv. „prijímajúce školy“). Uvedomte si, že ak B je na distribučnom zozname školy A, potom A nemusí byť nutne na zozname školy B.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta najmenší počet škôl, ktoré musia dostať kópiu nového softwaru, aby sa tento software dostal do každej školy s prihliadnutím k dohode (Podproblém A). Ako úlohu do budúcnosti by sme chceli zabezpečiť, že ak pošleme kópiu nového softwaru do niektorej školy, tento software dostanú všetky školy zapojené do siete. Aby sme tento cieľ dosiahli, musíme rozšíriť zoznam prijímateľov o nových členov. Vypočítajte najmenší počet rozšírení, ktoré musia byť urobené, aby v prípade, že nový software pošleme do ľubovoľnej školy, dostane sa tento na každú školu (Podproblém B). Jedno rozšírenie znamená zaradenie jedného nového člena do zoznamu prijímateľov jednej školy.

Vstupný súbor.

Prvý riadok súboru `INPUT.TXT` obsahuje celé číslo N: počet škôl v sieti ($2 \leqq N \leqq 100$). Školy sú označené číslami od 1 po N. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje zoznam prijímateľov. Riadok $i+1$ obsahuje zoznam prijímateľov školy i. Každý zoznam je ukončený nulou. Prázdne zoznamy obsahujú na riadku samotnú nulu.

Výstupný súbor.

Váš program vypíše dva riadky do súboru `OUTPUT.TXT`. Prvý riadok bude obsahovať jedno celé číslo: riešenie podproblému A. Druhý riadok bude obsahovať riešenie podúlohy B.

4. Triedenie trojhodnotovej postupnosti (20 bodov)

Triedenie je jedna z najčastejších úloh riešených na počítači. Uvažujme špeciálny prípad triedenia, keď kľúče triedených záznamov nadobúdajú nanajvýš tri rozličné hodnoty. Toto nastane, ak triedime napríklad medailistov nejakej súťaže podľa hodnoty medaily, t.j. zlatí medailisti budú prví, nasledovaní striebornými a na koniec prídu bronzoví.

V tejto úlohe sú možné hodnoty kľúča čísla $1, 2$ a 3. Výsledná utriedená postupnosť má byť neklesajúca. Triedenie má byť vykonané ako postupnosť výmen. Výmena daná dvomi indexmi p a q vymení prvky na pozíciách p a q.

Daná je postupnosť hodnôt kľúčov. Napíšte program, ktorý vypočíta minimálny počet výmen potrebných na utriedenie postupnosti (časť A). Okrem toho zostrojte postupnosť výmen pre toto triedenie (časť B).

Vstupný súbor.

Prvý riadok súboru `INPUT.TXT` obsahuje počet záznamov N ($1 \leqq N \leqq 1000$). Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje hodnotu jedného kľúča.

Výstupný súbor.

Do prvého riadku výstupného súboru `OUTPUT.TXT` vypíšte najmenší počet výmen potrebných na utriedenie postupnosti (časť A). Nasledujúcich L riadkov dáva príslušnú postupnosť výmen podľa poradia, v akom sa majú vykonať. Každý riadok obsahuje operáciu výmeny opísanú dvomi číslami p a q určujúcimi pozície vymenených prvkov (časť B). Pozície sú označené číslami 1 až N.

5. Najdlhší prefix (40 bodov)

Štruktúra niektorých biologických objektov je reprezentovaná ako postupnosť ich zložiek. Tieto zložky sú označené veľkými písmenami. Biológov zaujíma rozkladanie dlhej postupnosti na kratšie. Tieto krátke postupnosti sa nazývajú *základné.* Hovoríme, že postupnosť S môže byť zložená z danej množiny základných postupností P, ak existujú základné postupnosti $p_1 \dots p_n$ z P také, že zloženie $p_1 \dots p_n$ základných postupností sa rovná S. *Zloženie* základných postupností $p_1, \dots, p_n$ je ich pripojenie jednej za druhú bez medzier. Niektorá základná postupnosť sa v zložení môže vyskytovať aj viackrát a nie nutne všetky základné postupnosti musia byť použité. Napríklad postupnosť *ABABACABAAB* môže byť zložená z množiny základných postupností $\{A, AB, BA, CA, BBC\}$.

Prvých K znakov postupnosti S tvorí *prefix* postupnosti S dĺžky K. Napíšte program ktorý načíta množinu základných postupností P a postupnosť zložiek T. Program musí vypísať dĺžku najdlhšieho prefixu zloženého zo základných postupností z P.

Vstupný súbor.

Vstup sa nachádza v dvoch súboroch. Súbor `INPUT.TXT` opisuje množinu základných postupností P, kým súbor `DATA.TXT` obsahuje skúmanú postupnosť T. Prvý riadok `INPUT.TXT` obsahuje N, počet základných postupností v P ($1 \leqq N \leqq 100$). Každá základná postupnosť je daná dvomi po sebe nasledujúcimi riadkami. Prvý riadok obsahuje dĺžku L základnej postupnosti ($1 \leqq L \leqq 20$). V druhom riadku sa nachádza reťazec veľkých písmen (od '`A`' po '`Z`') dĺžky L. Všetkých N postupností je navzájom rôznych. Každý riadok súboru `DATA.TXT` obsahuje na prvom mieste jedno veľké písmeno. Tento súbor končí riadkom obsahujúcim iba bodku ('`.`'). Dĺžka postupnosti je aspoň 1 a najviac 500 000.

Výstupný súbor.

Vypíšte do prvého riadku súboru `OUTPUT.TXT` dĺžku najdlhšieho prefixu T, ktorý môže byť zložený z množiny P.

6. Magické štvorce (40 bodov)

Po úspechu magickej kocky, pán Rubik vynašiel jej rovinnú verziu, nazývanú magické štvorce. Je to list pozostávajúci z ôsmich rovnako veľkých štvorcov:

1	2	3	4
8	7	6	5

Počiatočná konfigurácia

V tomto prípade sa budeme zaoberať verziou, kde každý štvorec má inú farbu. Farby sú označené číslami od 1 po 8. Konfigurácia listu je daná postupnosťou farieb v poradí postupne z ľavého horného rohu v smere hodinových ručičiek. Napríklad počiatočná konfiguráciu na obrázku je daná postupnosťou (1,2,3,4,5,6,7,8).

Na list možno použiť tri základné transformácie, označené písmenami 'A', 'B' a 'C':

'A' : výmena spodného a vrchného riadku

'B' : jednoduchá pravá cyklická rotácia oboch riadkov

'C' : jednoduchá rotácia štyroch prostredných štvorcov v smere hodinových ručičiek.

Použitím týchto transformácií možno získať ľubovoľnú konfiguráciu.

A:

8	7	6	5
1	2	3	4

B:

4	1	2	3
5	8	7	6

C:

1	7	2	4
5	3	6	8

Základné transformácie

Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta postupnosť základných transformácií, ktoré transformujú počiatočnú konfiguráciu na zadanú cieľovú konfiguráciu (podproblém A). Ďalšie dva body budú pridelené za riešenie, ktorého dĺžka nepresiahne 300 (podproblém B).

Vstupný súbor.

Súbor `INPUT.TXT` obsahuje 8 kladných čísel na prvom riadku, popis cieľovej konfigurácie.

Výstupný súbor.

Do prvého riadku súboru `OUTPUT.TXT` váš program zapíše dĺžku L transformačnej postupnosti. Na ďalších L riadkoch bude postupnosť identifikátorov základných transformácií, jedno písmeno na prvej pozícii v každom riadku.

Korešpondenčný seminár ÚK MO

Aj v 45. ročníku matematickej olympiády ÚK MO organizovala pre najtalentovanejších študentov zo Slovenska korešpondenčný seminár ÚK MO. V tomto roku zmenil svoj tradičný názov z KS ÚV MO na KS ÚK MO. Tento korešpondenčný seminár má už dlhoročnú tradíciu a v 44. ročníku MO bol prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Slúži hlavne ako príprava študentov na MO, najmä v kategórii A, a na MMO. KS ÚK MO má tradične päť sérii, v každej je zadaných sedem zväčša ťažkých príkladov. Do riešenia sa zapojilo spolu 48 študentov, čo je o 50 percent viac ako v minulom ročníku. Zvýšil sa podiel mimobratislavských (z Bratislavy to bolo 14, zo Západoslovenskej oblasti 6, zo Stredoslovenskej oblasti 17 a z Východoslovenskej oblasti 11 riešiteľov) a mladších študentov (jeden študent navštevoval štvrtý ročník osemročného gymnázia, traja navštevovali prvý ročník a desiati druhý ročník gymnázia). Účastníkmi súťaže boli opäť aj všetci 6 členovia slovenskej delegácie na MMO vrátane všetkých náhradníkov (skončili medzi prvými trinástimi). Príklady boli tentokrát viac zamerané na témy, ktoré sú tradične našou slabinou na medzinárodných matematických olympiádach. Azda aj táto skutočnosť pomohla k úspešnému výsledku na tejto súťaži.

Korešpondenčný seminár viedol *Richard Kollár* a opravovanie zabezpečovali študenti a pracovníci MFF UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS ÚK MO 1995/96

1. *Eugen Kováč*, 4 Gymnázium Stropkov, 80,5 bodov;
2. *Daniel Pártoš*, 4 Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 70 bodov;
3. *Tamás Varga*, 4 Gymnázium maď. Komárno, 66 bodov;
4. *Alexander Erdélyi*, 4 Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 62 bodov;
5. *Peter Kozák*, 1 Gymnázium Sučany, 55 bodov;
6. *Ivan Cimrák*, 4 Gymnázium Veľká Okružná, Žilina, 52,5 bodov.

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z rôznych zdrojov, najmä z príkladov zo jury MMO v Hong Kongu a v Kanade, zborníka kanadských matematických olympiád a z americkej súťaže USAMO.

Zadania súťažných úloh KS ÚK MO

Prvá séria

1.1 Nájdite všetky trojuholníky, ktorých tri strany a výška sú štyri po sebe idúce prirodzené čísla, a ktoré táto výška delí na dva pravouhlé trojuholníky s celočíselnými stranami.

1.2 Dokážte, že číslo x je racionálne práve vtedy, ak možno z postupnosti $x, x + 1, x + 2, x + 3, \dots$ vybrať tri členy, ktoré tvoria geometrickú postupnosť.

1.3 V trojuholníku ABC, sú ťažnice na strany AB a AC navzájom kolmé. Dokážte, že $\operatorname{cotg} |\sphericalangle CBA| + \operatorname{cotg} |\sphericalangle BCA| \geqq \frac{2}{3}$.

1.4 Niekoľko škôl sa zúčastnilo tenisového turnaja. Žiadni dvaja hráči z tej istej školy nehrali proti sebe. Každí dvaja hráči z rôznych škôl zohrali práve jeden zápas. Zápas medzi dvomi chlapcami alebo dievčatami nazveme *dvojhrou* a zápas medzi chlapcom a dievčaťom nazveme *zmiešanou dvojhrou.* Celkové počty chlapcov a dievčat sa navzájom líšia nanajvýš o 1. Celkový počet *dvojhier* sa od celkového počtu *zmiešaných dvojhier* líši nanajvýš o 1. Koľko najviac škôl mohlo byť reprezentovaných nepárnym počtom hráčov?

1.5 Dokážte, že pre kladné reálne čísla $x_1, \dots, x_n$ a ich ľubovoľnú permutáciu $y_1, \dots, y_n$ platí nerovnosť

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqq x_1 + \dots + x_n.$$

1.6 Na nekonečnej šachovnici je položená kocka tak, že jedna jej stena (označme ju F) presne pokrýva jedno políčko šachovnice. Kocku začneme na šachovnici preklápať okolo jej hrán. V istom momente sa kocka zastaví na počiatočnom políčku a opäť leží na stene F. Môže byť stena F otočená oproti počiatočnej pozícii o 90° ?

1.7 Nájdite všetky funkcie $f, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktoré pre každé reálne x a y vyhovujú rovnosti

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x) \cdot f(y) - x \cdot y.$$

Druhá séria

2.1 Nájdite aspoň jeden koreň rovnice

$$x^3(x + 1)(x - 2) - 2x(x + 2)^2 = \frac{32}{10}.$$

2.2 Zistite, pre ktoré $c \in \mathbb{R}$ je obor hodnôt funkcie $x^4 - 4x^3 + 8x^2 + cx$ interval $\langle c, \infty)$.

2.3 Dokážte, že ak je v rovine daných $n \geqq 4$ bodov, ktoré neležia na jednej kružnici a žiadne tri z nich neležia na jednej priamke, potom existuje kružnica, na ktorej ležia práve tri body.

2.4 Nájdite všetky dvojice prvočísel $(p_1, p_2), p_1 < p_2$ také, že pre nejaké $n \geqq 1$ má rovnica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 8 = 0$$

s celočíselnými koeficientami $a_1, \ldots, a_{n-1}$ koreň $1 + \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$.

2.5 Okolo okrúhleho stola sedí 1995 dievčat, ktoré hrajú nasledujúcu hru s n kartami. Na začiatku drží jedno z dievčat všetky karty. V každom kole, pokiaľ má aspoň jedno dievča aspoň dve karty, musí jedno z nich poslať po karte obom svojím susedám. Hra končí, práve keď má každé z dievčat najviac jednu kartu. Dokážte, že pre $n < 1995$ sa hra určite skončí.

2.6 Nech $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ a $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ sú pravidelné sedemuholníky s obsahmi po rade S_A, S_B a S_C. Nech ďalej $|A_1A_2| = |B_1B_3| = |C_1C_4|$. Dokážte, že potom platí:

$$\frac{1}{2} < \frac{S_B + S_C}{S_A} < 2 - \sqrt{2}.$$

2.7 Body A, B, C a D ležia na priamke v danom poradí. Kružnica k prechádza bodmi B a C a AM, AN, DK a DL sú dotyčnice kružnice k.

a) Dokážte, že poloha bodov $P = MN \cap BC$ a $Q = KL \cap BC$ nezávisí na polohe kružnice k.

b) Ak $|AD| = a$ a $|BC| = b$, $(a > b)$ a úsečka BC sa „hýbe“ pozdĺž AD, nájdite minimálnu dĺžku $|PQ|$.

Tretia séria

3.1 Do štvorčekov nekonečného štvorčekového papiera sú vpísané reálne čísla. Dané sú dve šablóny zložené z konečného počtu štvorčekov. Tieto šablóny môžeme posúvať pozdĺž čiar na štvorčekovom papieri (nemeníme však ich orientáciu). Vieme, že ak prvú šablónu priložíme na ľubovoľné miesto, súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, je kladný. Dokážte, že existuje také umiestnenie druhej šablóny, že súčet čísel na políčkach, ktoré zakrýva, je tiež kladný.

3.2 Kružnice k_1, k_2 a k_3 sa zvonku dotýkajú kružnice k v bodoch A_1, B_1 a C_1. Kružnica k_1 sa zároveň dotýka strán AB a AC trojuholníka ABC tak, že úsečka AA_1 pretína kružnicu k_1 aspoň v dvoch bodoch. Podobne sa kružnice k_2 a k_3 po rade dotýkajú aj strán BC, BA a CA, CB trojuholníka tak, že úsečky BB_1 a CC_1 pretínajú po rade k_2 a k_3 aspoň v dvoch bodoch. Dokážte, že sa priamky AA_1, BB_1 a CC_1 pretínajú v jednom bode.

3.3 V triede je 30 žiakov. Každý z nich má v triede rovnaký počet priateľov. Aký je najvyšší možný počet žiakov, ktorí dosahujú lepšie výsledky ako väčšina ich priateľov? (O každých dvoch žiakoch je známe, ktorý z nich sa učí lepšie, vlastnosť byť lepší je tranzitívna a priateľstvá sú obojstranné.)

3.4 Riešte rovnicu $1 + 5^x = 2^y + 2^z \cdot 5^t$ s neznámymi $x, y, z, t \in \mathbb{N}$.

3.5 Daný je štvorsten $ABCD$ s telesovými výškami AA_1, BB_1, CC_1 a DD_1. Tieto výšky sa pretínajú v strede gule vpísanej štvorstenu $A_1B_1C_1D_1$. Dokážte, že štvorsten $ABCD$ je pravidelný.

3.6 Daná je množina čísel $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}\}$. Pre určitú permutáciu $\sigma = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ čísel tejto množiny definujme $S_1(\sigma) = X_1$, $S_2(\sigma) = X_1 + X_2$, …, $S_n(\sigma) = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a $Q(\sigma) = S_1(\sigma) \cdot S_2(\sigma) \cdot \ldots \cdot S_n(\sigma)$. Určte hodnotu výrazu

$$\sum_{\sigma} \frac{1}{Q(\sigma)},$$

kde sčítame cez všetky možné permutácie danej množiny čísel.

3.7 *Úloha totožná s 2.7.*

ŠTVRTÁ SÉRIA

4.1 Danej kružnici sú súčasne opísané štvorec a trojuholník. Dokážte, že aspoň polovica obvodu opísaného štvorca leží vo vnútri trojuholníka.

