46. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

1. diel

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 1996/1997

38. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

9. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

IUVENTA

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Richard Kollár, Jana Višňovská,
Tomáš Vinař, Bronislava Brejová a členovia Úlohovej komisie MO.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

ISBN 80–88893–18–6

O priebehu 46. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je súťažou žiakov základných a stredných škôl. Jej vyhlasovateľom je Ministerstvo školstva Slovenskej republiky v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov. 46. ročník MO riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO) – bývalá Ústredná komisia MO. Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (KK MO). Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Vyvrcholením súťaže je príprava na úspešnú reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť v medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (MMO) a Medzinárodnej olympiáde v informatike (MOI). V školskom roku 1996/1997 sa uskutočnil už 46. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Aj v tomto ročníku mala spoločné úlohy s MO v Českej republike. Po prvý raz sa však uskutočnila v podmienkach nového územnosprávneho usporiadania Slovenska. S potešením možno konštatovať, že prebehla vo všetkých 79 novovytvorených okresoch, a tiež vo všetkých 8 krajoch Slovenskej republiky. Slovenská komisia MO v tomto ročníku pracovala v novom zložení. Na návrh Ústredného výboru Jednoty slovenských matematikov a fyzikov vymenovala na trojročné funkčné obdobie predsedu SK MO ministerka školstva a splnomocnila ho vymenovaním ďalších členov slovenskej komisie. Personálne obsadenie SK MO v 46. ročníku súťaže bolo takéto:

doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc. z MFF UK Bratislava, predseda SK MO.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina, podpredseda SK MO,
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava, tajomník pre odborné otázky,
RNDr. Monika Krállová, MFF UK Bratislava, tajomník pre organizačné otázky,

členovia:

PhDr. Oto Klostermann, zástupca MŠ SR,
Mgr. Viera Krajčovičová, zástupca IUVENTY,
RNDr. Andrej Blaho, CSc., MFF UK Bratislava, gestor kategórie P,
RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc., EDUXE Bratislava,
Richard Kollár, MFF UK Bratislava,
Prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., SF ŽU Žilina.

Členmi predsedníctva sú ďalej predsedovia krajských komisií:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FDS ŽU Žilina,
RNDr. Jaroslava Brincková, CSc., FHPV UMB Banská Bystrica,
Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov,
PaedDr. Hubert Gunár, Gymnázium Trenčín,

doc. RNDr. Pavol Híc, CSc., FPV TU Trnava,
RNDr. Vladimír Jodas, MC Bratislava,
RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice,
Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra.

SK MO ďalej tvorili:
RNDr. Juraj Balázs, FPV UPJŠ Košice,
RNDr. Milota Hilková, ZŠ Jilemnického, Revúca,
RNDr. Anton Hnát, Gymnázium Michalovce,
Mgr. Jozef Mészáros, Gymnázium s vyuč. jaz. maď. Galanta,
RNDr. Dagmar Mikulášová, Gymnázium Trenčín,
doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc., MFF UK Bratislava,
RNDr. Dana Smutná, FPHV UMB Banská Bystrica,
Tomáš Vinař, MFF UK Bratislava,
Mgr. Dagmar Vongrejová, ZŠ Moskovská Žilina.

V priebehu 46. ročníka MO sa uskutočnilo jedno plenárne zasadnutie SK MO a tri zasadnutia predsedníctva SK MO. Zamerali sa na zabezpečenie súťaže v nových územnosprávnych podmienkach, vznik nových okresných a krajských komisií MO, ich spoluprácu s novými orgánmi štátnej správy v školstve, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie v partnerskej spolupráci s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečovaní prebiehajúceho i budúceho ročníka MO. V Úlohovej komisii MO boli garantmi jednotlivých kategórií:

kategória A: *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.*
kategória B: *RNDr. Pavol Černek, CSc.* a *doc. RNDr. Tomáš Hecht, CSc.*,
kategória C: *doc. RNDr. Leo Boček, CSc.*

Za zadaním každej súťažnej úlohy v ďalšom texte je v zátvorke uvedené meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy. Hostiteľom pri oboch zasadnutiach úlohových komisií bola v tomto ročníku česká strana.

Organizácia súťaže zostala v 46. ročníku MO zachovaná: pre žiakov základných škôl bola rozdelená do piatich kategórií Z4 – Z8 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách: C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej ako prislúchajúcej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B ,C a P. Prvé kolo MO sa uskutočnilo vo všetkých kategóriách ako školské kolo. Druhé kolo sa uskutočnilo pre kategórie Z4 – Z8 ako okresné kolo, pre ostatné kategórie ako krajské kolo. Tretie kolo sa uskutočnilo iba v kategórii Z8 ako krajské kolo a v kategóriách A a P ako celoštátne kolo. V kategórii A bolo do tohoto kola pozvaných 41 najlepších a v kategórii P 26 najlepších riešiteľov z druhých kôl súťaže príslušnej kategórie podľa poradia zostaveného po koordinácii bodového hodnotenia.

V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické a druhý deň dve praktické úlohy.

Celoštátne kolo 46. ročníka MO sa uskutočnilo v Košiciach v dňoch 20.–23.4.1997 (kategória A) a 23.–26.4.1997 (kategória P). Na zabezpečení súťaže vrátane spoločenského programu a získania sponzorských vecných darov pre úspešných riešiteľov sa okrem Centra voľného času a IUVENTY obetavo podieľali členovia krajskej komisie matematickej olympiády v Košiciach, a najmä pracovníci a študenti Prírodovedeckej fakulty UPJŠ v Košiciach. Na úspešnom priebehu celoštátneho kola má mimoriadnu zásluhu predsedníčka KK MO *RNDr. Božena Mihálikov*á z PF UPJŠ v Košiciach.

Desať najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie pred 38. Medzinárodnou matematickou olympiádou, ktoré sa konalo v dňoch 27.4.–2.5.1997 na MFF UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohoto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na MMO v Argentíne. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 23.–27.6.1997 na Zochovej chate a zároveň nás reprezentoval na treťom ročníku medzištátneho stretnutia s Českou republikou, ktoré sa konalo v dňoch 16.–19.6.1997 v Bílovci. Medzištátnemu stretnutiu ako aj MMO sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly. Výberové sústredenie pre 12 najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo v dňoch 8.–14.6.1997 na MFF UK v Bratislave. Treba poznamenať, že sústredenie bolo prispôsobené netradičnému termínu konania MOI, ktorá prebehla až na prelome novembra a decembra v Juhoafrickej republike. Tejto súťaži je tiež venovaná samostatná kapitola. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré v ten istý deň večer aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov a s prihliadnutím na úspešnosť v druhom a treťom kole kategórie P schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré reprezentovalo SR na MOI a štvorčlenné družstvo, ktoré nás reprezentovalo na Stredoeurópskej olympiáde v informatike, ktorá sa konala v júli v Poľsku. Pred MOI sa pre reprezentačné družstvo konalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 17.–21.11.1997 na MFF UK v Bratislave.

Ako už bolo spomenuté, súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou a to:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpondenčný seminár (SSS),
Košický korešpondenčný seminár (STROM),
Korešpondenčný seminár z programovania (KSP).

Kontaktné adresy, zadania a výsledky týchto korešpondenčných seminárov boli uverejnené v predchádzajúcej ročenke MO. Opäť prebiehal už tretí ročník obnoveného KS SK MO, ktorý bol určený predovšetkým pre študentov bojujúcich o účasť na MMO. Tejto súťaži je tiež venovaná samostatná kapitola. Pri tejto príležitosti by sme radi poďakovali Matematicko-fyzikálnej fakulte UK v Bratislave za tradičnú priestorovú a materiálnu pomoc pri organizovaní viacerých korešpondenčných seminárov.

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Viera RŮŽIČKOVÁ	3 G Veľká Okružná Žilina	7	7	7	7	7	7	42
2.	Peter SVRČEK	3 G Veľká Okružná Žilina	7	6	7	7	7	7	41
3.	Miroslav DUDÍK	4 G Trebišov	5	7	5	7	7	3	34
4.	Vladimír MARKO	4 G J. Hronca Bratislava	5	7	0	7	7	7	33
5.	Kristína ČERNEKOVÁ	2 G Grösslingová Bratislava	5	7	1	6	7	5	31
6.	Peter BODÍK	3 G Poštová Košice	4	7	0	7	7	5	30
7.	Martin SLEZIAK	4 G Ružomberok	5	6	0	7	7	4	29
8.	Peter NOVOTNÝ	2 G Veľká Okružná Žilina	7	4	7	0	7	3	28
	Ján ŠPAKULA	3 G Poštová Košice	1	6	7	3	7	4	28
10.	Vladimír ZAJAC	1 G Grösslingová Bratislava	–	7	7	7	2	2	25

Ďalší úspešní riešitelia

11.	Štefan GAŠPAR	3 G Púchov	5	5	5	0	7	2	24
	Peter KOZÁK	2 G Sučany	6	4	0	3	7	4	24
	Ján RUSZ	4 G Trebišovská Košice	7	5	0	3	7	2	24
14.	Zuzana RJAŠKOVÁ	4 G Vranov nad Topľou	6	5	0	3	7	2	23
15.	Michal BAJCSY	4 G Grösslingová Bratislava	5	0	1	7	7	2	22
	Martina GANCÁROVÁ	3 G Grösslingová Bratislava	5	4	7	0	6	0	22
	Ondrej VACEK	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	5	3	3	3	7	1	22
18.	Daniel NAGAJ	3 G Bardejov	5	5	7	0	2	2	21
19.	Peter JACKO	3 G Poštová Košice	1	4	6	3	6	0	20
	František KARDOŠ	3 G Alejová Košice	5	7	3	0	3	2	20
	Andrea MESIAROVÁ	4 G Grösslingová Bratislava	5	5	4	3	0	3	20

Ostatní riešitelia

22.	Slavomír NEMŠÁK	3 G Konštantína Prešov	5	7	0	3	2	2	19
	Pavol NOVOTNÝ	3 G Veľká Okružná Žilina	1	1	0	7	7	3	19
24.	Róbert LENČÉŠ	3 G Párovská Nitra	1	3	1	3	7	3	18
25.	Richard KRÁĽOVIČ	2 G J. Hronca Bratislava	1	7	0	3	6	0	17
26.	Marián IVANČO	4 G Grösslingová Bratislava	6	4	0	3	0	3	16
	Juraj KOLESÁR	4 G Grösslingová Bratislava	0	3	4	3	2	4	16
28.	Marián KLEIN	3 G Poštová Košice	5	3	4	0	2	1	15

29.	Miloš KOPA	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	5	0	1	3	3	2	14
	Jozef LADICKÝ	4 G Nové Mesto nad Váhom	7	4	0	–	2	1	14
	Ivan LUKNÁR	4 G J.G.Tajovského B.Bystrica	0	4	4	3	2	1	14
	Andrej MELOCÍK	3 G Grösslingová Bratislava	5	4	3	0	0	2	14
	Peter VARŠA	3 G Veľká Okružná Žilina	5	–	–	7	2	0	14
34.	Ján KOVÁČIK	3 G Grösslingová Bratislava	0	3	3	7	0	0	13
35.	Peter SLOSARČÍK	4 G Grösslingová Bratislava	0	4	4	3	0	1	12
36.	Andrej ZAJÍČEK	3 G Párovská Nitra	1	–	4	3	1	0	9
37.	Tomáš FÄRBER	4 G Grösslingová Bratislava	3	0	0	3	2	0	8
	Ladislav KOVÁR	4 G Grösslingová Bratislava	0	4	0	3	1	0	8
39.	Martin GUZI	3 G Konštantína Prešov	4	0	0	0	2	0	6
40.	Peter HARIŠ	4 G Púchov	0	3	0	0	2	0	5
	Vladimír KOZÁK	3 G Sučany	–	1	0	0	2	2	5

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	52	5	9	7	11	17	3
6 bodov	11	3	3	1	1	3	0
5 bodov	25	16	5	2	0	0	2
4 body	22	2	10	6	0	0	4
3 body	37	1	6	4	18	2	6
2 body	23	0	0	0	0	12	11
1 bod	19	6	2	4	0	2	5
0 bodov	57	8	6	17	11	5	10
Priemer	3,33	3,66	4,05	2,56	3,24	4,12	2,24

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Miroslav DUDÍK	4 G Trebišov	8	9	10	6	10	43
2.	Ján RUSZ	4 G Trebišovská, Košice	3	10	10	7	7	37
3.	Richard KRÁĽOVIČ	2 G J. Hronca, Bratislava	7	10	10	8	0	35
4.	Ján SVOREŇ	4 G D. Tatarku, Poprad	1	10	10	6	4	31
5.	Peter VASIĽ	4 G Michalovce	2	10	8	8	2	30
6.	Vladimír MARKO	4 G J. Hronca, Bratislava	9	9	10	0	0	28