4.2 V priestore je daný kváder $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Označme ďalej M, N, P priesečníky kolmíc z bodu A na priamky A_1B, A_1C a A_1D s priamkami A_1B_1, A_1C_1 a A_1D_1.

a) Dokážte, že body M, N a P ležia na jednej priamke.

b) Ak je E päta kolmice z bodu A na priamku A_1B a F päta kolmice z bodu A na priamku A_1D, tak majú priamky PE, MF a AN spoločný priesečník.

4.3 Definujme rekurentne postupnosť $f(n)$ nasledovne:
$f(1) = 1$; pre každé prirodzené n je $f(n+1)$ najväčšie prirodzené číslo m také, že existuje aritmetická postupnosť prirodzených čísel $a_1 < a_2 < \dots < a_m = n$, pre ktoré

$$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_m).$$

Dokážte, že potom existujú prirodzené čísla a a b také, že $f(an + b) = n + 2$ pre každé prirodzené n.

4.4 Na zjazde matematikov sa stretlo $12k$ účastníkov, každý z nich sa pozdravil presne s $3k + 6$ inými matematikmi. Pre každú dvojicu zúčastnených je počet ľudí, ktorí pozdravili oboch, rovnaký. Koľko ľudí sa stretlo na zjazde?

4.5 Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Dokážte, že existuje nekonečne veľa úplných štvorcov (druhých mocnín) tvaru $n \cdot 2^k - 7$, kde n je prirodzené číslo.

4.6 Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Body A_1 a A_2 na strane BC (s A_2 medzi A_1 a C), B_1 a B_2 na strane AC (s B_2 medzi B_1 a A), a C_1 a C_2 na strane AB (s C_2 medzi C_1 a B) sú dané tak, že platí

$$|\sphericalangle AA_1A_2| = |\sphericalangle AA_2A_1| = |\sphericalangle BB_1B_2| = \\ = |\sphericalangle BB_2B_1| = |\sphericalangle CC_1C_2| = |\sphericalangle CC_2C_1|.$$

Priamky AA_1, BB_1 a CC_1 ohraničujú jeden a priamky AA_2, BB_2 a CC_2 ohraničujú druhý trojuholník. Dokážte, že všetkých šesť vrcholov týchto dvoch trojuholníkov leží na jednej kružnici.

4.7 Dané sú tri kladné reálne čísla a, b a c. Určte všetky reálne čísla x, y a z, ktoré spĺňajú zároveň nasledujúce podmienky:

$$x + y + z = a + b + c$$
$$4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc.$$

Piata séria

5.1 Nech $\mathcal{S}$ je množina všetkých reálnych čísel väčších ako -1. Nájdite všetky funkcie $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, pre ktoré platí

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

pre všetky $x, y \in \mathcal{S}$ a funkcia $\dfrac{f(x)}{x}$ je rastúca na intervaloch $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$.

5.2 Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geqq 2$ existuje množina 2^{n-1} bodov v rovine, v ktorej žiadne tri body neležia na jednej priamke a žiadnych $2n$ bodov netvorí vrcholy konvexného $2n$-uholníka.

5.3 Kružnica ω sa dotýka dvoch rovnobežných priamok ℓ_1 a ℓ_2. Druhá kružnica ω_1 sa dotýka ℓ_1 v bode A a zároveň kružnice ω zvonku v bode C. Tretia kružnica ω_2 sa dotýka ℓ_2 v bode B a zároveň zvonku kružníc ω a ω_1 v bodoch D resp. E. Priesečník priamok AD a BC označme Q. Dokážte, že Q je stred kružnice opísanej trojuholníku CDE.

5.4 Nech p je nepárne prvočíslo. Určte prirodzené čísla x a y, pre ktoré $x \leqq y$ a číslo $\sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ je nezáporné a najmenšie možné.

5.5 Nech $A_1A_2A_3A_4$ je štvorsten, G jeho ťažisko a A_1', A_2', A_3' a A_4' body, v ktorých guľová plocha opísaná $A_1A_2A_3A_4$ pretína po rade polpriamky opačné k $\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GA_2}$, $\overrightarrow{GA_3}$ a $\overrightarrow{GA_4}$. Dokážte, že platia nasledujúce dve nerovnosti:

$$|GA_1| \cdot |GA_2| \cdot |GA_3| \cdot |GA_4| \leqq |GA_1'| \cdot |GA_2'| \cdot |GA_3'| \cdot |GA_4'|,$$
$$\frac{1}{|GA_1'|} + \frac{1}{|GA_2'|} + \frac{1}{|GA_3'|} + \frac{1}{|GA_4'|} \leqq \frac{1}{|GA_1|} + \frac{1}{|GA_2|} + \frac{1}{|GA_3|} + \frac{1}{|GA_4|}.$$

5.6 Nech a a b sú ľubovoľné nezáporné celé čísla, pre ktoré $ab \geqq c^2$, kde c je prirodzené číslo. Dokážte, že potom existuje $n \in \mathbb{N}$ a celé čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ také, že

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c.$$

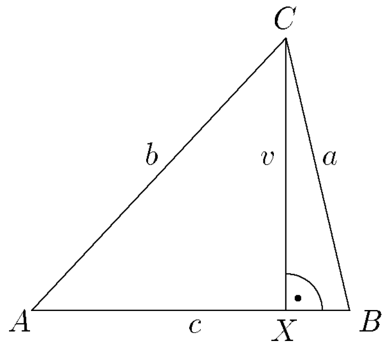
5.7 Pre každé prirodzené číslo x označme $p(x)$ najmenšie prvočíslo, ktoré nedelí x a ďalej $q(x)$ súčin všetkých prvočísel menších ako $p(x)$. Špeciálne $p(1) = 2$. Pre x, pre ktoré $p(x) = 2$ definujeme $q(x) = 1$. Uvažujme postupnosť $x_0, x_1, \ldots$ definovanú rekurentne predpisom: $x_0 = 1$ a

$$x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$$

pre $n \geqq 0$. Nájdite všetky n, pre ktoré $x_n = 1995$.

Riešenia súťažných úloh KS ÚK MO

PRVÁ SÉRIA

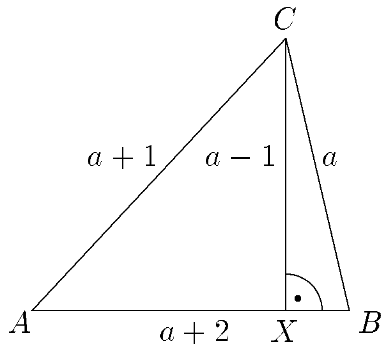


Obr. 33

1.1 Z vlastností pravouhlých trojuholníkov AXC a CXB vyplýva, že $a > v$, $b > v$ (prepona v pravouhlom trojuholníku je väčšia ako odvesna). Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme $a < b$. Posledná strana sa do nerovností $b > a > v$ môže vložiť na štyri miesta – čo nám dáva 4 prípady (obr. 33):

a) $c > b > a > v$

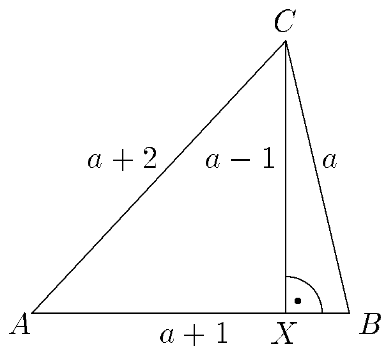
Z Pytagorovej vety pre trojuholníky AXC a CXB dostávame:
$|AX| = \sqrt{(a+1)^2 - (a-1)^2} = 2\sqrt{a}$,
$|BX| = \sqrt{a^2 - (a-1)^2} = \sqrt{2a-1}$.
Súčet týchto dĺžok je rovný $|AB| = a + 2$ (obr. 34), čo vyjadruje rovnica $\sqrt{2a-1} + 2\sqrt{a} = a + 2$. Jej úpravou dostaneme rovnicu $(a-1)(a^3 - 3a^2 - 21a - 25) = 0$. Prvý mnohočlen má prirodzený koreň $a = 1$, lenže v takom prípade by $v = 0$, čo je nemožné. Druhý mnohočlen $a^3 - 3a^2 - 21a - 25$ otestujeme na prirodzené korene pomocou tvrdenia z teórie čísel: *Prirodzené číslo k môže byť koreňom polynómu $f(x)$ s celočíselnými koeficientami, len ak k delí absolútny člen $f(x)$.* Dosadením zistíme, že 1, 5 ani 25 nie sú koreňmi, a teda v tomto prípade nedostávame žiadne riešenie.



Obr. 34

b) $b > c > a > v$

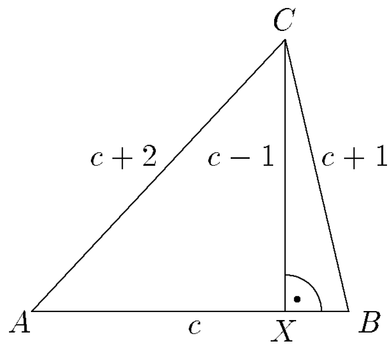
Analogickým postupom ako v a) dostávame (obr. 35):
$|AX| = \sqrt{6a+3}$,
$|BX| = \sqrt{2a-1}$,
$\sqrt{6a+3} + \sqrt{2a-1} = a + 1$. Jej úpravou dostaneme rovnicu $a^4 - 12a^3 - 14a^2 + 12a + 13 = (a-13)(a-1)(a+1)^2 = 0$. Koreň $a = 1$ zrejme nevyhovuje podmienkam úlohy ($v = 0$), pre $a = 13$ dostávame riešenie: $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$, $v = 12$. Potom $|AX| = 9$ a dĺžka $|BX| = 5$.



Obr. 35

c) $b > a > c > v$

(Všetky vzdialenosti vyjadrujeme pomocou c, aby boli naše úvahy analogické.) Postupujeme teda analogicky (obr. 36):
$|AX| = \sqrt{6c+3}$,
$|BX| = 2\sqrt{c}$,
$\sqrt{6c+3} + 2\sqrt{c} = c$.
Úpravou dostaneme rovnicu $c^4 - 18c^3 - 40c^2 - 30c - 9 = 0$. Táto rovnica má jediný celočíselný koreň 1, a ten nevyhovuje našej úlohe.

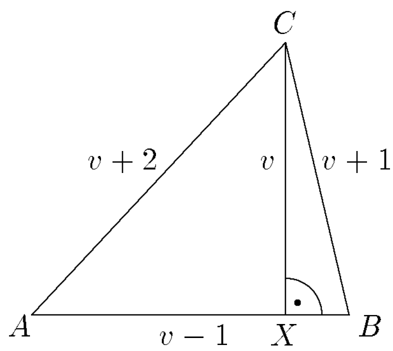


Obr. 36

d) $b > a > v > c$

Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch (obr. 37):
$|AX| = 2\sqrt{v+1}$,
$|BX| = \sqrt{2v+1}$,
$2\sqrt{v+1} + \sqrt{2v+1} = v - 1$.
Po úprave $v^4 - 16v^3 + 24v^2 + 16v = 0$. Táto rovnica má jediný celočíselný koreň 0, a ten nevyhovuje našej úlohe, preto v tomto prípade nedostávame žiadne riešenie.

Odpoveď: Jediné riešenie vyhovujúce zadaným podmienkam je $a = 13$, $b = 15$, $c = 14$, $v = 12$.



Obr. 37

1.2 Postupne dokážeme obe implikácie zo zadania.

„$\Leftarrow$" Nech $x+a, x+b, x+c$ sú členmi postupnosti $x, x+1, x+2, \ldots$, t.j. $(x+b)^2 = (x+a)(x+c)$. Z toho úpravou dostávame: $b^2 - ac = x(a+c-2b)$. Presvedčíme sa, že $a+c-2b \neq 0$. Ak by nastala rovnosť, platilo by $a+c-2b = b^2 - ac = 0$, teda $(a+c)^2 = (2b)^2 = 4ac$. Z toho dostávame $a = c$, čo je spor s výberom troch rôznych členov postupnosti $x, x+1, x+2, \ldots$ Preto $x = \dfrac{b^2-ac}{a+c-2b}$, čo je vďaka celočíselnosti výrazov v čitateli a menovateli racionálne číslo. Týmto sme dokázali prvú implikáciu.

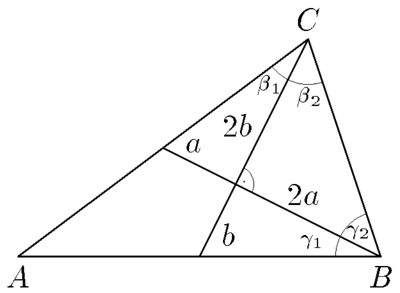
„$\Rightarrow$ " Nech $x \in \mathbb{Q}$. Potom existuje taký člen $x+k$ postupnosti $x, x+1, x+2, \ldots$, pre ktorý $x+k > 0$. Nech $x+k = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Potom

$$\frac{m}{n}(n+1) = m + \frac{m}{n}$$
$$\frac{m}{n}(n+1)^2 = mn + 2m + \frac{m}{n}.$$

Teda členy $x+k, x+k+m$ a $x+k+2m+mn$ tvoria geometrickú postupnosť.

1.3 *(Štefan Godiš)* Označme $3a$ dĺžku ťažnice z vrcholu C a $3b$ dĺžku ťažnice z vrcholu B v trojuholníku ABC a ďalej uhly $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ podľa obr. 38. Potom platí:

$$\operatorname{cotg}\,\beta_1 = \frac{2b}{a}, \qquad \operatorname{cotg}\,\beta_2 = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a},$$
$$\operatorname{cotg}\,\gamma_1 = \frac{2a}{b}, \qquad \operatorname{cotg}\,\gamma_2 = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}.$$



Obr. 38

Teraz využijeme súčtový vzorec pre funkciu cotg x (možno použiť aj vzorce pre sínus, kosínus a tangens). Dostávame:

$$\operatorname{cotg}\,(\sphericalangle CBA) = \operatorname{cotg}\,(\beta_1 + \beta_2) = \frac{\operatorname{cotg}\,\beta_1 \cdot \operatorname{cotg}\,\beta_2 - 1}{\operatorname{cotg}\,\beta_1 + \operatorname{cotg}\,\beta_2},$$
$$\operatorname{cotg}\,(\sphericalangle CBA) = \frac{\frac{2b}{a}\cdot\frac{b}{a} - 1}{\frac{2b}{a} + \frac{b}{a}} = \frac{2b^2 - a^2}{3ab}.$$

Obdobne dostaneme aj

$$\operatorname{cotg}\,(\sphericalangle BCA) = \frac{2a^2 - b^2}{3ab}.$$

Sčítaním týchto dvoch vzťahov máme

$$\operatorname{cotg}\,(\sphericalangle CBA) + \operatorname{cotg}\,(\sphericalangle BCA) = \frac{2b^2 - a^2}{3ab} + \frac{2a^2 - b^2}{3ab} = \frac{a^2 + b^2}{3ab}.$$

Keďže však triviálne platí $(a-b)^2 \geqq 0$, pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}$, napokon dostávame $(a, b > 0)$:

$$a^2 + b^2 \geqq 2ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{3ab} \geqq \frac{2}{3},$$

čo bolo treba dokázať.

Iné riešenie. *(Andrej Komora)*

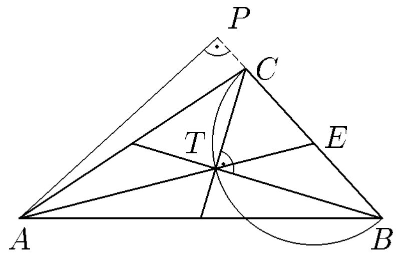
Označme T ťažisko trojuholníka ABC, E stred strany BC a P pätu kolmice z bodu A na stranu BC (obr. 39). Keďže je uhol $\sphericalangle BTC$ pravý, T leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BC (t.j. so stredom E). Z toho potom vyplýva, že $|AE| = 3|TE| = \frac{3}{2}|BC|$. Ďalej označme $z = |PA|, x = |BP|$ a $y = |CP|$ (v prípade, že $B \in PC$, položíme $x = -|BP|$, lebo $\sphericalangle ABC$ je tupý a obdobne ak $C \in BP$, položíme $y = -|CP|$, lebo $\sphericalangle ACB$ je tupý). Potom ale platí $\operatorname{cotg} \beta = \frac{x}{z}$ a $\operatorname{cotg} \gamma = \frac{y}{z}$. (Treba si uvedomiť, že ak by sme volili $x = |BP|$ a uhol β by bol tupý, tieto vzťahy by neplatili; obdobne aj v druhom prípade.)