Ďalší úspešní riešitelia

7.	Vladimír KOUTNÝ	2 G J. Hronca, Bratislava	4	4	6	8	5	27
8.	Stanislav FUNIAK	4 G Sučany	0	10	3	8	5	26
	Rolland BOTT	3 G maď. Dunajská Streda	1	7	10	8	0	26
10.	Martin HAJDUCH	4 G Považská Bystrica	5	2	10	6	2	25
	Martin VAŠÍČEK	4 G J. Hrnoca, Bratislava	3	7	10	1	4	25
12.	Dávid PÁL	2 G Bratislava, J. Hronca	1	8	10	5	0	24
13.	Rastislav KRIVOŠ-BELLUŠ	4 G Poštová, Košice	0	7	10	4	2	23
14.	Zuzana RJAŠKOVÁ	4 G Vranov nad Topľou	1	8	10	0	3	22

Ostatní riešitelia

15.	Róbert MACHO	4 G Prievidza	7	6	2	4	2	21
16.	Michal MATOUŠEK	3 G Hlinská, Žilina	3	2	5	10	0	20
	Juraj FRIVOLT	4 G maď. Galanta	1	5	8	0	6	20
	Pavol ŽIBRITA	4 G Golianova, Nitra	4	2	10	4	0	20
19.	Peter NOVÁK	4 G Golianova, Nitra	5	2	7	3	0	17
20.	Tomáš KEZES	2 G Nové Zámky	1	5	4	4	0	14
21.	Peter BODÍK	3 G Poštová, Košice	2	7	4	0	0	13
	Matúš MIHAĽÁK	4 G Konštantínova, Prešov	5	4	4	0	0	13
23.	Peter NOVOTNÝ	4 G Prievidza	0	3	5	2	0	10
	Zsolt BENES	3 G maď. Dunajská Streda	1	2	6	1	0	10
25.	Katarína VOZÁROVÁ	4 G J. Hronca, Bratislava	0	3	4	0	0	7
	Peter PAVLISKO	3 G Košice – Šaca	4	1	2	0	0	7

Výsledky krajských kôl

Z každého kraja a z každej z kategórii A, B, C, P a Z8 sú uvedení všetci úspešní riešitelia, príp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriach B, C, Z8, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 8. ročníkov. Gymnázia so zameraním na matematiku, študijny odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,

Gymnázium Párovská, Nitra,

Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,

Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,

Gymnázium Alejová, Košice,

Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.–2.	Marián IVANČO	4, Gymnázium Grösslingová
	Vladimír MARKO	4, Gymnázium J.Hronca
3.	Andrej MELOCÍK	3, Gymnázium Grösslingová
4.–6.	Kristína ČERNEKOVÁ	2, Gymnázium Grösslingová
	Andrea MESIAROVÁ	4, Gymnázium Grösslingová
	Vladimír ZAJAC	1, Gymnázium Grösslingová
7.	Richard KRÁĽOVIČ	2, Gymnázium J.Hronca
8.–9.	Juraj KOLESÁR	4, Gymnázium Grösslingová
	Ladislav KOVÁR	4, Gymnázium Grösslingová
10.	Tomáš FÄRBER	4, Gymnázium Grösslingová

Kategória B

1.	Zuzana SLOSARČÍKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.–3.	Kristína ČERNEKOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	David PÁL	Gymnázium J.Hronca
4.	Richard KRÁĽOVIČ	Gymnázium J.Hronca
5.–6.	Pavol JURČA	Gymnázium Grösslingová
	Michal KADLIC	Gymnázium Grösslingová

7.–8.	Alena KOVÁROVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Martin ŽOVIC	Gymnázium Grösslingová
9.–10.	Tomáš BUJŇÁK	Gymnázium J.Hronca
	Martin POTOČNÝ	Gymnázium J.Hronca

Kategória C

1.–6.	Peter MACH	Gymnázium J.Hronca
	Miriam MARUŠIAKOVÁ	Gymnázium Bílikova
	Miroslav MASÁR	Gymnázium Grösslingová
	Jozef ŠEVČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Hana TICHÁ	Gymnázium Grösslingová
	Vladimír ZAJAC	Gymnázium Grösslingová
7.–9.	Dana JEŽOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Michal POKORNÝ	8, Gymnázium Grösslingová
	Martin ŠÁCHA	8, Gymnázium Grösslingová
10.–13.	Peter ČIRKA	Gymnázium Grösslingová
	Ondrej HRDLIČKA	Gymnázium J.Hronca
	Peter MÁJEK	Gymnázium J.Hronca
	Pavol ŠAFAŘÍK	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z8

1.	Jana SZOLGAYOVÁ	Gymnázium Grösslingová
2.–4.	Tomáš HAJAS	ZŠ Košická
	Katarína QUITTNEROVÁ	Gymnázium Bílikova
	Michal TVAROŽEK	ZŠ Košická
5.	Michal SOTÁK	Gymnázium Grösslingová
6.–9.	Hana BAJTOŠOVÁ	Gymnázium Vazovova
	Michal POKORNÝ	Gymnázium Grösslingová
	Martin ŠÁCHA	Gymnázium Grösslingová
	Juraj ŠVEC	Gymnázium Bílikova
10.–11.	Tomáš FARKAŠ	Gymnázium Bílikova
	Martin ROŠKO	ZŠ Senec

Kategória P

1.	Richard KRÁĽOVIČ	2, Gymnázium J.Hronca
2.	Martin VAŠÍČEK	4, Gymnázium J.Hronca
3.	Katarína VOZÁROVÁ	4, Gymnázium J.Hronca
4.–6.	Vladimír KOUTNÝ	2, Gymnázium J.Hronca
	Vladimír MARKO	4, Gymnázium J.Hronca
	David PÁL	2, Gymnázium J.Hronca