Preto teda

$$\operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{y+x}{z} = \frac{|AB|}{z}.$$

Keďže však platí $|AP| \leqq |AE| = \frac{3}{2}|BC|$, dostávame

$$\operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \gamma \geqq \frac{2}{3}.$$



Obr. 39

1.4 Nech n je počet zúčastnených škôl, nech c_i (d_i) je počet súťažiacich chlapcov (dievčat) i-tej školy a ďalej nech c (d) je počet všetkých zúčastnených chlapcov (dievčat). Potom počet h_i dvojhier, v ktorých je zastúpená škola i je

$$h_i = c_i(c - c_i) + d_i(d - d_i) = cc_i + dd_i - c_i^2 - d_i^2.$$

Celkový počet dvojhier h je potom

$$h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} cc_i + \sum_{i=1}^{n} dd_i - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) = $$
$$= \frac{1}{2}\left(c^2 + d^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2\right).$$

Počet z_i zmiešaných dvojhier, v ktorých je zastúpená škola i je

$$z_i = c_i(d - d_i) + d_i(c - c_i) = cd_i + dc_i - 2c_id_i.$$

A tak je celkový počet z všetkých zmiešaných dvojhier

$$z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} cd_i + \sum_{i=1}^{n} dc_i - 2\sum_{i=1}^{n} c_id_i\right) = cd - \sum_{i=1}^{n} c_id_i.$$

Potom

$$h - z = \frac{1}{2}\left(c^2 + d^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2cd + 2\sum_{i=1}^{n} c_id_i\right) = \frac{1}{2}(c-d)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_i - d_i)^2.$$

Odtiaľ

$$\sum_{i=1}^{n}(c_i-d_i)^2=(c-d)^2-2(h-z).$$

Vzhľadom na nezápornosť ľavej strany a na to, že $(c-d)$ a $(h-z)$ môžu nadobúdať len hodnoty $1,-1,0$, platí $\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i-d_i)^2\in\{0,1,3\}$. Potom $|c_i-d_i|=0$ alebo $|c_i-d_i|=1$ (toto môže nastať nanajvýš v troch prípadoch).

Prvý prípad vedie k párnemu počtu žiakov v i-tej škole, druhý k nepárnemu počtu. Preto sa na turnaji nemohli zúčastniť viac ako tri školy s nepárnym počtom žiakov. Ak zvolíme $n=3$; $c_1=c_2=d_3=1$; $c_3=d_1=d_2=0$, tak zistíme, že tento prípad vyhovuje zadaniu. Tým sme dokázali, že maximálny počet zúčastnených škôl s nepárnym počtom žiakov je 3.

1.5 *(Tamás Varga, Keszegh Balázs)* Keďže $x_1+\ldots+x_n=y_1+\ldots+y_n$, môžeme k pravej strane danej nerovnosti pripočítať súčet x-ov a k ľavej strane súčet y-ov. Dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{y_1}+\ldots+\frac{x_n^2+y_n^2}{y_n}\geqq 2(x_1+\ldots+x_n)$$

$$\frac{x_1^2-2x_1y_1+y_1^2}{y_1}+\ldots+\frac{x_n^2-2x_ny_n+y_n^2}{y_n}\geqq 0$$

$$\frac{(x_1-y_1)^2}{y_1}+\ldots+\frac{(x_n^2-y_n)^2}{y_n}\geqq 0.$$

Na ľavej strane teraz máme len kladné členy, preto posledná nerovnosť platí. Keďže boli všetky úpravy ekvivalentné, platí aj zadaná nerovnosť.

Iné riešenie. *(Richard Hulín, Eugen Kováč)* Podľa *Cauchyho nerovnosti* (občas nazývanej aj *Cauchy–Buňakovského, Cauchy–Schwartzova* a pod.) platí pre ľubovoľné reálne čísla $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$$

Keďže zo zadania $x_i,y_i>0$ (pre každé $i=1,\ldots,n$), potom môžeme zaviesť substitúciu $a_i=\dfrac{x_i}{\sqrt{y_i}}$; $b_i=\sqrt{y_i}$. Potom z *Cauchyho nerovnosti* dostávame:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)\geqq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right).$$

Keďže však $y_1,\ldots,y_n$ sú len permutáciou $x_1,\ldots,x_n$, platí $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i>0$. Po vydelení poslednej nerovnosti týmto súčtom dostávame zadanú nerovnosť.

Iné riešenie. *(Miroslav Dudík)* Tvrdenie triviálne platí pre $n = 1$. Predpokladajme teraz, že už platí pre všetky $n < p$. Ak sa dá permutácia $y_1, \dots, y_n$ rozložiť na dva disjunktné cykly nenulovej dĺžky, na tieto cykly možno použiť indukčný predpoklad a sčítaním takto obdržaných nerovností dostávame hľadanú nerovnosť pre $n = p$.

Preto bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $y_1 = x_2$, $y_2 = x_3$, ..., $y_n = x_{n+1}$, $y_{n+1} = x_1$ $(n+1 = p)$. Ďalej môžeme tiež predpokladať, že $x_{n+1} = \max\{x_i; i = 1, \dots, n+1\}$. Potom poľahky dokážeme, že platí nerovnosť

$$\frac{x_n^2}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}^2}{x_1} + \frac{x_n^2}{x_1} \geqq x_{n+1}. \tag{1}$$

Táto nerovnosť je totiž pre kladné x_1, x_n, x_{n+1} ekvivalentná s nerovnosťou $(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n)$. Tá však vzhľadom na voľbu x_{n+1} platí. Preto platí aj nerovnosť (1). Pripočítaním tejto nerovnosti k nerovnosti

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqq x_1 + \ldots x_n,$$

čo je indukčný predpoklad, dostávame hľadanú nerovnosť pre $n + 1 = p$.

Iné riešenie. *(Zuzana Andrássyová)* Použijeme *Čebyševovu nerovnosť*:

$$\frac{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}{n} \geqq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n},$$

ktorá platí pre nezáporné čísla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ (ide len o jeden z rôznych tvarov tejto nerovnosti). Položme $a_i = x_i$, $b_i = \frac{x_i}{y_i}$, pre $i = 1, \dots, n$. Dostávame:

$$\frac{\frac{x_1^2}{y_1} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}}{n} \geqq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{\frac{x_1}{y_1} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}}{n}.$$

Na druhý výraz na pravej strane teraz stačí použiť *AG nerovnosť*:

$$\frac{\frac{x_1}{y_1} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}}{n} \geqq 1,$$

a po prenásobení nerovnosti číslom n dostávame hľadanú nerovnosť.

1.6 *(Martin Plesch)* Ofarbime rohy políčok šachovnice striedavo dvoma farbami (napr. bielou a čiernou) tak, aby žiadne dva vrcholy spojené jednotkovou úsečkou šachovnice nemali rovnakú farbu. Položme teraz na nejaké políčko našu jednotkovú kocku. Jej spodné vrcholy ofarbíme farbou vrcholov políčok šachovnice, v ktorých sa tieto vrcholy kocky nachádzajú. Vrchné vrcholy kocky ofarbíme opačne ako na spodnej podstave (t.j. nad bielym bodom bude čierny a nad čiernym biely). Je jasné, že pohybom kocky po šachovnici sa táto vlastnosť ofarbenia kocky nemení, teda stále majú vrcholy spodnej podstavy farbu prislúchajúcu ofarbeniu šachovnice a vrcholy hornej podstavy farbu opačnú. Pri otočení jednej steny o 90° (napr. F) je však zjavne ofarbenie spodnej podstavy kocky rôzne od ofarbenia príslušných vrcholov políčok šachovnice. Preto je táto situácia neprípustná.

Odpoveď: Kocka sa popísaným spôsobom do zadanej polohy dostať nemôže.

Iné riešenie. *(Ondrej Lonek)* Orientujme šachovnicu v smere svetových strán (t.j. zaveďme smery západ, východ, sever a juh). Aby sa kocka dostala späť na pôvodné miesto, musí byť počet jej otočení na západ rovnaký ako počet jej otočení na východ, obdobne pre sever a juh. Preto musí byť celkový počet otočení párny.

Teraz rozdeľme celé otáčanie na maximálny počet takých *úsekov*, na začiatku a na konci ktorých bola stena F spodnou alebo vrchnou podstavou kocky. Uvažujme, ako môže takýto jeden *úsek* vyzerať. Na jeho začiatku kocku otočíme v jednom zo smerov (nazvime ho *pôvodný*). Potom ju môžeme otáčať len v smeroch kolmých na tento *pôvodný* a na záver ju opäť otočíme buď v *pôvodnom* smere, alebo v smere k nemu opačnom. Evidentne platí, že ak sa stena F pri tomto *úseku* otočila o 90°, počet otočení v *úseku* bol nepárny, naopak ak sa neotočila, alebo sa otočila o 180°, bol počet otočení párny. Keďže je však celkový počet otočení párny, musí byť párny aj počet *úsekov*, pri ktorých sa stena F otočila o 90°. Preto po všetkých otočeniach nemôže byť stena F otočená o 90°.

1.7 *(Miroslav Dudík)* Položme $a = f(0)$, zo zadania potom dostávame:

$$f(f(0+0)) = f(0+0) + f(0)\cdot f(0) - 0\cdot 0 \quad \Rightarrow f(a) = a + a^2$$
$$f(f(a-a)) = f(a-a) + f(a)\cdot f(-a) + a\cdot a \Rightarrow f(a) = a + f(a)\cdot f(-a) + a^2$$

Použitím posledných dvoch vzťahov dostávame

$$a + a^2 = a + f(a)\cdot f(-a) + a^2 \iff f(a)\cdot f(-a) = 0,$$

čiže buď $f(a) = 0$ alebo $f(-a) = 0$. Rozoberme obidva prípady.

a) Ak $f(a) = 0$, potom:

$$f(0) = f(f(a+0)) = f(a+0) + f(a)\cdot f(0) - a\cdot 0 = 0;$$

b) Ak $f(-a) = 0$, potom:

$$f(0) = f(f(-a+0)) = f(-a+0) + f(-a)\cdot f(0) + a\cdot 0 = 0.$$

V oboch prípadoch dostávame $f(0) = 0$. Preto potom pre každé $x, y \neq 0$ platí:

$$f(f(x)) = f(f(x+0)) = f(x+0) + f(x)\cdot f(0) - x\cdot 0 = f(x). \tag{1}$$

Ďalej

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)\cdot f(y) - x\cdot y \qquad \text{použitím (1)}$$
$$f(x+y) = f(x+y) + f(x)\cdot f(y) - x\cdot y \Rightarrow f(x)\cdot f(y) = x\cdot y \tag{2}$$

Z (2) dostávame, že $x = 0$ je jediné také x, pre ktoré platí $f(x) = 0$. Preto môžeme predpokladať $f(1) \neq 0$. Z (2) potom vyplýva:

$$f(x) \cdot f(1) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{x}{f(1)}, \qquad f(y) \cdot f(1) = y \quad \Rightarrow \quad f(y) = \frac{y}{f(1)}. \tag{3}$$

Prenásobením posledných dvoch rovností dostávame

$$f(x) \cdot f(y) = \frac{x \cdot y}{f^2(1)}. \tag{4}$$

Z (2) a (4) potom okamžite $f^2(1) = 1$. Môžu nastať dva prípady.

- Ak $f(1) = -1$. Potom ale z (3) vyplýva, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = -x$. Táto možnosť však vedie k sporu, pretože podľa (1) platí tiež

$$x = f(-x) = f(f(x)) = f(x) = -x,$$

  čo však pre žiadne nenulové x neplatí.
- Ak $f(1) = 1$. Potom z (3) vyplýva, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = x$. Toto naozaj vedie k riešeniu, stačí dosadiť do zadaných vzťahov:

$$f(f(x+y)) = f(x+y) = x+y,$$
$$f(x+y) + f(x) \cdot f(y) - x \cdot y = x + y + x \cdot y - x \cdot y = x + y,$$

  čo triviálne platí, pre každé $x, y \in \mathbb{R}$.

Odpoveď: Daným podmienkam vyhovuje len funkcia $f(x) = x$, pre každé reálne x.

DRUHÁ SÉRIA

2.1 Danú rovnicu roznásobíme. Po prenásobení desiatimi dostávame:

$$10x^5 - 10x^4 - 40x^3 - 80x^2 - 80x - 32 = 0,$$

čo sa po malej úprave dá napísať ako

$$11x^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32 = (x+2)^5.$$

Hľadáme reálny koreň, preto môžeme odmocniť a dostávame $x + 2 = \sqrt[5]{11}x$. To je lineárna rovnica a jej riešením je očividne

$$x = \frac{2}{\sqrt[5]{11} - 1} = \frac{1 + \sqrt[5]{11} + \sqrt[5]{11^2} + \sqrt[5]{11^3} + \sqrt[5]{11^4}}{5}.$$

Takto dostávame jediný reálny koreň danej rovnice.

2.2 (*Daniel Pártoš*) Keďže je daná funkcia štvrtého stupňa s kladným prvým koeficientom, jej lokálne minimum je aj jej globálnym minimom, teda stačí nájsť také x, pre ktoré platí $f'(x) = 0$ a zároveň $f(x) = c$.

Jedine v takýchto bodoch x môže funkcia $f(x)$ nadobúdať minimum rovné c. Hľadáme preto také reálne číslo x, pre ktoré zároveň platia rovnosti:

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 8x^2 + cx &= c, \\ 4x^3 - 12x^2 + 16x + c &= 0. \end{aligned}$$

Po prenásobení druhej rovnice výrazom $x - 1$ a drobnej úprave prvej rovnice dostávame: $x^4 - 4x^3 + 8x^2 = (x-1)(4x^3 - 12x^2 + 16x)$. Táto rovnica má len dva reálne korene $x = 0, x = 2$, ktorým zodpovedajú po rade hodnoty $c = 0, c = -16$. Tieto hodnoty sú zároveň aj riešeniami našej úlohy, o čom sa možno presvedčiť skúškou.

2.3 Označme písmenom A ľubovoľný z daných n bodov a zvoľme nejakú kružnicu k so stredom v A a polomerom r. Zobrazme si zvyšných $n - 1$ bodov kruhovou inverziou vzhľadom na k. (Kruhová inverzia daná kružnicou $k(S, r)$ je zobrazenie roviny, pri ktorom sa ľubovoľný bod X roviny rôzny od S zobrazí do bodu X' tak, že $X' \in \overrightarrow{SX}$ a $|SX||SX'| = r^2$.) Na základe vlastností tohto zobrazenia sa kružnice prechádzajúce bodom A zobrazia na priamky a ostatné kružnice na kružnice. Nakoľko dané body neležali na jednej kružnici, nebude ani $n - 1$ ich obrazov ležať na jednej priamke. Z pomerne známeho tvrdenia (dokážte si ho!) vyplýva, že spomedzi týchto bodov teraz možno vybrať dva také, že na priamke nimi určenej neleží už žiaden iný bod. Označme tieto body B' a C' (ich vzory v kruhovej inverzii označme B a C). Nakoľko body A, B, C neležali na jednej priamke, ani body A', B', C' nie sú kolineárne. Z toho vyplýva, že vzorom priamky $B'C'$ v našom zobrazení je kružnica prechádzajúca bodmi A, B, C a žiadnym iným z daných bodov. Týmto sme tvrdenie zo zadania dokázali. Dokázali sme však ešte viac: pre každý bod A existuje kružnica prechádzajúca bodom A obsahujúca ešte práva dva z daných bodov.

2.4 Lema. *Nech p_1, p_2, $p_1 < p_2$ sú prvočísla. Ak $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, potom $a + b\sqrt{p_1} + c\sqrt{p_2} + d\sqrt{p_1 p_2} = 0 \iff a = b = c = d = 0$.*

Dôkaz. Použijeme dve známe tvrdenia (skúste si ich dokázať, ak ich nepoznáte), že ak je číslo p prvočíslo, potom je číslo $\sqrt{p}$ iracionálne a ak sú a a b racionálne koeficienty, potom je číslo $a + b\sqrt{p}$ rovné 0 práve vtedy, keď sú oba tieto koeficienty nulové.

Jedna časť dokazovanej ekvivalencie je triviálna, dokazujeme len jej druhú časť. Označme $\mathcal{M} = \{a + b\sqrt{p_1},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Z predpokladu lemy dostávame: $(a + b\sqrt{p_1}) + \sqrt{p_2}(c + d\sqrt{p_1}) = 0$. Ak $c + d\sqrt{p_1} = 0$, potom $a + b\sqrt{p_1} = 0$, z toho $a = b = c = d = 0$.

Ak $c + d\sqrt{p_1} \neq 0$, potom

$$\sqrt{p_2} = \frac{-a - b\sqrt{p_1}}{c + d\sqrt{p_1}} \cdot \frac{c - d\sqrt{p_1}}{c - d\sqrt{p_1}} \in \mathcal{M}.$$

Existujú preto čísla $e, f \in \mathbb{Q}$ také, že $\sqrt{p_2} = e + f\sqrt{p_1}$. Potom po úprave dostávame $(-p_2 + e^2 + f^2 p_1) + 2ef\sqrt{p_1} = 0$, z čoho potom $ef = 0$ a zároveň $-p_2 + e^2 + f^2 p_1 = 0$.

Ak by $e = 0$, potom $p_2 = f^2 p_1$, z čoho $p_1 | p_2$, čo je spor. Preto $f = 0$. Potom ale $p_2 = e^2$, teda $e = \sqrt{p_2} \notin \mathbb{Q}$, čo je takisto spor.