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Andrej ZAJIČEK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Róbert LENČÉŠ	3, Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Juraj STANČÍK	3, Gymnázium Levice
4.–5.	Juraj HUČEK	4, Gymnázium Párovská, Nitra
	Ján SOMORČÍK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Jozef BUDINSKÝ	3, Gymnázium Šahy
7.–8.	Andrea BORČINOVÁ	4, Gymnázium Párovská, Nitra
	István JÁMBOR	4, SPŠE Nové Zámky
9.–12.	Ivana BUDINSKÁ	4, Gymnázium Šahy
	Ján KOŘENEK	3, Gymnázium Párovská, Nitra
	Ján MAZAN	4, Gymnázium Komárno
	Ján PINTÉR	4, Gymnázium Párovská, Nitra

Kategória B

1.	Peter HUSZÁR	Gymnázium maď. Komárno
2.	Daniel HETÉNYI	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Zoltán HALÁSZ	Gymnázium maď. Komárno
4.–5.	Ondrej KORPÁS	Gymnázium maď. Komárno
	Roman ŠVEC	Gymnázium Párovská, Nitra
6.	Ján SZENDI	Gymnázium maď. Komárno
7.–8.	Gusztáv PÁLOS	Gymnázium maď. Komárno
	Beáta STEHLÍKOVÁ	Gymnázium Nové Zámky

Kategória C

1.–3.	Ladislav ÁCS	Gymnázium Nové Zámky
	Katalin FEHÉR	Gymnázium maď. Komárno
	Keve KURUCZ	Gymnázium maď. Komárno
4.–6.	Endre KURUCZ	8, Gymnázium maď. Komárno
	Barbora HALMEŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Filip VÍTEK	Gymnázium Párovská, Nitra
7.–8.	Zuzana KÚKELOVÁ	Gymnázium Šaľa
	Jarmila ŠKULAVÍKOVÁ	Gymnázium Komárno
9.–11.	Michal BUGOŠ	Gymnázium Šurany
	Zoltán HÉDER	Gymnázium maď. Komárno
	Balázs KESZEGH	Gymnázium maď. Komárno

Kategória Z8

1.	Marek KARVAJ	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky
2.–3.	Monika BABIAKOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Miloš MEDŘÍK	Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Lenka KOVAČOVSKÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
5.–6.	Slávka ĎURIŠOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
	Ivan KIŠAC	ZŠ Horné Obdokovce
7.–9.	Martina ČERVENÁKOVÁ	ZŠ Želiezovce
	Ľuboš FAZEKAŠ	ZŠ Robotnícka, Zlaté Moravce
	Peter JUHÁSZ	ZŠ Imeľ
10.	Gabriel VIMI	ZŠ maď. Diakovce

Kategória P

1.	Tomáš KEZES	2, Gymnázium Nové Zámky
2.–3.	Peter NOVÁK	4, Gymnázium Golianova, Nitra
	Pavol ŽBIRITA	4, Gymnázium Golianova, Nitra

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Matej KUBÍK	4, Gymnázium Piešťany
2.	Michal ULICKÝ	3, Gymnázium Hviezdoslavova, Trnava
3.–4.	Zdenka GAŽOVÁ	4, Gymnázium Skalica
	Ľubomír KRAJČOVIČ	4, Gymnázium Hollého, Trnava
5.–6.	Juraj MRÁZ	4, Gymnázium Hollého, Trnava
	Viktor SZABÓ	4, Gymnázium maď. Dunajská Streda
7.–8.	Roman KAPUSTA	3, Gymnázium Piešťany
	András PÁLFFY	3, Gymnázium maď. Šamorín
9.	Zuzana BURSKÁ	3, Gymnázium Skalica

Kategória B

1.	Gábor NÉMETH	Gymnázium Dunajská Streda
2.–4.	Lenka KLEŠTINCOVÁ	Gymnázium Hlohovec
	Miloš MRVA	Gymnázium Hviezdoslavova, Trnava
	Mikuláš VALLO	Gymnázium A. Merici, Trnava

Kategória C

1.–2.	Róbert CSOKA	Gymnázium Dunajská Streda
	Peter SIDÓ	Gymnázium Dunajská Streda
3.	Tomáš JUHÁSZ	Gymnázium Šamorín
4.	Adrián MOLNÁR	Gymnázium Dunajská Streda
5.–8.	Michaela BUČKOVÁ	Gymnázium Hlohovec
	Adela KOČANOVÁ	Gymnázium Hviezdoslavova, Trnava
	Tomáš MEČÍŘ	Gymnázium Senica
	Liliána SÜKEOVÁ	Gymnázium Šamorín
9.–14.	Juraj DZIFČÁK	Gymnázium Hlohovec
	Jozef HAVRAN	Gymnázium Galanta
	Marek KUCHTA	Gymnázium Skalica
	Michal SEDLÁK	Gymnázium Piešťany
	Katarína SEKÁČOVÁ	Gymnázium Piešťany
	Annamária TAKÁTS	Gymnázium Šamorín

Kategória Z8

1.	Kamil CHOVANEC	ZŠ Fándlyho, Sereď
2.–3.	Jana KRÁTKA	ZŠ Mojmírova, Piešťany
	Zuzana VAŇOVÁ	II. ZŠ, Holíč
4.	Miloslav HOLÚBEK	II. ZŠ, Senica
5.–6.	Juraj NEČAS	II. ZŠ, Holíč
	Peter STULLER	ZŠ Jilemnického, Dunajská Streda
7.–9.	Benedikt GAÁL	Gymnázium maď. Galanta
	Roman JURÁŠ	II. ZŠ Holíč
	Pavol SÚKENÍK	ZŠ Holubyho, Piešťany
10.–11.	Andrea HESKOVÁ	ZŠ Gbely
	Beáta LOSONSZKA	ZŠ Veľký Meder

Kategória P

1.	Juraj FRIVOLT	4, Gymnázium maď. Galanta
2.–3.	Roland BOTT	3, Gymnázium maď. Dunajská Streda
	Zsolt BENES	3, Gymnázium maď. Dunajská Streda

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Jozef LADICKÝ	4, Gymnázium Nové Mesto nad Váhom

2.	Štefan GAŠPAR	3, Gymnázium Púchov
3.–4.	Martin HAJDUCH	4, Gymnázium Považská Bystrica
	Peter HARIŠ	4, Gymnázium Púchov
5.–6.	Róbert MACHO	4, Gymnázium Prievidza
	Peter VALO	4, Gymnázium Považská Bystrica
7.	Andrea KMOTORKOVÁ	3, Gymnázium Bánovce nad Bebravou