Nech $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ sú také, že rovnica $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + 8 = 0$ má koreň $1 + \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$. Po dosadení dostávame $A + B\sqrt{p_1} + C\sqrt{p_2} + D\sqrt{p_1 p_2} = 0$, kde A, B, C a D sú celočíselné koeficienty, ktoré sú závislé len od hodnôt $a_1, \dots, a_n$, p_1, p_2. Z lemy dostávame $A = B = C = D = 0$. Ak teraz dosadíme do $f(x)$ postupne čísla $1 + \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}$, $1 - \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$, $1 - \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}$, dostávame:

$$
\begin{aligned}
f(1 + \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}) &= A + B\sqrt{p_1} - C\sqrt{p_2} - D\sqrt{p_1 p_2} = 0,\\
f(1 - \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}) &= A - B\sqrt{p_1} + C\sqrt{p_2} - D\sqrt{p_1 p_2} = 0,\\
f(1 - \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}) &= A - B\sqrt{p_1} - C\sqrt{p_2} + D\sqrt{p_1 p_2} = 0,
\end{aligned}
$$

lebo $A = B = C = D = 0$. Čiže $f(x)$ má nutne aj korene $1 + \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}$, $1 - \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$, $1 - \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}$, čiže polynóm $g(x)$ rovný

$$
\begin{aligned}
(x - 1 - \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2})(x - 1 - \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})(x - 1 + \sqrt{p_1} - \sqrt{p_2})(x - 1 + \sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}) = \\
= x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4
\end{aligned}
$$

s celočíselnými koeficientami delí $f(x)$, teda $b_4 | 8$. Avšak $b_4 = (p_1 - p_2)^2 - 2(p_1 + p_2) + 1$. Ak p_1, p_2 sú obe nepárne, potom $p_1 + p_2, p_1 - p_2$ sú párne, z čoho vyplýva, že b_4 je nepárne, a ak $b_4 | 8$, potom musí byť $b_4 = \pm 1$.

Ak $b_4 = -1$, potom $(p_1 - p_2)^2 - 2(p_1 + p_2) = -2$, z čoho dostávame spor, lebo obidva sčítance sú deliteľné štyrmi.

Ak $b_4 = 1$, potom po úprave dostávame $p_2(p_2 - 2(1 + p_1)) = p_1(2 - p_1)$, z čoho buď $p_2 | p_1$ alebo $p_2 | p_1 - 2$. V oboch prípadoch $p_2 \leqq p_1$, čo je spor s predpokladom $p_2 > p_1$.

Preto musí byť nutne jedno z prvočísel p_1, p_2 párne, čiže $p_1 = 2, p_2 \geqq 3$. Potom $b_4 = 1 - 6p_2 + p_2^2 | 8$, z čoho $b_4 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ a $p_2 = 3 + \sqrt{8 + b_4}$. Preskúšaním všetkých možností dostávame $b_4 = -8$, $p_2 = 3$; $b_4 = -4$, $p_2 = 5$; $b_4 = 8$, $p_2 = 7$.

Riešením sú dvojice $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(2, 7)$.

2.5 Aby bola hra zaujímavejšia, urobme nasledujúce zlepšenie. Ak dá jedno dievča prvýkrát kartu druhému, obe sa na túto kartu podpíšu. Ak teraz nejaké dievča posiela kartu svojej susedke a má kartu s jej podpisom, pošle jej túto kartu. Preto každá podpísaná karta putuje len medzi dvoma susediacimi dievčatami, ktoré sú na nej podpísané. Keďže dvojíc susediek je práve 1995 a kariet je $n < 1995$, existuje dvojica dievčat, ktoré si nikdy vzájomne neposlali kartu. Preto je zrejmé, že jedno z týchto dvoch dievčat nikdy kartu neposielalo.

Teraz si predstavme, že hra trvá nekonečne dlho. Potom existuje aspoň jedno dievča, ktoré nekonečne veľakrát odosiela karty. Medzi takýmito dievčatami (z vyššie uvedených dôvodov) existuje taká, ktorej susedka odoslala karty len konečne veľakrát. Preto teda musí existovať dievča, ktoré nekonečne veľa kariet dostane, a len konečne veľa odošle, čo však pri konečnom počte kariet nie je možné. Preto sa hra musí po konečnom počte výmen kariet skončiť.

2.6 Nakoľko všetky tri sedemuholníky sú pravidelné, platí:

$$\frac{S_B + S_C}{S_A} = \frac{|B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2}{|A_1A_2|^2}.$$

Tiež platia rovnosti:

$|A_1A_2| = |B_1B_3| = |C_1C_4|$, $|C_1C_2| = 2r_C \sin\frac{\pi}{7}$, $|C_1C_4| = 2r_C \sin\frac{3\pi}{7}$, $|B_1B_2| = 2r_B \sin\frac{\pi}{7}$, $|B_1B_3| = 2r_B \sin\frac{2\pi}{7}$, kde r_B a r_C sú polomery opísaných kružníc sedemuholníkov $B_1 \dots B_7$ a $C_1 \dots C_7$. Z toho:

$$|B_1B_2| = |B_1B_3| \cdot \frac{2r_B \sin\frac{\pi}{7}}{2r_B \sin\frac{2\pi}{7}}, \qquad |C_1C_2| = |C_1C_4| \cdot \frac{2r_C \sin\frac{\pi}{7}}{2r_C \sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Takto dostávame:

$$\frac{S_B + S_C}{S_A} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin^2\frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin^2\frac{3\pi}{7}}.$$

Ak vyčíslime teraz $\dfrac{S_B + S_C}{S_A} = 0{,}50604079$, vidíme, že nerovnosti zo zadania sú splnené. Týmto sme však ešte nedokázali, že tieto nerovnosti platia. Museli by sme dokázať, že chyba, ktorú spraví kalkulačka pri výpočte, neprekročila $0{,}006$. Chyba, ktorú kalkulačka spraví, totiž závisí od počtu miest, s ktorými operuje, počtom operácií, atď. Preto uvedieme dôkazy týchto nerovností.

a) Ukážeme, že $|A_1A_2| = |B_1B_2| + |C_1C_2|$. Zrejme stačí ukázať, že

$$|A_1A_2| = |A_1A_2| \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} + |A_1A_2| \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}},$$

teda

$$1 = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Ak použijeme rozkladové vzorce pre sínus, dostávame

$$\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$\text{a} \qquad \sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}\right).$$

Čiže výrazy sa rovnajú, a preto platia aj rovnosti:

$$1 = \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{3\pi}{7}} \qquad \text{a} \qquad |A_1A_2| = |B_1B_2| + |C_1C_2|.$$

Nakoľko $|B_1B_2| \neq |C_1C_2|$, je

$$2\left(|B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2\right) = \left(|B_1B_2| + |C_1C_2|\right)^2 + \left(|B_1B_2| - |C_1C_2|\right)^2 > |A_1A_2|^2.$$

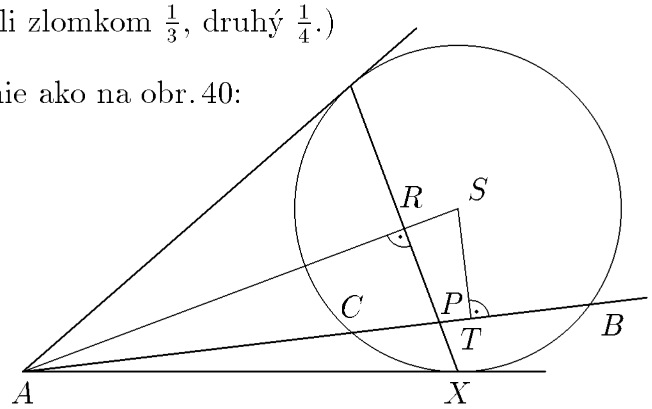
Preto
$$\frac{1}{2} < \frac{|B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2}{|A_1A_2|^2} = \frac{S_B + S_C}{S_A}.$$

b) Dá sa ukázať, že
$$\frac{S_B + S_C}{S_A} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{(4\cos^2\frac{\pi}{7} - 1)^2}.$$

Ďalej si stačí všimnúť klesajúcosť funkcie $\cos x$ na intervale $(0, \pi)$, z čoho jednoducho dostávame
$$\frac{S_B + S_C}{S_A} < \frac{7}{12} < 2 - \sqrt{2}.$$

(Prvý člen sme odhadli zlomkom $\frac{1}{3}$, druhý $\frac{1}{4}$.)

2.7 Zaveďme označenie ako na obr. 40:



Obr. 40

a) Z mocnosti bodu ku kružnici dostávame $|AX|^2 = |AB| \cdot |AC|$. Z podobnosti trojuholníkov APR a ATS ďalej platí $\dfrac{|AP|}{|AR|} = \dfrac{|AS|}{|AT|}$, teda $|AP| \cdot |AT| = |AR| \cdot |AS|$. Z *Euklidovej vety o odvesne* v trojuholníku AXS vyplýva $|AX|^2 = |AR| \cdot |AS|$. Spolu dostávame
$$|AP| = \frac{|AR| \cdot |AS|}{|AT|} = \frac{|AX|^2}{|AT|} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AT|},$$
čo je konštantné. Analogickú úvahu možno previesť aj pre bod D.

b) Položme $|AT| = x$, $\dfrac{b}{2} < x < a - \dfrac{b}{2}$. Zaveďme funkciu
$$f(x) = |PQ| = a - |AP| - |DQ| =$$
$$= a - \frac{(x - \frac{b}{2})(x + \frac{b}{2})}{x} - \frac{(a - x - \frac{b}{2})(a - x + \frac{b}{2})}{a - x} = \frac{ab^2}{4x(a - x)}.$$

Evidentne je výraz $x(a - x)$ maximálny práve pre $x = \dfrac{a}{2}$ (dá sa dokázať pomocou AG-nerovnosti). Teda $|PQ|$ je minimálna pre $x = \dfrac{a}{2}$ a je rovná $\dfrac{b^2}{a}$.

Takéto riešenie je však ešte neúplné. Ak totiž vyšetrujeme extrém funkcie na intervale, musíme ešte overiť či hodnota $\frac{a}{2}$ padne do intervalu $\left(\frac{b}{2} < \frac{a}{2} < a - \frac{b}{2}\right)$, a tiež prešetriť hodnoty v krajných bodoch $\left(f\left(\frac{b}{2}\right) = f\left(a - \frac{b}{2}\right) > \frac{b^2}{a}\right)$. To sa však jednoducho overí.

Tretia séria

3.1 *(Miroslav Dudík)* Postupujme sporom. Nech teda po priložení prvej šablóny na ľubovoľné miesto nekonečného štvorčekového papiera je súčet čísel na zakrytých políčkach kladný a po ľubovoľnom priložení druhej šablóny nekladný. Označme počet políčok, ktoré zakrýva prvá šablóna m, druhá n. Vyjadrime polohu každého z políčok šablóny ako posunutie vzhľadom na jej ľubovoľné pevné políčko. Pre prvú šablónu nech sú to posunutia $\mathcal{T}_1$ až $\mathcal{T}_m$ a pre druhú $\mathcal{V}_1$ až $\mathcal{V}_n$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $\mathcal{V}_1$ a $\mathcal{T}_1$ sú identity (prvé posunutie ukazuje na políčko, vzhľadom na ktoré polohu ostatných posudzujeme). Nech A je ľubovoľné políčko, $f(A)$ číslo na políčku A. Označme

$$A_{i,j} = \mathcal{T}_i \circ \mathcal{V}_j(A) = \mathcal{V}_j \circ \mathcal{T}_i(A); \;\; 1 \leqq i \leqq m, \;\; 1 \leqq j \leqq n.$$

Symbolom $A_{i,j}$ teda označujeme políčko, ktoré dostaneme ako výsledok posunutí $\mathcal{T}_i, V_j$ políčka A. Poľahky nahliadneme, že platí $A_{1,1} = A$; $A_{i,j} = \mathcal{T}_i(A_{1,j}) = \mathcal{V}_j(A_{i,1})$. Podľa predpokladu pre ľubovoľné $1 \leqq j \leqq n$ platí:

$$f(A_{1,j}) + f(A_{2,j}) + \ldots + f(A_{m,j}) > 0,$$

keďže $A_{1,j}$ až $A_{m,j}$ sú políčka, ktoré prikrýva prvá šablóna (s prvým políčkom na $A_{1,j}$). Analogicky pre druhú šablónu a ľubovoľné $1 \leqq i \leqq m$ dostávame:

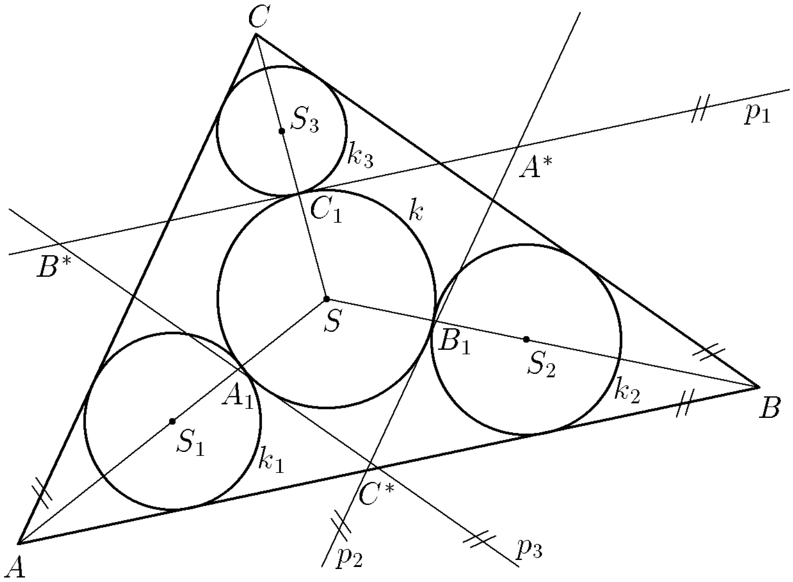
$$f(A_{i,1}) + f(A_{i,2}) + \ldots + f(A_{i,n}) \leqq 0,$$

Sčítaním nerovností pre prvú a druhú šablónu dostávame

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(A_{k,j}) > 0 \qquad \text{a zároveň} \qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(A_{i,k}) \leqq 0.$$

Keďže sčítame cez konečný počet políčok, sú oba súčty zrejme zhodné, čím dostávame spor.

3.2 *(Tamás Varga)* Keďže kružnice k_1 a k sa dotýkajú v bode A_1, v istej rovnoľahlosti so stredom A_1 je kružnica k obrazom kružnice k_1. V tej istej rovnoľahlosti je obraz priamky AB priamka s ňou rovnobežná, ktorá sa dotýka kružnice k; označme ju p_1. Podobne obraz priamky AC v tejto rovnoľahlosti označme p_2 ($AC \parallel p_2$) (obr. 41). Potom bod A^* definovaný ako priesečník priamok p_1 a p_2 je obrazom bodu A, teda body A, A_1 a A^* ležia na jednej priamke. Podobne nech p_3 je obraz priamky BC v rovnoľahlosti napríklad so stredom B_1 zobrazujúcej kružnicu k_2 na k a body B^*, C^* sú definované nasledovne: $B^* = p_1 \cap p_3$, $C^* = p_2 \cap p_3$. Potom analogicky platí, že body B, B_1 a B^* ležia na jednej priamke; rovnako aj body C, C_1 a C^*. Stačí teda dokázať, že priamky AA^*, BB^* a CC^* sa pretínajú v jednom bode.



Obr. 41

Vieme, že $|B^*C_1| = |B^*A_1|$, $|A^*C_1| = |A^*B_1|$, $|C^*B_1| = |C^*A_1|$ (dotyčnice z jedného bodu), z čoho vyplýva, že

$$|B^*C_1| \cdot |A^*B_1| \cdot |C^*A_1| = |B^*A_1| \cdot |A^*B_1| \cdot |C^*A_1| \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{|B^*C_1|}{|C_1A^*|} \cdot \frac{|A^*B_1|}{|B_1C^*|} \cdot \frac{|C^*A_1|}{|A_1B^*|} = 1\,.$$

Podľa *Cevovej vety* pre $\triangle A^*B^*C^*$ a priamky A^*A_1, B^*B_1, C^*C_1 táto rovnosť znamená, že sa priamky A^*A_1, B^*B_1, C^*C_1 (a teda aj priamky AA_1, BB_1, CC_1) pretínajú v jednom bode. A to sme chceli dokázať.

3.3 *(Miroslav Dudík)* Množinu žiakov a vzťahov medzi nimi si budeme predstavovať ako neorientovaný graf $\mathcal{G}$ (vrcholy sú žiaci, priatelia sú spojení hranou). Žiakov (vrcholy) môžeme očíslovať od 1 (učí sa najhoršie) po 30 (učí sa najlepšie). Ak máme žiakov x, y, tak x sa učí lepšie ako y práve vtedy, ak $x > y$. Množinu žiakov, ktorí sa učia horšie (t.j. neučia sa lepšie ako väčšina ich priateľov) označíme X a $p = |X|$. Počet priateľov, ktorých má každý žiak, nech je n.

Prečíslujme si teraz žiakov nasledovne: číslami $1, 2, \dots, p$ označíme žiakov z množiny X tak, aby sme ich mali usporiadaných vzostupne podľa študijných výsledkov. Podobne za nimi zaradíme aj ostatných žiakov a priradíme im čísla $p+1, \dots, 30$.

Uvedomme si, že musí platiť táto nerovnosť : $p \geqq \frac{n+1}{2}$. Inak by najhorší zo žiakov nepatriacich do množiny X mal nanajvýš $\frac{n-1}{2}$ horšie sa učiacich známych – čo zjavne nie je väčšina, teda aj on sám by patril do množiny X.

Označme si symbolom $\mathcal{G}_k$ časť grafu $\mathcal{G}$ tvorenú žiakmi $1, 2, \dots, k$. Nasledujúce úvahy sa budú zaoberať práve odhadom počtu hrán, ktoré vedú z $\mathcal{G}_k$ do zvyšku grafu. Označme tento počet ako h_k. Zjavne $h_p \leqq np$. Ukážme, že pre $k > p$ platí nerovnosť $h_{k+1} < h_k$.

Nahliadnuť túto nerovnosť je pomerne jednoduché, pokiaľ si uvedomíme, že počet hrán h_k sa mení nasledovne :

$$h_{k+1} = h_k + \mathit{výstup} - \mathit{vstup},$$

kde číslo *vstup* označuje počet hrán medzi vrcholom $k+1$ a $\mathcal{G}_k$ a číslo *výstup* znamená počet ostatných hrán vychádzajúcich z vrcholu $k+1$. Nakoľko žiak číslo $k+1$ je najslabší zo žiakov $k+1, \dots, 30$ a nepatrí do X, musí platiť nerovnosť $\mathit{vstup} > \mathit{výstup}$ (aby nemal väčšinu lepších kamarátov). Z toho už vyplýva, že platí uvedená nerovnosť medzi h_k a h_{k+1}.

Z týchto úvah dostávame, že pre $\mathcal{G}$ s parametrami p, n platí :

$$h_{29} \leqq pn - (29 - p) = (n+1)p - 29.$$

Nakoľko žiak s číslom 30 je posledným, musí byť $h_{29} = n$. Teda po úprave

$$28 \leqq (n+1)(p-1) \leqq 2p(p-1).$$

Poslednú nerovnosť sme dostali použitím $p \geqq \dfrac{n+1}{2}$. Ľahko nahliadneme, že potom $p \geqq 5$. Pre $p = 5$, t.j. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, voľme $n = 9$. Množinu hrán dostaneme dezorientovaním nasledujúcich usporiadaných dvojíc a vylúčením slučiek a viacnásobných hrán z posledného kartézskeho súčinu:

$$\begin{aligned}
&\{1,2,3,4,5\} \times \{6,7,8,9,10,11,12,13,14\} \cup \\
&\cup \{6,7,8,9,10\} \times \{15,16,17,18\} \cup \\
&\cup \{11,12,13,14,15\} \times \{19,20,21,22\} \cup \\
&\cup \{16,17,18,19,20\} \times \{23,24,25,26\} \cup \\
&\cup \{21,22,23,24,25\} \times \{27,28,29,30\} \cup \\
&\cup \{26,27,28,29,30\} \times \{26,27,28,29,30\}
\end{aligned}$$

Ľahko zistíme, že takto vzniknutý graf vyhovuje podmienkam pre $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = 9$. Zároveň sme ukázali, že neexistuje taký graf $\mathcal{G}$, $n > 0$, aby $p < 5$, teda za predpokladu $n > 0$, je najvyšší možný počet žiakov s lepšími výsledkami ako väčšina ich priateľov 25.

3.4 *(Eugen Kováč)* Ak uvažujeme danú rovnicu (mod 5), dostávame $2^y \equiv 1 \pmod 5$, z čoho po preskúmaní zvyškov $2^n \pmod 5$ dostávame $4 | y$, čiže $y = 4a$, $a \in \mathbb{N}$. Ďalej uvažujme danú rovnicu (mod 4). Zrejme $5^s \equiv 1 \pmod 4$ a $2^{4a} \equiv 0 \pmod 4$, preto musí platiť $2 \equiv 2^z \cdot 5^t \pmod 4$. Z toho samozrejme $z = 1$. Teraz uvažujme rovnicu (mod 8). Mocniny čísla 5 dávajú len zvyšky $5, 1$, číslo 2^{4a} je ôsmimi deliteľné, a tak $5^x \equiv 2^y + 2 \cdot 5^t - 1 \equiv 1 \pmod 8$. Preto $x = 2b$, $b \in \mathbb{N}$.

Ďalšie použité modulo bude 3. Máme $5^{2b} - 2 \cdot 5^t \equiv 2^{4a} - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Potom $2 \cdot 5^t \equiv 5^{2b} \equiv 1 \pmod 3$. Z toho vyplýva $t = 2c + 1$, $c \in \mathbb{N}$.

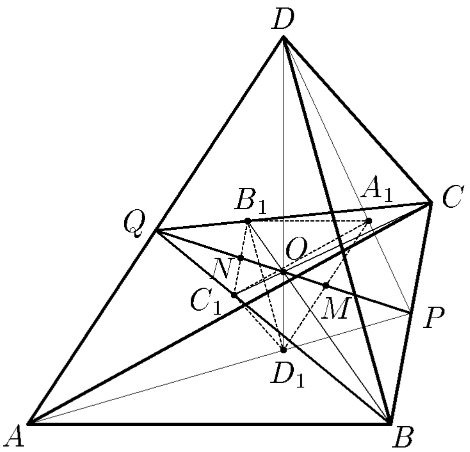
Nová rovnica má preto tvar

$$1 + 5^{2b} = 2^{4a} + 2 \cdot 5^{2c+1}.$$

Ak je $c = 0$, rovnica má tvar $1 + 5^{2b} = 2^{4a} + 10$. Teda $5^{2b} - 2^{4a} = 9$, ľavú stranu možno rozložiť na $(5^b - 4^a)(5^b + 4^a)$, z čoho okamžite $5^b + 4^a = 9$ a $5^b - 4^a = 1$. Z tejto možnosti preto dostávame riešenie $(x, y, z, t) = (2, 4, 1, 1)$.

Zostal prípad $c \geqq 1$, teda rovnica $25^b - 10 \cdot 25^c = 16^a - 1$. Uvažujme túto rovnicu (mod 100). Evidentne $25^n \equiv 25 \pmod{100}$. Preto potom po úprave $16^a \equiv 76 \pmod{100}$. Z tabuľky zvyškov mocnín 16 dostávame $5|a$, čiže $a = 5d$, $d \in \mathbb{N}$. Rovnica prechádza do tvaru $25^b - 10 \cdot 25^c = 2^{20d} - 1$. Po krátkom skúmaní zistíme, že je vhodné uvažovať rovnicu ešte (mod 11). Evidentne $25^b - 10 \cdot 25^c \equiv 25^b + 25^c \pmod{11}$. Ďalej $20^d - 1 \equiv (2^5)^{4d} - 1 \equiv (-1)^{4d} - 1 \equiv 0 \pmod{11}$, z čoho $25^b + 25^c \equiv 0 \pmod{11}$. Z tabuľky zvyškov mocnín 25 (mod 11) však ľahko nahliadneme, že táto možnosť nenastáva nikdy (zvyšky sú cyklicky: 3, 9, 5, 4, 1). Preto v prípade $c \geqq 1$ rovnica nemá žiadne riešenie v $\mathbb{N}$.

3.5 *(Tamás Varga)* Priesečník výšok označme O (obr. 42). Teda $O = BB_1 \cap CC_1$, z čoho hneď vidíme, že body B, B_1, C, C_1, O ležia všetky v jednej rovine; označme ju $\varrho = \overleftrightarrow{BCO}$. Potom môžeme definovať bod Q ako $BC_1 \cap CB_1$, P ako $QO \cap BC$, N ako $B_1C_1 \cap QO$ a nech $M = A_1D_1 \cap \varrho$. Zrejme všetky spomínané body: B, C, B_1, C_1, O, Q, P, N, M ležia v rovine ϱ. Pre bod Q triviálne platí $Q = AD \cap \varrho$, teda body Q, O ležia v rovine $\pi = \overleftrightarrow{DOA}$. Body P, N ležia na priamke QO, teda aj v rovine π. Teda body A, D, A_1, D_1, O, Q, P, N, M ležia všetky v rovine π. Keďže body O, Q, P, N, M ležia aj v rovine ϱ aj v rovine π, musia ležať na jednej priamke. Ukážeme, že $BC \perp \pi$ (podobne $DA \perp \varrho$):



Obr. 42

$$\left.\begin{array}{l} DD_1 \perp \overleftrightarrow{ABC} \Longrightarrow \pi \perp \overleftrightarrow{ABC} \\ AA_1 \perp \overleftrightarrow{DBC} \Longrightarrow \pi \perp \overleftrightarrow{DBC} \end{array}\right\} \Longrightarrow BC \perp \pi.$$

Potom však musí platiť $\pi \perp \varrho$.

O je stred gule vpísanej štvorstenu $A_1B_1C_1D_1$. Označme K a L dotykové body tejto gule so stenami $C_1D_1A_1$ a $B_1D_1A_1$. Ukážeme, že body K, L ležia v rovine ϱ:

$$\left.\begin{array}{r} OK \perp \overleftrightarrow{C_1D_1A_1} \Longrightarrow OK \perp A_1D_1 \\ OL \perp \overleftrightarrow{B_1D_1C_1} \Longrightarrow OL \perp A_1D_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \overleftrightarrow{OKL} \perp A_1D_1.$$

Keďže však aj $\varrho \perp A_1D_1$ a $O \in \varrho$, musí byť $\overleftrightarrow{OKL} = \varrho$. Priamky C_1K, B_1L pretínajú A_1D_1 v bode M. Vzhľadom na to, že O je stred vpísanej gule, ľahko vidíme, že $\triangle OKM \cong \triangle OLM$, teda

$$|\sphericalangle OMC_1| = |\sphericalangle OMB_1| \tag{1}$$

Využijeme nasledovné tvrdenie (skúste si ho dokázať):

Nech trojuholník XYZ má výšky XX_1, YY_1 a ZZ_1, potom platí, že v trojuholníku $X_1Y_1Z_1$ sú pôvodné výšky osami uhlov.

V trojuholníku QBC sú CC_1, BB_1 a QP výšky ($CC_1 \perp \overleftrightarrow{ABD}$, $BB_1 \perp \overleftrightarrow{ACD}$, $BC \perp \pi$). Využijúc tvrdenie dostaneme

$$|\sphericalangle OPB_1| = |\sphericalangle OPC_1|. \tag{2}$$

Z (1) a (2) máme $\triangle MPC_1 \cong \triangle MPB_1$. Z toho $C_1B_1 \perp PQ$ a $|NC_1| = |NB_1|$, preto je $\triangle QB_1C_1$ rovnoramenný. BC, B_1C_1 sú kolmé na priamku QP, teda $BC \parallel B_1C_1 \Longrightarrow \Longrightarrow \triangle QB_1C_1 \sim \triangle QBC$. Teda $\triangle QBC$ je rovnoramenný. Preto $|QB| = |QC|$.

Keďže $\pi \perp \varrho$, sú $\sphericalangle BQD$, $\sphericalangle CQD$ pravé, a teda $\triangle BQD \cong \triangle CQD \Longrightarrow |BD| = |CD|$. Podobným spôsobom sa dá dokázať o každej dvojici strán so spoločným vrcholom, že sú zhodné, teda štvorsten $ABCD$ je pravidelný. A to sme chceli dokázať.

3.6 Úlohu trochu zovšeobecníme. Majme množinu kladných čísel $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Obdobne definujme súčty $S_i(\sigma)$ a súčin $Q(\sigma)$ pre všetky permutácie σ tejto množiny. Označme množinu permutácií, ktoré presúvajú prvý prvok na posledné miesto ako P_1, t.j. $\sigma \in P_1$ ak $\sigma(a_n) = a_1$. Obdobne môžeme zadefinovať P_k ako množiny (triedy) permutácií, ktoré na posledné miesto dajú k-ty prvok, teda $\sigma \in P_k \iff \sigma(a_n) = a_k$. Preto každá permutácia patrí práve do jednej z množín $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Teraz už môžeme vysloviť tvrdenie, ktoré nás napadne po manuálnom dosadení čísel a_i pre malé hodnoty n. A to, že platí:

$$\sum_\sigma \frac{1}{Q(\sigma)} = \frac{1}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Dokážeme toto tvrdenie indukciou vzhľadom na n.

1° $n = 1$: $\displaystyle\sum_\sigma \frac{1}{Q(\sigma)} = \frac{1}{a_1}$, lebo $\sigma(a_1) = a_1$ je jedinou permutáciou množiny $\{a_1\}$.

2° Nech naše tvrdenie platí pre všetky množiny s počtom prvkov $n - 1$, dokážeme jeho platnosť pre množiny s počtom prvkov n.

Počítajme:

$$\sum_{\sigma}\frac{1}{Q(\sigma)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in P_k}\frac{1}{Q(\sigma)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sigma\in P_k}\frac{1}{S_1(\sigma)\cdot\ldots\cdot S_{n-1}(\sigma)\cdot\sum a_i}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sum a_i}\cdot\sum_{\sigma\in P_k}\frac{1}{S_1(\sigma)\cdot\ldots\cdot S_{n-1}(\sigma)}\overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sum a_i}\cdot\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_n}=$$

$$=\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sum a_i}=\frac{1}{a_1\cdot\ldots\cdot a_n},$$

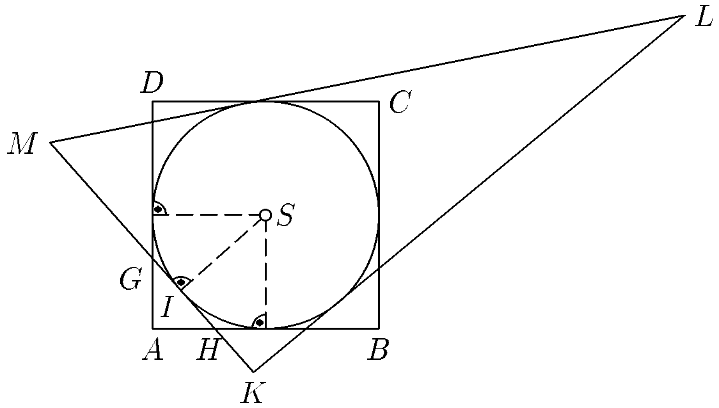
pričom rovnosť označená hviezdičkou vyplýva z indukčného predpokladu pre množiny $\{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n\}$. Permutácie v množine P_k istým spôsobom „pokrývajú“ všetky permutácie tejto $(n-1)$ prvkovej množiny. Totiž, ak σ' je permutácia množiny $\{a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n\}$, potom pre permutáciu $\sigma\in P_k$, $\sigma=\big(\sigma'(a_1),\sigma'(a_2),\ldots,\sigma'(a_{n-1}),a_k\big)$ dostávame: $S_1(\sigma')=S_1(\sigma)$, $S_2(\sigma')=S_2(\sigma)$, …, $S_{n-1}(\sigma')=S_{n-1}(\sigma)$, a teda $Q(\sigma')=S_1(\sigma)\cdot\ldots\cdot S_{n-1}(\sigma)$, z čoho už ľahko nahliadneme rovnosť označenú $(*)$.

Takto sme dokázali indukciou zovšeobecnené tvrdenie a pre náš špeciálny prípad dostávame: $\sum_{\sigma}\frac{1}{Q(\sigma)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2^{n-1}}=2^{-\binom{n}{2}}$.

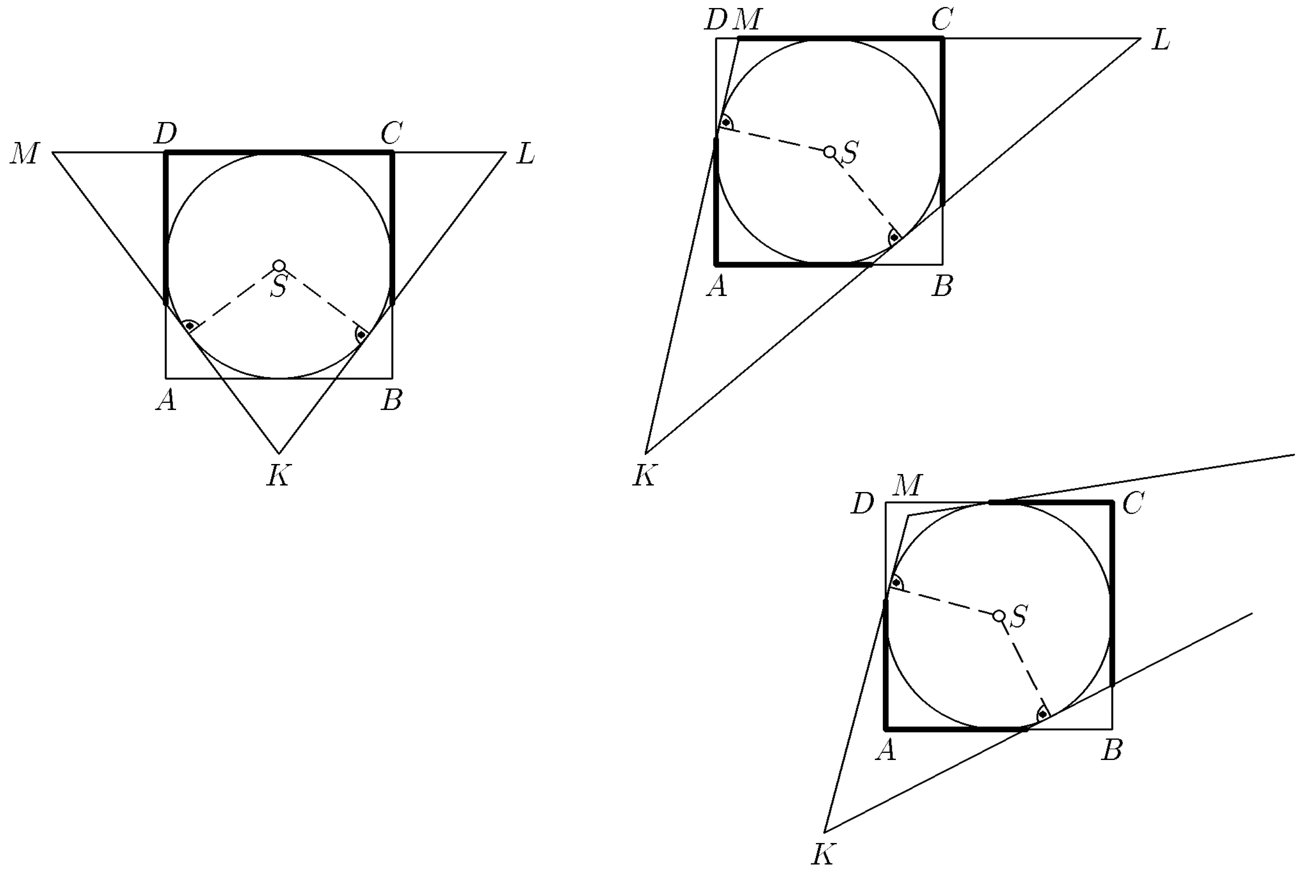
Štvrtá séria

4.1 Úlohu si rozdelíme na tri prípady:

1) niektorá strana trojuholníka leží na rovnakej priamke ako strana štvorca,
2) niektorý vrchol trojuholníka leží vnútri štvorca,
3) zvyšok.