Kategória B

1.	Zuzana DZURÁKOVÁ	Gymnázium Prievidza
2.	Lenka BREŠOVÁ	Gymnázium Trenčín
3.	Mária ČIČMANCOVÁ	Gymnázium Prievidza
4.–5.	Barbora GULEJOVÁ	Gymnázium Prievidza
	Michal HANÁČEK	Gymnázium Trenčín

Kategória C

1.–3.	Martin PASTVA	Gymnázium Prievidza
	Peter PRAVDA	Gymnázium Prievidza
	Miroslav ZÁMEČNÍK	Gymnázium Nové Mesto nad Váhom
4.–5.	Anna FRANEKOVÁ	Gymnázium Partizánske
	Andrej MINAROVIČ	Gymnázium Partizánske
6.–7.	Michal TOMČÍK	Gymnázium Prievidza
	Petra KOSAROVÁ	Gymnázium Trenčín
8.	Marián ERTE	Gymnázium Prievidza
9.–11.	Katarína BEHULIAKOVÁ	Gymnázium Považská Bystrica
	Pavol HRIADEL	Gymnázium Bánovce nad Bebravou
	Juraj SUCHÁR	Gymnázium Dubnica nad Váhom

Kategória Z8

1.	Juraj ŠARINAY	ZŠ Dolné Hony, Trenčín
2.–4.	Peter ČERMÁK	ZŠ Hviezdoslavova, Nová Dubnica
	Tomáš KULICH	ZŠ Rastislavova, Prievidza
	Michaela NĚMCOVÁ	Gymnázium Partizánske
5.	Ján MAZANEC	Gymnázium Prievidza
6.	Tomáš SEDLIAČIK	ZŠ Veľká okružná, Partizánske
7.	Gabriela ŠEVČÍKOVÁ	ZŠ Tematínska, Nové Mesto nad Váhom
8.–9.	Mária BENDOVÁ	Gymnázium Prievidza
	Martin STRAPKO	ZŠ Komenského, Púchov
10.–11.	Zuzana SIVANICOVÁ	ZŠ Komenského, Bánovce nad Bebravou
	Vladimír TURČEK	ZŠ Klátova Nová Ves

Kategória P

1.	Martin HAJDUCH	4, Gymnázium Považská Bystrica
2.	Róbert MACHO	4, Gymnázium Prievidza
3.	Peter NOVOTNÝ	4, Gymnázium Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1.–2.	Pavol NOVOTNÝ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Peter NOVOTNÝ	2, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.–4.	Viera RŮŽIČKOVÁ	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Peter SVRČEK	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
5.	Martin SLEZIAK	4, Gymnázium Ružomberok
6.–9.	Peter KOZÁK	2, Gymnázium Sučany
	Vladimír KOZÁK	3, Gymnázium Sučany
	Peter VARŠA	3, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Michal ZORKOVSKÝ	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
10.	Jozef KNAP	4, Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kategória B

1.–2.	Peter KOZÁK	Gymnázium Sučany
	Ivan PILIŠ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.	Peter NOVOTNÝ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
4.	Vladimír KOZÁK	Gymnázium Sučany
5.–6.	Rastislav ŠIMONÍK	Gymnázium Martin
	Jozef ŠKORUPA	Gymnázium Liptovský Mikuláš
7.–8.	Marcela KOŽÁKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Miroslava MÚČKOVÁ	Gymnázium Martin

Kategória C

1.–2.	Peter KOZÁK	Gymnázium Sučany
	Martin TROJÁK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
3.	Boris BALKO	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
4.–5.	Dáša CHLÁDEKOVÁ	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina
	Jaroslav ŠOLTÝS	Gymnázium Liptovský Hrádok
6.	Martin RENTKA	Gymnázium Námestovo
7.	Michal MUŠÁK	Gymnázium Sučany
8.–9.	František DEBNÁR	Gymnázium Liptovský Hrádok

	Ľuboš OBLUK	Gymnázium Martin
10.	Radoslav FULEK	Gymnázium Veľká Okružná, Žilina

Kategória Z8

1.	Michal BUTEK	ZŠ Hliny V., Žilina
2.–5.	Ľuboš KLANICA	ZŠ Gaštanová, Žilina
	Eva KOMPANOVÁ	ZŠ J.Matušku, Dolný Kubín
	Ľudovít MRAVÍK	ZŠ Moskovská, Žilina
	Michal PEŠTA	ZŠ Bobrovec
6.	Jozef JURÍČEK	ZŠ Moskovská, Žilina
7.–9.	Daniela KRAJČOVÁ	ZŠ Martinská, Žilina
	Juraj LAŠŠUTH	ZŠ Nemocničná II., D.Kubín
	Branislav MIKULÁŠ	Gymnázium Martin
10.–12.	Michaela BURANÍKOVA	ZŠ Tomáškova, Martin
	Andrea HEGLASOVÁ	ZŠ Moskovská, Žilina
	Andrej KUNOŠ	ZŠ Žiarska, Liptovský Mikuláš

Kategória P

1.	Stanislav FUNIAK	4, Gymnázium Sučany
2.	Michal MATOUŠEK	3, Gymnázium Hlinská, Žilina

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Miloš KOPA	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ivan LUKNÁR	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.–5.	Marek HYČKO	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Martin SAMUELČÍK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ondrej VACEK	4, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6.–7.	Pavol ZAJAC	3, Gymnázium Komenského, Banská Bystrica
	Ján ĎURIŠ	4, Gymnázium Rimavská Sobota
8.–9.	Vladislav GADOŠÍK	3, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Martin STAŇO	2, Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
10.	Ján RYS	3, Gymnázium Kremnica

Kategória B

1.–2.	Alena TEPLIČANOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Juraj TUREK	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Katarína STAJANČOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

4.	Martin STAŇO	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
5.	Marian KRÁTKY	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
6.	Irena MAŤOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7.	Jana PIGOŠOVÁ	Gymnázium Banská Štiavnica

Kategória C

1.–2.	Júlia LACKOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Ondrej SUCHÝ	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
3.	Ján ORAVEC	ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
4.–6.	Michal KORČEK	Gymnázium Zvolen
	Dušan LACIKA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
	Július LANGA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
7.–9.	Peter HARMADY	Gymnázium Rimavská Sobota
	Peter CHRTIANSKY	Gymnázium Lučenec
	Roman NEDELA	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica
10.	Andrej ČIERNY	Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica

Kategória Z8

1.	Ján ORAVEC	ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
2.	Tomáš LIPTÁK	ZŠ Tornaľa
3.	Zuzana CIENIKOVÁ	III. ZŠ Zvolen
4.–7.	Jakab GERGELY	ZŠ Vinica
	Zoltán MICS	ZŠ Vinica
	Ján PIGOŠ	ZŠ Banská Štiavnica
	Tomáš POČAI	ZŠ Banská Štiavnica
8.–9.	Ján HANZLÍK	IV. ZŠ Detva
	Stanislav SEKEREŠ	III. ZŠ Detva
10.–12.	Juraj BEDNÁR	ZŠ Moyzesovo nám., Banská Bystrica
	Martin MATEJKA	ZŠ Radvaň, Banská Bystrica
	Radoslav PERVAN	ZŠ Hviezdoslavova, Revúca

Kraj Košice

Kategória A

1.–2.	František KARDOŠ	3, Gymnázium Alejová, Košice
	Ján ŠPAKULA	3, Gymnázium Poštová, Košice
3.	Peter JACKO	3, Gymnázium Poštová, Košice
4.	Ján RUSZ	4, Gymnázium Trebišovská, Košice
5.–6.	Peter BODÍK	3, Gymnázium Poštová, Košice
	Miroslav DUDÍK	4, Gymnázium Trebišov

7.	Marián KLEIN	3, Gymnázium Poštová, Košice
8.–9.	Martin HRIŇÁK	2, Gymnázium Alejová, Košice
	Rastislav KRIVOŠ-BELLUŠ	4, Gymnázium Poštová, Košice
10.–11.	Martin BERTA	4, Gymnázium Michalovce
	Matúš MEDO	3, Gymnázium Poštová, Košice

Kategória B

1.	Martin HRIŇÁK	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Petra FENCÍKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Eduard SEMAN	Gymnázium Michalovce
4.–7.	Peter ANDRAŠINA	Gymnázium Alejová, Košice
	Peter MIHÓK	Gymnázium Alejová, Košice
	Jozef MIŠKUF	Gymnázium Poštová, Košice
	Ján SENKO	SPŠE Košice
8.	Vladimír LAKATOŠ	Gymnázium Michalovce

Kategória C

1.–6.	Marek JENDREJ	Gymnázium Poštová, Košice
	Tomáš JURÍK	Gymnázium Poštová, Košice
	Anna KORDULIAKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Miroslava SOTÁKOVÁ	Gymnázium Javorová, Spišská Nová Ves
	Michal VAĽKO	Gymnázium Alejová, Košice
	Zuzana VARGOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
7.–8.	Tomáš ANDRAŠINA	Gymnázium Alejová, Košice
	Róbert BURSA	Gymnázium Alejová, Košice
9.	Martin VITIKÁČ	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
10.	Peter ŽÁRSKY	Gymnázium Alejová, Košice

Kategória Z8

1.	Lukáš FERENC	ZŠ sv. Cyrila a Metoda, Spišská Nová Ves
2.–4.	Peter HRUŠOVSKÝ	ZŠ Ing. Kožucha, Spišská Nová Ves
	Kamil KNAP	ZŠ Drábova, Košice
	Peter TAMÁŠ	Gymnázium Alejová, Košice
5.–7.	Drahoslav HREŇO	VI. ZŠ, Michalovce
	Lucia JAROŠOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Zuzana VLČKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
8.–11.	Ivan DOVICA	ZŠ park Angelínum, Košice
	Silvia ĎURIŠOVÁ	VI. ZŠ Michalovce
	Ján UHRÍN	VIII. ZŠ Michalovce
	Tomáš TOPERCER	ZŠ Letanovce

Kategória P

1.	Miroslav DUDÍK	4, Gymnázium Trebišov
2.	Ján RUSZ	4, Gymnázium Trebišovská, Košice
3.	Peter BODÍK	3, Gymnázium Poštová, Košice
4.	Rastislav KRIVOŠ-BELLUŠ	4, Gymnázium Poštová, Košice
5.	Peter PAVLISKO	4, Gymnázium Košice – Šaca
6.	Peter VASIĽ	4, Gymnázium Michalovce
7.	Michal KOĽCUN	3, Gymnázium Alejová, Košice
8.	Peter ULIČIANSKY	4, Gymnázium Alejová, Košice
9.	Martin BERTA	4, Gymnázium Michalovce
10.	Marianna POLACKÁ	3, Gymnázium Trebišov

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Daniel NAGAJ	3, Gymnázium Bardejov
2.–3.	Martin GUZI	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Zuzana RJAŠKOVÁ	4, Gymnázium Vranov nad Topľou
4.–5.	Cyril ADAMUŠČIN	3, Gymnázium Bardejov
	Slavomír NEMŠÁK	3, Gymnázium Konštantínova, Prešov
6.–7.	Miroslav DOBIS	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Martin JURČÁK	4, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
8.–9.	Marek REVICKÝ	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Marián VRÁBEL	2, Gymnázium D.Tatarku, Poprad
10.–11.	Lucia MRÓZOVÁ	3, Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Ján SVOREŇ	4, Gymnázium D.Tatarku, Poprad

Kategória B

1.	Michal FORIŠEK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
2.	Marián VRÁBEL	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
3.	Martin LANG	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
4.–5.	Peter BREJČÁK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Pavol KOVALČÍK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
6.	Karol ČISARIK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
7.	Peter GAJDOŠ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
8.–9.	Stanislav ŠIMO	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
	Lucia ŽIVICKÁ	Gymnázium Kežmarok
10.–14.	Eduard KUPČO	Gymnázium D.Tatarku, Poprad

	Peter KUPSKÝ	SPŠE Prešov
	Peter MOLNÁR	Gymnázium Vranov nad Topľou
	Viera POLOHOVÁ	Gymnázium J.A.Raymana, Prešov
	Michal ŽÁČEK	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória C

1.	Alexandra SAXOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.–4.	Helena HOVANCOVÁ	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Juraj LACA	Gymnázium Svidník
	Zuzana OLEKŠÁKOVÁ	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
5.–7.	Martin ARVAY	OA Prešov
	Slavomír KATUŠČÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Jaroslava VERNARCOVÁ	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
8.–9.	Miloš ČERNÁK	Gymnázium Kežmarok
	Igor TKÁČ	Gymnázium Humenné
10.–14.	Igor GOMBOŠ	8, Gymnázium Kežmarok
	Stanislav KAŠČÁK	Gymnázium Lipany
	Martin KOŠALKO	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad
	Ivana KUPČIHOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Slavomír MIŠKOVEC	Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória Z8