Obr. 43



Obr. 44, Obr. 45, Obr. 46

1) a 2) Ako je vidieť z obr. 44 – 46, kde je zvýraznená časť obvodu štvorca vnútri trojuholníka, tvorí táto časť najmenej polovicu celého obvodu.

3) Bez ujmy na všeobecnosti nech daná situácia vyzerá ako na obr. 43.

Označme $ABCD$ štvorec so stranou dĺžky $2r$; S stred kružnice k s polomerom r; E, F po rade body dotyku strán AB a AD s kružnicou k; G, H priesečníky priamky MK so stranami AD a AB a I bod dotyku strany KM s kružnicou k.

Podľa vety Ssu sú trojuholníky SFG a SIG zhodné, podobne aj SEH a SIH sú zhodné. Platí teda

$$|FG| = |GI|, \qquad |IH| = |HE|.$$

Teraz sa pozrime na trojuholník AHG. Vďaka predchádzajúcim rovnostiam vidieť, že jeho obvod je rovný $2r$. Pretože GH je prepona trojuholníka AHG, je $|GH| > \frac{1}{3} \cdot 2r$, takže časť obvodu štvorca, ktorá neleží vnútri trojuholníka KLM, je najviac $\frac{2}{3} \cdot 2r$.

Úseky, keď sa strana trojuholníka dotýka kružnice vnútri štvorca, sú nanajvýš tri. To znamená, že časť obvodu štvorca $ABCD$, ktorá leží zvonku trojuholníka KLM, meria nanajvýš $4r$, čo je práve polovica jeho obvodu.

Tým je tvrdenie dokázané.

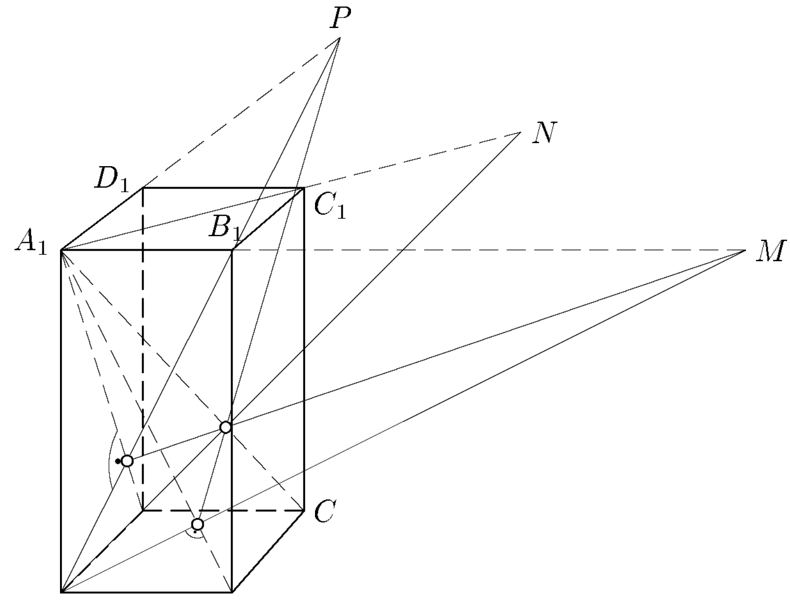
Úloha sa dala riešiť aj analyticky, kde sa dal dosiahnuť ešte lepší odhad $|HG|$. Mnohí z vás ale zabudli na prípad 2).

Prípady 1) a 2) možno ale charakterizovať lepšie: Ak daný trojuholník obsahuje dva z vrcholov opísaného štvorca, je tvrdenie úlohy triviálne.

4.2 *(Filip Krška)*

a)
$$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{A_1B} \wedge \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{A_1BC} \Rightarrow \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{A_1C},$$
$$\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{A_1D} \wedge \overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{CD} \Rightarrow \overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{A_1CD} \Rightarrow \overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{A_1C},$$

t.j. priamky AM, AP a AN ležia všetky v rovine prechádzajúcej bodom A a kolmej na uhlopriečku A_1C, preto body M, N, P ležia na priesečnici rovín $A_1B_1C_1$ a APM, čo je samozrejme priamka (obr. 47).



Obr. 47

b) Všetky body A, M, N, P, E, F ležia v rovine AMP (pozri a)). Označme V priesečník priamky A_1C s rovinou AMP (z predchádzajúceho už vieme, že je to päta z bodu A na priamku A_1C). Naviac body P, E ležia v rovine A_1BC a body F, M v rovine A_1CD, ich spoločný bod musí teda ležať v prieniku rovín A_1BC a A_1CD, čo je uhlopriečka A_1C, priesečníkom priamok PE a FM je teda bod V, ktorý leží na priamke AN.

Iné riešenie. *(Tomáš Bárta)*

a) Z podobnosti trojuholníkov vyplýva $\dfrac{|A_1M|}{|A_1A|} = \dfrac{|A_1A|}{|AB|}$. Obdobne, keď urobíme rez rovinami AA_1C, AA_1D, zistíme, že $\dfrac{|A_1N|}{|AA_1|} = \dfrac{|AA_1|}{|AC|}$ a $\dfrac{|A_1P|}{|AA_1|} = \dfrac{|AA_1|}{|AD|}$. Odtiaľ vyplýva, že
$$|AA_1|^2 = |A_1M| \cdot |AB| = |A_1N| \cdot |AC| = |A_1P| \cdot |AD|. \qquad (1)$$

Teda $\dfrac{|A_1M|}{|A_1N|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$, a pretože N leží na priamke A_1C_1, je $|\sphericalangle MA_1N| = |\sphericalangle BAC|$, takže trojuholníky MA_1N a CAB sú podobné (*sus*), čo znamená, že $|\sphericalangle A_1NM| = |\sphericalangle ABC| = 90°$. Obdobne $\dfrac{|A_1N|}{|A_1P|} = \dfrac{|AD|}{|AC|}$, takže aj trojuholníky PA_1N a CAD sú podobné a $|\sphericalangle A_1NP| = 90°$.

Uhol A_1NM je pravý a uhol A_1NP je pravý, teda uhol MNP je priamy a bod N leží na úsečke MP, čo bolo treba dokázať.

b) Využijeme *Cevovu vetu*, ktorá hovorí, že tri úsečky vedené z vrcholov trojuholníka na protiľahlé strany sa pretínajú v jednom bode vtedy a len vtedy, ak

$$\frac{|NM|}{|NP|} \cdot \frac{|PF|}{|FA|} \cdot \frac{|AE|}{|EM|} = 1.$$

Budeme vychádzať z podobnosti trojuholníkov A_1MN a ACB, takže

$$\frac{|A_1M|}{|AC|} = \frac{|A_1N|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|BC|} \quad \text{a} \quad |MN| = \frac{|BC| \cdot |A_1N|}{|AB|},$$

a z podobnosti trojuholníkov A_1PN a ACD, takže

$$\frac{|A_1P|}{|AC|} = \frac{|A_1N|}{|AD|} = \frac{|NP|}{|CD|} \quad \text{a} \quad |NP| = \frac{|CD| \cdot |A_1N|}{|AD|}.$$

Odtiaľ

$$\frac{|MN|}{|NP|} = \frac{\frac{|BC|}{|AB|}}{\frac{|CD|}{|AD|}} = \frac{|AD||BC|}{|AB||CD|} = \frac{|AD|^2}{|AB|^2};$$

ďalej zrejme platí

$$\frac{|EM|}{|A_1M|} = \frac{|AE|}{|AB|},$$

a podľa (1)

$$\frac{|EM|}{|AE|} = \frac{|A_1M|}{|AB|} = \frac{|AA_1|^2}{|AB|^2}.$$

Obdobne

$$\frac{|PF|}{|FA|} = \frac{|AA|^2}{|AD|^2}.$$

Celkovo teda dostávame

$$\frac{|EM|}{|AE|} \cdot \frac{|FA|}{|PF|} \cdot \frac{|NP|}{|NM|} = \frac{|AA_1|^2}{|AB|^2} \cdot \frac{|AD|^2}{|AA_1|^2} \cdot \frac{|AB|^2}{|AD|^2} = 1,$$

z čoho potom podľa *Cevovej vety* pre trojuholník AMP vyplýva, že úsečky PM, MF a AN prechádzajú jedným bodom.

4.3 Táto úloha je skúškou trpezlivosti riešiteľa, z prvých 40 členov postupnosti možno vytušiť istú štruktúru a správanie sa vyšetrovanej funkcie.

$$\begin{array}{llllll} f(1)=1, & f(5)=2, & f(9)=1, & f(13)=2, & f(17)=1, & f(21)=1,\\ f(2)=1, & f(6)=2, & f(10)=2, & f(14)=3, & f(18)=3, & f(22)=2,\\ f(3)=2, & f(7)=2, & f(11)=2, & f(15)=2, & f(19)=2, & f(23)=2,\\ f(4)=1, & f(8)=3, & f(12)=3, & f(16)=4, & f(20)=5, & f(24)=6,\end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f(25)=1, & f(29)=1, & f(33)=1, & f(37)=1,\\ f(26)=4, & f(30)=4, & f(34)=5, & f(38)=6,\\ f(27)=2, & f(31)=2, & f(35)=2, & f(39)=2,\\ f(28)=7, & f(32)=8, & f(36)=9, & f(40)=10.\end{array}$$

Všimnime si, že pre $k \geqq 7$ by mohlo platiť: $f(4k)=k$, $f(4k+1)=1$, $f(4k+2)=k-3$, $f(4k+3)=2$. Dokážeme toto tvrdenie matematickou indukciou.

Prvý indukčný krok vyplýva z vyššie uvedenej tabuľky (aj s predpokladmi, ktoré uvedieme v druhom kroku).

Majme indukčný predpoklad: Pre $7 \leqq l < k$ platí $f(4l)=l$, $f(4l+1)=1$, $f(4l+2)=l-3$, $f(4l+3)=2$, funkčná hodnota väčšia ako k sa doteraz ešte nenadobudla a hodnoty $k-3$, $k-2$ a $k-1$ sa nadobudli práve raz. Potom

• $f(4k)=k$: Postupnosť $3, 7, \dots, 4k-1$ je aritmetická dĺžky k a jej funkčné hodnoty sú podľa indukčného predpokladu 2. Zrejme žiadna menšia diferencia nevytvára dlhšiu aritmetickú postupnosť. Preto $f(4k)=k$.

• $f(4k+1)=1$: Z poslednej časti indukčného predpokladu priamo vyplýva, že $f(4k+1)=1$.

• $f(4k+2)=k-3$: Postupnosť $17, 21, 25, \dots, 4k+1$ je aritmetická dĺžky $k-3$ a jej funkčné hodnoty sú podľa indukčného predpokladu 1. Diferencia, ktorá by mohla vytvárať postupnosť väčšej dĺžky ako 1 je jedine $d=8$. Pre $k \geqq 7$ však takto evidentne nedostaneme dlhšiu aritmetickú postupnosť.

• $f(4k+3)=2$: Z poslednej časti indukčného predpokladu vyplýva, že $f(4k+3)=2$.

Zostávajúca časť predpokladov: Vidíme, že pre $x \leqq 4k+3$ je $f(x) < k+1$ a funkčné hodnoty $k-2, k-1, k$ sa nadobudli práve raz.

Takto sme indukciou dokázali naše tvrdenie. Z toho už vyplýva riešenie úlohy:

$$a=4,\ b=8; \qquad f(4n+8)=n+2.$$

4.4 Pre každých dvoch matematikov označme n počet tých, ktorí oboch pozdravili. Všimnime si konkrétne matematika $\mathcal{A}$. Nech B je množina matematikov, ktorí sa pozdravili s $\mathcal{A}$ a C množina tých, ktorí sa s ním nepozdravili. Potom má B práve $3k+6$ a C práve $9k-7$ prvkov. Pre ľubovoľného matematika $\mathcal{B}$ z B sú matematici, ktorí sa pozdravili aj s $\mathcal{A}$, aj s $\mathcal{B}$ všetci v B. Preto sa $\mathcal{B}$ pozdravil práve s n matematikmi z B

a $3k+5-n$ z C. Pre každého $\mathcal{C}$ z C musia tiež byť matematici, ktorí sa pozdravili aj s $\mathcal{A}$, aj s $\mathcal{C}$ v množine B. Preto sa $\mathcal{C}$ pozdravil práve s n matematikmi z B.

Celkový počet vzájomných pozdravov medzi matematikmi z B a C možno potom dvojako vyjadriť ako

$$(3k+6)(3k+5-n) = (9k-7)n,$$

čo možno upraviť na $9k^2 - 12kn + 33k + n + 30 = 0$. Z toho vyplýva, že $n = 3m$ pre nejaké prirodzené m a $4m = k+3+\dfrac{9k+43}{12k-1}$. Ak $k \geqq 15$, potom $12k-1 > 9k+43$, a teda $4m$ nemôže byť celé číslo. Pre $1 \leqq k \leqq 14$ len $k = 3$ dáva celočíselnú hodnotu výrazu $\dfrac{9k+43}{12k-1}$. Preto sa na zjazde stretlo 36 matematikov.

To ale ešte neznamená, že taký graf pre $k = 3$ naozaj existuje. To je však veľmi náročná úloha a my vieme len toľko, že neexistuje žiaden graf požadovaných vlastností, ktorý by bol symetrický pri otočení o 10 stupňov (ak si predstavíme tých 36 vrcholov ako vrcholy pravidelného 36-uholníka).

4.5 *(Daniel Pártoš, Vladimír Marko)* Najprv matematickou indukciou dokážeme, že pre každé prirodzené k existuje prirodzené číslo a_k, pre ktoré platí $a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$.

1° Poľahky vidíme, že $a_k = 1$ vyhovuje podmienke pre $k \leqq 3$.

2° Ak $a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^k}$ pre nejaké $k > 3$, potom pre hodnotu a_k^2 modulo 2^{k+1} sú dve možnosti:

$$a_k^2 \equiv -7 \pmod{2^{k+1}} \qquad \text{alebo} \qquad a_k^2 \equiv 2^k - 7 \pmod{2^{k+1}}.$$

V prvom prípade položme $a_{k+1} = a_k$. V druhom prípade položme $a_{k+1} = a_k + 2^{k-1}$. Potom ($k \geqq 3$) je a_k nepárne a podľa indukčného predpokladu

$$a_{k+1} = a_k^2 + 2^k a_k + 2^{2k-2} \equiv a_k^2 + 2^k a_k \equiv a_k^2 + 2^k \equiv -7 \pmod{2^{k+1}}.$$

Teraz ešte dokážeme, že pre každé n existuje nekonečne veľa takýchto a_k. Naozaj, stačí zobrať jedno a_k, a potom zrejme aj pre čísla $a_k + t2^k$ platí

$$(a_k + t2^k)^2 \equiv -7 \pmod{2^k}.$$

Iné riešenie. *(Tamás Varga)* Stačí dokázať nasledujúce tri tvrdenia:

i) Ak existuje pre dané k jedno také a_k, pre ktoré $a_k^2 = n2^k - 7$, potom ich existuje nekonečne veľa.

ii) Ak pre dané k_0 existuje jedno také a_k, pre ktoré $a_{k_0}^2 = n2^{k_0} - 7$, potom existuje pre každé $k \leqq k_0$ také, že $a_k^2 = n2^k - 7$.

iii) Ak existuje pre dané $k+1$ vhodné a_{k+1}, potom existuje aj pre $2k$ vhodné a_{2k}.