1.	Martin KOMARA	Gymnázium Sabinov
2.	Erika HÖNSCHOVÁ	BGymnázium Poprad
3.–6.	Peter BANDA	ZŠ Mirka Nešpora, Prešov
	Marta BELIŠOVÁ	ZŠ Mirka Nešpora, Prešov
	Igor GOMBOŠ	Gymnázium Kežmarok
	Ľudmila HOSTOVÁ	ZŠ Ševčenkova, Bardejov
7.–8.	Růžena MORONGOVÁ	Gymnázium Kežmarok
	Mário OLEXIČÁK	ZŠ Študentská, Snina
9.–13.	Jana ONDTKOVÁ	ZŠ Ševčenková, Bardejov
	Miroslav PICH	ZŠ Centrálna, Svidník
	Martin ZIMÁNY	Gymnázium D.Tatarku, Poprad
	Štefan ZORIČÁK	Gymnázium Kežmarok

Kategória P

1.	Zuzana RJAŠKOVÁ	4, Gymnázium Vranov nad Topľou
2.	Ján SVOREŇ	4, Gymnázium D.Tatarku, Poprad
3.	Matúš MIHAĽAK	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
4.	Marek REVICKÝ	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov
5.	Juraj HORVÁTH	4, Gymnázium Konštantínova, Prešov

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

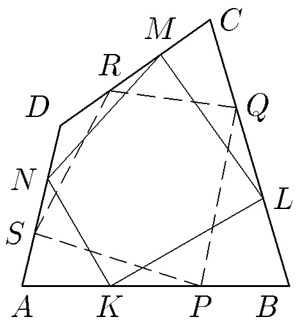
Číslo 4 896 je deliteľné ako svojím prvým dvojčíslím (48), tak aj svojím posledným dvojčíslím (96). Koľko je štvorciferných čísel s touto vlastnosťou, ktoré sú naviac deliteľné 17-timi?

(J. Šimša)

C – I – 2

Každá strana konvexného štvoruholníka $ABCD$ je dvoma bodmi rozdelená na tri zhodné úsečky (obr. 1). Ukážte, že štvoruholníky $KLMN$ a $PQRS$ majú rovnaký obsah.

(J. Zhouf)



Obr. 1

C – I – 3

V pravouhlom trojuholníku ABC je K stred prepony AB a bod M leží na odvesne AC tak, že $|AM| = 2|MC|$. Dokážte, že uhly MKC a ABM sú zhodné.

(Prevzatá úloha)

C – I – 4

Na dvore sa hrali Karol, Miro a Jaro. Karol si myslel dve dvojciferné čísla. Mirovi prezradil ich rozdiel. Ten správne našiel všetkých deväť takých dvojíc. Jarovi Karol prezradil súčin oboch čísel. Jaro správne určil všetkých osem dvojíc s uvedeným súčinom. Ktoré čísla si Karol myslel?

(P. Černek)

C – I – 5

V pravidelnom trojbokom ihlane $ABCV$ je dĺžka bočnej hrany $|AV| = 5\,\mathrm{cm}$, dĺžka hrany podstavy $|AB| = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Body K, L, M sú päty kolmíc vedených vnútorným bodom X podstavy ABC na bočné hrany AV, BV, CV. Ako je potrebné voliť bod X, aby guľová plocha prechádzajúca bodmi K, L, M a X mala čo najmenší priemer? Vypočítajte tento priemer.

(P. Leischner)

C – I – 6

Nájdite všetky trojice celých čísel x, y, z, pre ktoré platí $x + yz = y + xz = z + xy = 6$.

(J. Zhouf)

C – S – 1

Os prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC pretne odvesnu AC v bode M, pre ktorý platí $|AM| = 2|CM|$. Určte veľkosti uhlov trojuholníka ABC.

(P.Leischner)

C – S – 2

Karol požiadal Mira: „Mysli si dve rôzne dvojciferné čísla a prezraď mi ich súčet.“ Keď sa tak stalo, Karol správne zistil, že existujú práve štyri také dvojice (na poradí čísel v dvojici nezáleží). Miro ďalej Karolovi napovedal, že väčšie z oboch čísel je prvočíslo. Určte všetky dvojice čísel, ktoré si Miro mohol myslieť.

(J.Šimša)

C – S – 3

Nájdite všetky štvorice prirodzených čísel, pre ktoré platí: Súčet súčinu každých dvoch čísel zo štvorice so súčinom zostávajúcich dvoch čísel je rovný 51.

(J.Zhouf)

C – II – 1

V štvorcifernom čísle sú rovnaké prvé dve číslice, a tiež posledné dve číslice. Určte toto číslo, ak viete, že je druhou mocninou prirodzeného čísla.

(ČS MO)

C – II – 2

Daný je pravouhlý trojuholník ABC. Na prepone AB zostrojte bod X a na odvesne BC bod Y tak, aby bolo možné štvoruholníku $AXYC$ opísať aj vpísať kružnicu.

(P.Leischner)

C – II – 3

Janko s Marienkou požiadali svoju mamičku, aby si zvolila dve rôzne dvojciferné čísla. Mamička potom Jankovi prezradila ich rozdiel a Marienke ich súčet. Janko správne zistil, že práve 63 takých dvojíc dáva daný rozdiel. Aj Marienka našla správne všetkých 40 dvojíc s daným súčtom. Ktoré čísla mamička zvolila?

(J.Šimša)

C – II – 4

Vo štvorci $ABCD$ je R stred strany CD a Q priesečník uhlopriečky BD s priamkou AR. Na strane BC zvoľte bod P tak, aby úsečka PQ rozdelila lichobežník $ABCR$ na dva štvoruholníky s rovnakým obsahom.

(J.Švrček)

Kategória B

B – I – 1

Pre ktoré prirodzené čísla n možno v pravidelnom n-uholníku nájsť uzavretú lomenú čiaru zloženú z n uhlopriečok n-uholníka tak, aby prechádzala všetkými vrcholmi n-uholníka, a aby každé dve z týchto uhlopriečok mali spoločný bod?

(P. Hliněný)

B – I – 2

Nájdite všetky kvadratické funkcie, ktoré zobrazia interval $\langle 2, 5\rangle$ na interval $\langle 15, 27\rangle$, a ktorých graf prechádza počiatkom súradnicového systému.