Tvrdenie i) je dokázané v prvom riešení, tvrdenie ii) je triviálne, stačí voliť $a_k = a_{k_0}$. No a napokon treba dokázať tvrdenie iii). Označme $a_{k+1} = x$. Potom podľa predpokladu $x^2 = n2^{k+1} - 7$. Po pripočítaní vhodných výrazov na obe strany dostaneme

$$c^2 2^{2k} + 2\cdot 2^k(p2^{k-1} - n) + x^2 = (p + c^2)2^{2k} - 7. \tag{1}$$

Čísla p a c sú zatiaľ ľubovoľné. Keďže sú čísla x a 2^{k-1} zrejme nesúdeliteľné, existujú pre ne celé čísla C a P, pre ktoré platí $P \cdot 2^{k-1} - C \cdot x = 1$. Zvoľme teraz $p = Pn$ a $c = Cn$. Potom zrejme máme $p2^{k-1} - n = cx$, čo po dosadení do (1) dáva

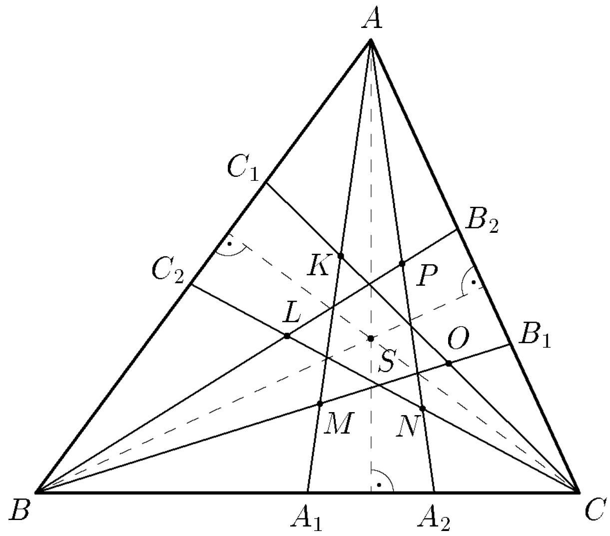
$$c^2 \cdot 2^{2k} + 2 \cdot 2^k cx + x^2 = (p + c^2)2^{2k} - 7,$$
$$(c2^k + x)^2 = (p + c^2)2^{2k} - 7.$$

Takto sme pre dané $2k$ našli $a_{2k} = c2^k + x$.

Na záver si uvedomme, že tvrdenie platí pre $k = 1, 2, 3$. Potom $k + 1 < 2k$, preto neexistuje najväčšie také k, pre ktoré by existovalo a_k.

4.6 *(Balázs Keszegh)*

Označme $K = AA_1 \cap CC_1$,
$L = BB_2 \cap CC_2$,
$M = AA_1 \cap BB_1$,
$N = AA_2 \cap CC_2$,
$O = BB_1 \cap CC_1$,
$P = AA_2 \cap BB_2$.



Obr. 48

Využijeme podobnosť vhodných trojuholníkov (obr. 48): $\triangle AC_1K \sim \triangle AA_1B$, lebo $|\sphericalangle C_1AK| = |\sphericalangle A_1AB|$ a $|\sphericalangle AC_1K| = 180° - |\sphericalangle CC_1C_2| = 180° - |\sphericalangle AA_1A_2| = |\sphericalangle AA_1B|$.
$\triangle AA_1B \sim \triangle CC_2B$, lebo $|\sphericalangle ABA_1| = |\sphericalangle CBC_2|$ a $|\sphericalangle AA_1B| = 180° - |\sphericalangle AA_1A_2| = 180° - |\sphericalangle CC_2C_1| = |\sphericalangle CC_2B|$.
Teda $\triangle AC_1K \sim \triangle CC_2B \Longrightarrow \dfrac{|C_1K|}{|C_1A|} = \dfrac{|C_2B|}{|C_2C|}$.
Analogicky $\triangle BC_2L \sim \triangle BB_2A \sim \triangle CC_1A \Longrightarrow \dfrac{|C_2L|}{|C_2B|} = \dfrac{|C_1A|}{|C_1C|}$. Zrejme $|C_1C| = |C_2C|$. Z toho máme $|C_1K| = \dfrac{|C_2B|.|C_1A|}{|C_2C|} = \dfrac{|C_1A|.|C_2B|}{|C_1C|} = |C_2L|$. (1)
Rovnako môžeme ukázať, že $|B_1O| = |B_2P|$.
Z rovnosti (1) a z faktu, že $\triangle CC_1C_2$ je rovnoramenný ľahko nahliadneme, že $KL \parallel AB$, z čoho vyplýva, že $|\sphericalangle PLK| = |\sphericalangle B_2BA|$. Podobne $OP \parallel AC$ a $|\sphericalangle POK| = |\sphericalangle ACC_1|$. Zrejme $\triangle ABB_2 \sim \triangle ACC_1$ (uu), z čoho $|\sphericalangle B_2BA| = |\sphericalangle ACC_1|$. Preto $|\sphericalangle PLK| = |\sphericalangle POK|$ a body O, P, K a L ležia na kružnici. Jej stred je priesečník osí úsečiek KL a OP, čo je priesečník výšok V trojuholníka ABC.

Analogicky sa dá dokázať, že body K, L, M a N ležia na kružnici so stredom V. Z toho ale už dostávame, že všetkých 6 bodov K, L, M, N, O, P leží na jednej kružnici so stredom V.

4.7 Označme dané rovnice sústavy postupne (1), (2). Pri riešení našej sústavy rovníc budeme rozlišovať tri prípady:

i) aspoň jedno z čísel x, y, z je rovné nule;
ii) $x, y, z \neq 0$ a aspoň jedno z čísel x, y, z je záporné;
iii) všetky čísla x, y, z sú kladné.

i) *(Eugen Kováč)* Nech napríklad z=0, potom dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych

$$x + y = a + b + c,$$
$$a^2x + b^2y + abc = 0.$$

Dosadením za y dostávame

$$a^2x + b^2(a + b + c) - b^2x + abc = 0,$$
$$x(a^2 - b^2) = b^2(a + b + c) + abc.$$

Ak $a = b$, nemá naša rovnica riešenie (parametre a, b, c sú kladné čísla). Ak $a \neq b$, riešením je trojica

$$(x, y, z) = \left(\frac{b^2(a + b + c) + abc}{b^2 - a^2}; \frac{a^2(a + b + c) + abc}{a^2 - b^2}; 0\right).$$

Cyklickou zámenou opäť dostávame riešenia pre $x = 0$, resp. $y = 0$.

ii) *(Peter Kozák)* Vzhľadom k symetrii predpokladajme, že $x < 0$. Upravujme druhú zo zadaných rovníc:

$$4xyz - (a^2x + b^2y + c^2z) = abc,$$
$$4xyz - \big(b^2(x + y + z) + (a^2 - b^2)x + (c^2 - b^2)z\big) = abc.$$

Pretože $x + y + z = a + b + c$, dostávame:

$$4xyz - \big((a^2 - b^2)x + (c^2 - b^2)z\big) = abc + (a + b + c)b^2.$$

Položme $S = a + b + c$. Z rovnice (1) potom $y = S - (x + z)$, teda

$$4xz\,[S - (x + z)] - (a^2 - b^2)x - (c^2 - b^2)z = abc + Sb^2,$$
$$4xzS - 4x^2z - 4xz^2 - (a^2 - b^2)x - (c^2 - b^2)z = abc + Sb^2,$$
$$4xz^2 + z\left(c^2 - b^2 + 4x^2 - 4xS\right) + (a^2 - b^2)x + abc + Sb^2 = 0. \tag{3}$$

Kvadratická rovnica (3) s neznámou z má diskriminant

$$D = \left(c^2 - b^2 + 4x^2 - 4xS\right)^2 - 16x\left[(a^2 - b^2)x + abc + Sb^2\right] =$$
$$= (c^2 - b^2)^2 + 16x^4 + 16x^2S^2 + 8x^2(c^2 - b^2) - 8xS(c^2 - b^2) -$$
$$-32x^3S - 16x^2a^2 + 16x^2b^2 - 16xabc - 16xSb^2.$$

Ďalej ukážeme, že pre $x < 0$ je tento diskriminant vždy kladný. Označme preto

$$\begin{aligned} D &= V_1 + V_2 + V_3, \quad \text{kde} \\ V_1 &= (c^2 - b^2)^2 + 16x^4 - 32x^3 S, \\ V_2 &= 16x^2 S^2 + 8x^2(c^2 - b^2) - 16x^2 a^2 + 16x^2 b^2, \\ V_3 &= -8xS(c^2 - b^2) - 16xabc - 16xSb^2. \end{aligned}$$

Pre $x < 0$ je V_1 zjavne kladné. V_2 možno upraviť na tvar

$$V_2 = 8x^2\left(2S^2 + c^2 - b^2 - 2a^2 + 2b^2\right) = 8x^2\left[2(b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + b^2 + c^2\right],$$

kde vďaka kladnosti parametrov a, b, c je výraz v zátvorke kladný. Preto aj $V_2 > 0$. A nakoniec

$$V_3 = -8x\left[S(c^2 - b^2) + 2abc + 2Sb^2\right] = -8x(Sc^2 + Sb^2 + 2abc),$$

kde výraz v zátvorke je opäť kladný a $x < 0$, teda $V_3 > 0$, čiže aj $D > 0$. Rovnica (3) má teda dva reálne korene z_1, z_2 a pre našu sústavu rovníc dostávame parametrické vyjadrenie riešení pomocou parametra $x < 0$:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &= \left(x < 0; \frac{c^2 - b^2 - 4x^2 + 4xS - \sqrt{D}}{8x}; \frac{-c^2 + b^2 - 4x^2 + 4xS + \sqrt{D}}{8x}\right), \\ (x_2, y_2, z_2) &= \left(x < 0; \frac{c^2 - b^2 - 4x^2 + 4xS + \sqrt{D}}{8x}; \frac{-c^2 + b^2 - 4x^2 + 4xS - \sqrt{D}}{8x}\right). \end{aligned}$$

Cyklickou zámenou dostaneme parametrické vyjadrenia riešení pre predpoklady $y < 0$, resp. $z < 0$.

iii) Konečne sa dostávame k zaujímavejšej časti tejto úlohy. Nech teda x, y, z sú kladné reálne čísla. Rovnicu (2) možno zapísať v tvare

$$4 = \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz}.$$

Zaveďme substitúciu $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}$, $y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}}$, $z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$. Potom $4 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1 y_1 z_1$, kde $0 < x_1 < 2$; $0 < y_1 < 2$; $0 < z_1 < 2$. Pri riešení poslednej z rovníc ako kvadratickej s premennou z_1 dostávame diskriminant $D = (4 - x_1^2)(4 - y_1^2)$, ktorý nabáda k substitúcii

$$x_1 = 2\sin u, \quad 0 < u < \frac{\pi}{2}; \qquad y_1 = 2\sin v, \quad 0 < v < \frac{\pi}{2}.$$

Teraz dostávame

$$4 = 4\sin^2 u + \sin^2 v + z_1^2 + 4\sin u \cdot \sin v \cdot z_1.$$

Teda $(z_1 + 2\sin u \cdot \sin v)^2 = 4(1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 v)$, čiže

$$|z_1 + 2\sin u \cdot \sin v| = |2\cos u \cdot \cos v|.$$

Pretože $\sin u$, $\sin v$, $\cos u$, $\cos v$ aj z_1 sú kladné čísla, môžeme odstrániť absolútne hodnoty a dostávame

$$z_1 = 2(\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v) = 2\cos(u + v).$$

Teda

$$2\sin u \cdot \sqrt{yz} = a, \quad 2\sin v \cdot \sqrt{zx} = b, \quad 2(\cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v)\sqrt{xy} = c.$$

Z rovnice (1) potom dostávame

$$(\sqrt{x}\cos v - \sqrt{y}\cos u)^2 + (\sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u - \sqrt{z})^2 = 0,$$

odkiaľ

$$\sqrt{z} = \sqrt{x}\sin v + \sqrt{y}\sin u = \sqrt{x} \cdot \frac{y_1}{2} + \sqrt{y} \cdot \frac{x_1}{2}.$$

Preto $\sqrt{z} = \sqrt{x} \cdot \dfrac{b}{2\sqrt{zx}} + \sqrt{y} \cdot \dfrac{a}{2\sqrt{yz}}$, teda $z = \frac{a+b}{2}$. Podobne $y = \frac{c+a}{2}$, $x = \frac{b+c}{2}$. Trojica $(x, y, z) = \left(\dfrac{b+c}{2}; \dfrac{c+a}{2}; \dfrac{a+b}{2}\right)$ však zjavne rieši zadanú sústavu rovníc.

Piata séria

5.1 Z poslednej podmienky vyplýva, že rovnica $f(x) = x$ má nanajvýš 3 riešenia, jedno v intervale $(-1, 0)$, jedno rovné 0 a jedno v intervale $(0, \infty)$. Predpokladajme, že $f(u) = u$ pre nejaké u z intervalu $(-1, 0)$. Položením $x = y = u$ do danej funkcionálnej rovnice dostávame $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$. Naviac, $u^2 + 2u$ je opäť z intervalu $(-1, 0)$. Preto musí byť $u^2 + 2u = u$, táto rovnica však nemá v intervale $(-1, 0)$ riešenie. Predpoklad $f(v) = v$ pre $v \in (0, \infty)$ vedie k obdobnému sporu. Avšak $f(x+(1+x)f(x)) = x+(1+x)f(x)$ pre všetky $x \in \mathcal{S}$. Preto $x+(1+x)f(x) = 0$, čiže $f(x) = -\dfrac{x}{1+x}$. Ešte dokážeme, že táto funkcia spĺňa všetky zadané podmienky. Funkcia $\dfrac{f(x)}{x}$ je evidentne rastúca na celom $\mathcal{S}$. Dosadením sa ľahko presvedčíme o tom, že spĺňa aj danú funkcionálnu rovnicu.

5.2 Najprv zaveďme v rovine kartézsky súradnicový systém. Definujme množiny S_n podľa nasledujúcich rekurzívnych podmienok. Nech $S_2 = \{(0,0), (1,1)\}$. Pre $n \geqq 2$, vyberme M_n dostatočne veľké, aby

$$\frac{y_i + M_n - y_j}{x_i + 2^{n-1} - x_j} > \frac{y_k - y_l}{x_k - x_l} \tag{1}$$

pre všetky (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k) a (x_l, y_l) z S_n. Teraz nech

$$T_n = S_n \oplus (2^{n-1}, M_n) = \{(x + 2^{n+1}, y + M_n) | (x, y) \in S_n\}$$

a $S_{n+1} = S_n \cup T_n$. Množina S_n potom obsahuje práve 2^{n-1} bodov. (Týmto postupom sme vytvorili hľadanú množinu bodov, ak nerozumiete celému postupu, skúste si ho previesť pre $n = 2, 3$. Zložitá nerovnosť (1) zachraňuje nekonvexnosť jednotlivých štvoruholníkov.)

Predpokladajme, že existuje najmenšie $n \geqq 2$ také, že S_n obsahuje tri body ležiace na jednej priamke – P_1, P_2, P_3. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať (vďaka minimalite), že $P_1 \in S_{n-1}$ a $P_3 \in T_{n-1}$. Ak P_2 je z S_{n-1}, potom z nerovnosti (1) vyplýva, že smernica priamky P_2P_3 prevyšuje smernicu priamky P_1P_2. Opačná nerovnosť platí, ak je P_2 z T_{n-1}. V oboch prípadoch teda body P_1, P_2 a P_3 nemôžu byť kolineárne.

Teraz predpokladajme, že existuje najmenšie také $n \geqq 2$, pre ktoré S_n obsahuje vrcholy konvexného $2n$-uholníka. Nakreslime v ňom uhlopriečku d spájajúcu vrchol s najmenšou x-ovou súradnicou s vrcholom s najväčšou x-ovou súradnicou, týmto rozdelíme $2n$-uholník na dva konvexné útvary. Z *Dirichletovho princípu* vyplýva, že aspoň jeden z nich má $n + 1$ strán.

Rozoberme najprv prípad, keď tento útvar leží pod uhlopriečkou d. Potom má aspoň $n + 1$ vrcholov $P_i(x_i, y_i)$, $0 \leqq i \leqq n$, pre ktoré $x_{i-1} < x_i$ pre $1 \leqq i \leqq n$. Všimnime si tiež, že platí: $\dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} < \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ pre $1 \leqq i \leqq n - 1$. Všetky P_i, $0 \leqq$ $\leqq i \leqq n - 1$, patria do S_{n-1}. Predpokladajme opak, nech P_{k-1} je z S_{n-1}, kým P_k a P_{k+1} sú z T_{n-1} pre nejaké k, $1 \leqq k \leqq n-1$. Potom $(x_k, y_k) = (x'_k + 2^{n-2}, y'_k + M_{n-1})$ a $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x'_{k+1} + 2^{n-2}, y'_{k+1} + M_{n-1})$ pre nejaké (x'_k, y'_k) a (x'_{k+1}, y'_{k+1}) z S_{n-1}. Z definície M_{n-1} však

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y'_k + M_{n-1} - y_{k-1}}{x'_k + 2^{n-2} - x_{k-1}} > \frac{y'_{k+1} - y'_k}{x'_{k+1} - x'_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k},$$

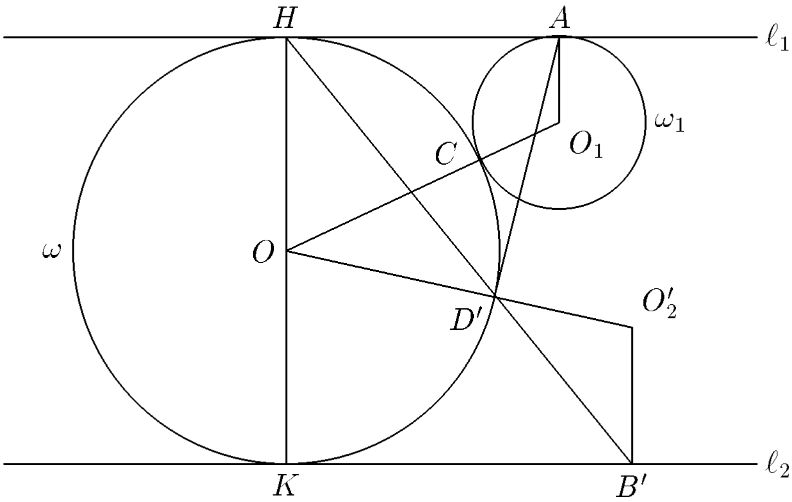
čo je spor s výberom P_i. Preto všetky P_i patria do S_{n-1} pre $0 \leqq i \leqq n - 1$.

Opakovaním tohoto argumentu máme P_i v množine S_2 pre $0 \leqq i \leqq 2$. Avšak S_2 má len 2 body, spor.

Ak leží konvexný aspoň $(n + 1)$-uholník nad uhlopriečkou d, použitím rovnakých argumentov dôjdeme k sporu.

5.3 Dokážeme, že AD je spoločná dotyčnica ku kružniciam ω a ω_2 (obr. 49). Označme po rade O a O_1 stredy a r a r_1 polomery kružníc ω a ω_1. Nech sa ω dotýka ℓ_1 v bode H a ℓ_2 v bode K. Uvažujme druhú dotyčnicu z bodu A ku kružnici ω, ktorá sa jej dotýka v bode D'. Predĺžme HD' tak, aby pretínala ℓ_2 v bode B'. Bodom B' veďme priamku kolmú k ℓ_2, ktorá pretína priamku OD' v bode O'_2. Potom O'_2B' a HO sú rovnobežky, pretože $|\sphericalangle O'_2B'D'| = |\sphericalangle OHD'| = |\sphericalangle OD'H| = |\sphericalangle O'_2D'B'|$. Preto $|O'_2B'| = |O'_2D'| =$ $= r'_2$. Potom je O'_2 stredom kružnice ω'_2 s polomerom r'_2, dotýkajúcej sa ω zvonku v bode D' s ℓ_2 v bode B'.

Teraz ešte dokážeme, že ω_2' sa dotýka zvonku aj kružnice ω_1, čiže $\omega_2' = \omega_2$. Položme $x = |HA|$ a $y = |KB'|$. Keďže HB' a OA sú navzájom kolmé, trojuholníky OHA a $B'KH$ sú podobné. Preto $\dfrac{|OH|}{|HA|} = \dfrac{|KB'|}{|HK|}$, t.j. $xy = 2r^2$. Lenže $|OO_1| = r + r_1$, Potom $x^2 = (r+r_1)^2 - (r-r_1)^2 = 4rr_1$. Podobne $y^2 = 4rr_2'$. Z toho ďalej $|O_2'O_1|^2 = (x-y)^2 + (2r - r_1 - r_2')^2 = (r_1 + r_2')^2$, čo dokazuje tvrdenie v úvode. Obdobne BC je spoločná dotyčnica ku kružniciam ω a ω_1.



Obr. 49

Platí $|QC| = |QD|$. Hľadaný záver $|QC| = |QD| = |QE|$ už teraz vyplýva z toho, že QE je spoločná dotyčnica ω_1 a ω_2. Ak by to totiž neplatilo, označme prienik QE s ω_1 ako X a s ω_2 ako Y. Keďže E leží medzi X a Y, potom $|QX| \neq |QY|$. To je ale spor, pretože $|QX| \cdot |QE| = |QC|^2 = |QD|^2 = |QY| \cdot |QE|$.

5.4 Nech $p = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Najprv dokážeme, že $D = \sqrt{2p} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ je nenulové pre ľubovoľné prirodzené čísla x a y. Inak by $2p = x + y + 2\sqrt{xy}$, čiže číslo xy je štvorec. Preto ak b^2 je najväčšia druhá mocnina deliaca x a c^2 najväčšia deliaca y a $x = ab^2$, potom $y = ac^2$ a $b + c \geqq 2$. Potom $2p = a(b+c)^2$, to je však spor, pretože $2p$ nie je deliteľné žiadnym štvorcom väčším ako 1. Teraz

$$D = \frac{2p - (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{2p} + \sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(2p - x - y)^2 - 4xy}{(\sqrt{2p} + \sqrt{x} + \sqrt{y})(2p - x - y + 2\sqrt{xy})}.$$

Čitateľ je prirodzené číslo, ak je väčšie ako 1, potom

$$D \geqq \frac{2}{(\sqrt{4n+2} + \sqrt{x} + \sqrt{y})(4n + 2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2)},$$

$$D > \frac{2}{2\sqrt{4n+2}(4n+2)} = \frac{1}{(4n+2)^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{16n^{\frac{3}{2}}},$$

pretože $4n+2 \leqq 6n \leqq 16^{\frac{3}{2}}n$. Ak je čitateľ rovný 1, potom $(2p-x-y)^2 = 4xy+1$. Teda $2p-x-y = 2m+1$ pre nejaké prirodzené číslo m. Označme ďalej d najväčší spoločný násobok čísel m a x a nech $m = dh$ a $x = dk$, pre h, k nesúdeliteľné prirodzené čísla. Nech g je najväčší spoločný násobok čísel $m+1$ a y. Potom $m+1 = gk$ a $y = gh$. Teda $2p = x+y+m+m+1 = (d+g)(h+k)$. Keďže p je prvočíslo, musí platiť buď $d = g = 1$, alebo $h = k = 1$. V prvom prípade $x = k = m+1$, kým $y = h = m$, čo je spor s predpokladom $x \leqq y$. V druhom prípade $x = d = m$ a $y = g = m+1$. Potom $2p = x+y+2m+1$, čiže $p = 2m+1$. Z toho vyplýva $m = n$. Napokon

$$D = \frac{1}{(\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})},$$

$$D < \frac{1}{(\sqrt{4n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})(2n+2\sqrt{n\cdot n})} = \frac{1}{16n^{\frac{3}{2}}}.$$

Preto minimálna kladná hodnota D sa dosahuje len v prípade $(x,y) = \left(\dfrac{p-1}{2}, \dfrac{p+1}{2}\right)$.

Iné riešenie. *(Tamás Varga)* Dokážeme, že riešením je vždy dvojica $\left(\dfrac{p-1}{2}, \dfrac{p+1}{2}\right)$. Stačí ukázať, že pre akúkoľvek inú dvojicu čísel je výraz D väčší. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje dvojica prirodzených čísel (x,y) taká, že

$$\begin{aligned} \sqrt{2p} \geqq{} & \quad \sqrt{x}+\sqrt{y} > \sqrt{\frac{p+1}{2}}+\sqrt{\frac{p-1}{2}},\\ 2p \geqq{} & \; x+y+2\sqrt{xy} > p+\sqrt{p^2-1},\\ 2p-x-y \geqq{} & \quad 2\sqrt{xy} > p+\sqrt{p^2-1}-x-y. \end{aligned}$$

Po opätovnom umocnení a jednoduchých úpravách dostávame nerovnosť

$$4p(x+y-p) \leqq (x-y)^2 < 2(p+\sqrt{p^2-1})(x+y-p)+1.$$

Zavedením substitúcie $q = x+y-p$, $q \in \mathbb{N}$, $q < p$ dostávame nerovnosť

$$4pq \leqq (x-y)^2 < 2(p+\sqrt{p^2-1})q+1 < 4pq+1,$$

z čoho potom $4pq = (x-y)^2$. To je však spor, pretože $q < p$ a p je prvočíslo.

Iné riešenie. *(Ivan Cimrák)* Najprv podobne ako v prvom riešení vylúčime prípad $D = 0$. Teraz skúmajme priebeh funkcie $\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{s-x}$ pre pevné s ako funkciu premennej x. Na intervale $(0,s)$ je táto funkcia konvexná a symetrická podľa osi $x = \frac{s}{2}$ (jej graf je súčtom dvoch parabol). Táto funkcia má minimum v bode $\frac{s}{2}$. Preto nám teraz stačí zistiť, aké maximálne hodnoty môže nadobúdať s v prípadoch $x = \frac{s}{2}$, $x = \frac{s-1}{2}$, $x = \frac{s-2}{2}$ a tieto hodnoty porovnať. Prichádzame opäť k rovnakému záveru ako v predchádzajúcich riešeniach.

5.5 *(Eugen Kováč, Tamás Varga)* Všetky sumy použité v tomto riešení sú pre $i = 1, 2, 3, 4$. Označme O stred a R polomer guľovej plochy opísanej štvorstenu $A_1A_2A_3A_4$. Z mocnosti bodu G k tejto guli vyplýva $|GA_i| \cdot |GA_i'| = R^2 - |OG|^2$, pre $i = 1, 2, 3, 4$. Teda dokazované nerovnosti sú ekvivalentné s

$$(R^2 - |OG|^2)^2 \geqq |GA_1| \cdot |GA_2| \cdot |GA_3| \cdot |GA_4| \tag{1}$$

$$(R^2 - |OG|^2) \sum \frac{1}{|GA_i|} \geqq \sum |GA_i|. \tag{2}$$

Ale (1) vyplýva okamžite z

$$4(R^2 - |OG|^2) = \sum |GA_i|^2 \tag{3}$$

použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Na dôkaz (3) označme $\overrightarrow{P}$ vektor z bodu O do bodu P. Teraz použijeme rovnosť vektorov $\overrightarrow{A}_i = \overrightarrow{G} + (\overrightarrow{A}_i - \overrightarrow{G})$. Potom

$$\sum |\overrightarrow{A}_i|^2 = \sum |\overrightarrow{G}|^2 + \sum |\overrightarrow{A}_i - \overrightarrow{G}|^2 + 2\overrightarrow{G} \cdot \sum (\overrightarrow{A}_i - \overrightarrow{G}). \tag{4}$$

To je už ekvivalentné s (3), pretože posledný člen (4) je nulový (G je ťažisko). Z *Cauchyho nerovnosti* potom poľahky dostávame:

$$4 \sum |GA_i|^2 \geqq \left(\sum |GA_i| \right)^2 \qquad \text{a} \qquad \sum |GA_i| \sum \frac{1}{|GA_i|} \geqq 16,$$

čo vedie k

$$\frac{1}{4} \sum |GA_i|^2 \sum \frac{1}{|GA_i|} \geqq \frac{1}{16} \left(\sum |GA_i|^2 \right)^2 \sum \frac{1}{|GA_i|} \geqq \sum |GA_i|.$$

Preto aj (2) vyplýva z (3).

5.6 Tvrdenie dokážeme pre c ľubovoľné celé číslo. Všimnime si, že tvrdenie platí pre (a, b, c) práve vtedy, keď platí pre $(a, b, -c)$. Preto môžeme predpokladať $c \geqq 0$. Keďže je problém symetrický vzhľadom na a, b, môžeme predpokladať, že $a \geqq b$.

Ďalej si všimnime, že tvrdenie poľahky platí, keď $c \leqq b$. Môžeme totiž zvoliť vektory $\overrightarrow{x}$ a $\overrightarrow{y}$ s jednotkami na prvých c miestach a s nulami alebo jednotkami na ďalších miestach (podľa potreby, tak aby na tom istom mieste nebola zároveň jednotka aj v $\overrightarrow{x}$ aj v $\overrightarrow{y}$). Preto stačí tvrdenie dokázať len v prípade $a > c > b$.

Tvrdenie dokážeme indukciou vzhľadom na súčet $a+b$. Ak $a+b = 0$, tvrdenie triviálne platí. Predpokladajme preto, že platí ak $a + b \leqq N$. Pre $a + b = N + 1$ platí $a + b - 2c + b < a + b$ a na trojicu $(a + b - 2c, b, c - b)$ môžeme použiť indukčný predpoklad, čiže existujú vektory $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ pre trojicu $(a+b-2c, b, c-b)$. Poľahky overíme, že $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{y}$ je riešenie (a, b, c).

5.7 Z definícií $p(x)$ a $q(x)$ je zrejmé, že $q(x)$ delí x pre každé x a

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{q(x_n)} \cdot p(x_n)$$

je prirodzené číslo pre každé n. Indukciou sa ľahko presvedčíme, že x_n nie je deliteľné žiadnym štvorcom väčším ako 1. Teda mu môžeme priradiť jedinečný kód na základe jeho prvočíselných deliteľov. Označme preto $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $\ldots$ rastúcu postupnosť všetkých prvočísel. Nech $x > 1$ je ľubovoľné číslo, ktoré je súčinom rôznych prvočísel (všetky s exponentom 1) a p_m najväčšie prvočíslo, ktoré ho delí. Potom kód priradený číslu x bude $(1, s_{m-1}, s_{m-2}, \ldots, s_1, s_0)$, kde $s_i = 1$, ak p_i delí x, v opačnom prípade $s_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Definujme funkciu $f(x)$, $f(x) = \dfrac{xp(x)}{q(x)}$. Ak sa kód čísla x končí nulou, potom je x nepárne, $p(x) = 2$, $q(x) = 1$ a $f(x) = 2x$. Kód čísla $f(x)$ je ten istý ako kód čísla x okrem poslednej nuly, ktorá je nahradená jednotkou. Ak sa kód čísla x končí skupinou $011\ldots1$, potom kód čísla $f(x)$ končí skupinou $100\ldots0$ (rovnaký počet cifier). Ak uvažujeme tieto kódy ako čísla v dvojkovej sústave, potom kód čísla $f(x)$ možno získať z kódu čísla x pripočítaním jednotky. Keďže $x_1 = 2$ a $x_{n+1} = f(x_n)$, kód x_n je len reprezentácia čísla n v dvojkovej sústave. Preto existuje práve jedno také n, pre ktoré $x_n = 1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Preto je kód x_n rovný 10001110, čiže $n = 142$.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné: Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na MMO, príp. MOI sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej Republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Bratislava — Bratislavský korešpondenčný matematický seminár — BKMS

Tento KS je organizovaný študentmi MFF UK v Bratislave zväčša (80%) bratislavského pôvodu. Série bývajú tematicky zamerané a obsahujú niekedy aj veľmi náročné úlohy. Okrem seminára ÚK MO sa práve tento najviac venuje príprave na MO v kategórii A. Sústredenia s pestrou celoslovenskou účasťou a takmer vždy aj so vzorkou „zahraničného“ účastníka z ČR mávajú asi najbohatší matematický program.

BKMS
RNDr. Jaroslav Guričan, CSc.
KATČ MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

e-mail: bkms@fmph.uniba.sk
URL: http://pascal.fmph.uniba.sk/www/bkms

Stredné Slovensko — Stredoslovenský korešpondenčný seminár — SSS

Tento KS je momentálne organizovaný skupinou študentov MFF UK v Bratislave, pochádzajúcich zo stredného, príp. východného Slovenska. Je pokračovateľom tradície stredoslovenských KS organizovaných v minulosti zo Žiliny a Banskej Bystrice. Do súčasnej podoby sa SSS prepracoval pred niekoľkými rokmi, keď sa organizácie ujala skupina bývalých riešiteľov, v tom čase študujúcich v Prahe. Pre túto súťaž je charakteristický nízky vekový priemer riešiteľov, súťažné úlohy majú blízko ku kategórii B alebo C MO.

Stredoslovenský seminár
KZaDM MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

e-mail: 3zabka@st.fmph.uniba.sk

Východné Slovensko — Korešpondenčný seminár z matematiky STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. Jednotlivé série bývajú tematicky zamerané, témy však často bývajú netradičné a niekedy sa obsahovo líšia od úloh v MO. Sústredenia s najmä „východoslovenskou" účasťou majú takmer neprekonateľne družnú atmosféru.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@upjs.sk
URL: http://turing.upjs.sk/students' activities/strom

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na MOI, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov MFF UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú mierne netradične na jar a na jeseň.

KSP
KVI MFF UK
Mlynská Dolina
842 15 Bratislava

e-mail: ksp@fmph.uniba.sk
URL: http://www.uniba.sk/www/csp.html

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série v polovici septembra alebo koncom januára.

Obsah

RNDr. Karel Horák, CSc. – Richard Kollár
Jana Višňovská – Tomáš Vinař
Bronislava Brejová – Úlohová komisia MO

Štyridsiatypiaty ročník matematickej olympiády na stredných školách

Vydala Jednota slovenských matematikov a fyzikov v roku 1996
Sadzbu programom $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár
Grafická úprava obálky Martina Celestiaková a Ján Maňuch
Vytlačilo Edičné centrum MFF UK, Mlynská dolina, Bratislava
Neprešlo jazykovou úpravou
1.vydanie

ISBN 80–967454–3–3