(P. Černek)

B – I – 3

Koľko 24-miestnych prirodzených čísel, ktorých dekadický zápis obsahuje 22 cifier 1 a dve cifry 2, je deliteľných siedmimi?

(T. Hecht)

B – I – 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x+y+z&=3,\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=0,\\ \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}&=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}. \end{aligned}$$

(J. Šimša)

B – I – 5

V rovnobežníku $ABCD$ označme E a F po rade stredy strán BC a CD. Veďte rovnobežku s priamkou BD, ktorá pretína obvod štvoruholníka v bodoch K, L tak, aby úsečka KL bola rozdelená úsečkami AE, AC, AF na štyri zhodné úseky.

(J. Zhouf)

B – I – 6

Nad stranami ostrouhlého trojuholníka ABC sú zvonku zostrojené polkružnice. Označme po rade K, L, M priesečníky predĺžených výšok trojuholníka z vrcholov A, B, C s týmito polkružnicami. Dokážte, že obrazec $AMBKCL$ tvorí plášť štvorstena (trojbokého ihlanu s podstavou ABC).

(P. Leischner)

B – S – 1

Ak je päťciferné číslo $6AB73$ deliteľné číslom 99, tak je deliteľné aj číslom 19. Dokážte.

(P. Černek)

B – S – 2

Rovnica $x^3+ax^2+bx+c=0$, kde a, b a c sú celé čísla, má koreň $x=1-\sqrt{2}$. Dokážte, že potom platí $a-2b+5c=0$.

(P. Černek)

B – S – 3

Daný je rovnobežník $ABCD$ s dĺžkami strán $a=|AB|$, $b=|BC|$ a uhlom $\alpha=|\sphericalangle DAB|$. Popíšte konštrukciu priamky, ktorá delí rovnobežník na dva štvoruholníky, ktorým možno vpísať kružnicu. Preveďte diskusiu o počte riešení vzhľadom na a, b a α.

(P. Černek)

B – II – 1

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 3x + 14 &= y^2 + z^2, \\ 3y + 14 &= z^2 + x^2, \\ 3z + 14 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

(P. Černek)

B – II – 2

Určte, pre ktoré reálne čísla p má funkcia $f(x) = x^3 - px^2 + 1\,997$ na intervale $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bode $x = 1$.

(P. Černek)

B – II – 3

Nech $ABCD$ je lichobežník ($AB \parallel CD$), ktorého uhlopriečky sú navzájom kolmé. Dokážte nerovnosť $|AB| + |CD| < |BC| + |DA|$.

(J. Švrček)

B – II – 4

Učiteľ napísal na tabuľu štyri navzájom rôzne nenulové číslice. Žiaci mali sčítať všetky tie trojciferné čísla vytvorené z číslic na tabuli, v ktorých sa žiadna číslica neopakuje. Jankovi vyšiel nesprávny výsledok 12 497, pretože síce čísla správne sčítal, ale na jedno zabudol. Ktoré číslo to bolo? Aké štyri číslice boli napísané na tabuli?

(P. Černek)

Kategória A

A – I – 1

Pre každé prirodzené číslo k označme n_k súčin prvých k prvočísel (napr. $n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$). Zistite, pre ktoré čísla k je možné zlomok

$$\frac{3^{n_k} - 1}{n_k}$$

krátiť číslom väčším ako 2.

(R. Kollár)

A – I – 2

Nájdite všetky dvojice mnohočlenov

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad g(x) = x^2 + cx + d,$$

ktoré spĺňajú tieto podmienky:

(1) Každý z mnohočlenov f, g má dva rôzne reálne korene.
(2) Ak je s ľubovoľný koreň f, potom aj $g(s)$ je koreň f.
(3) Ak je s ľubovoľný koreň g, potom aj $f(s)$ je koreň g.

(J. Šimša)

A – I – 3

V ľubovoľnom trojuholníku ABC označme a, b, c dĺžky jeho strán a t_a, t_b, t_c dĺžky jeho ťažníc obvyklým spôsobom. Zistite, či je niektorá z nerovností

$$a < \frac{b+c}{2}, \quad t_a > \frac{t_b + t_c}{2}$$

dôsledkom druhej, alebo či dokonca nejde o dve ekvivalentné nerovnosti.

(J. Šimša)

A – I – 4

Do daného kruhového odseku sú vpísané kružnice k_1, k_2. Kružnica k_1 sa dotýka oblúka odseku v bode A a základne odseku v bode B. Kružnica k_2 sa dotýka oblúka odseku v bode C a základne odseku v bode D.

a) Dokážte, že body A, B, C, D ležia na jednej kružnici.
b) Uvažujme všetky také dvojice kružníc k_1, k_2, ktoré sa navyše vzájomne dotýkajú. Aký útvar vyplnia body ich dotyku?

(J. Zhouf)

A – I – 5

Vo vnútri pravidelného štvorstena $ABCD$ sú dané body E, F tak, že žiadne štyri z bodov A, B, C, D, E, F neležia v jednej rovine. Štvorsten $ABCD$ je bezo zvyšku rozrezaný na niekoľko menších štvorstenov, ktorých vrcholy tvoria množinu $\{A, B, C, D, E, F\}$. Určte všetky možné počty menších štvorstenov, na ktoré sa dá daný štvorsten uvedeným spôsobom rozrezať.

(P. Hliněný)

A – I – 6

Každá z uhlopriečok pravidelného n-uholníka ($n \geqq 5$) je ofarbená jednou z dvoch farieb (modrou alebo červenou). Je povolené postupné prefarbovanie uhlopriečok tak, že v každom kroku vyberieme jeden vrchol a zmeníme farby všetkých uhlopriečok, ktoré z neho vychádzajú (z modrej na červenú a naopak). Rozhodnite, či možno vždy uhlopriečky prefarbiť tak, aby existovala

a) lomená čiara,

b) uzavretá lomená čiara

zložená iba z modrých uhlopriečok a prechádzajúca každým vrcholom n-uholníka práve raz.

(J. Kratochvíl)

A – S – 1

Určte všetky dvojice prvočísel p a q, pre ktoré platí $5^p = 6 + 7q$.

(J.Šimša)

A – S – 2

Daná je tetiva UV kružnice k. Označme L_1 a L_2 priesečníky osi úsečky UV s kružnicou k. Do kruhového odseku vymedzeného tetivou UV a oblúkom UL_1V sú vpísané dve kružnice dotýkajúce sa oblúka aj tetivy a pretínajúce sa v dvoch rôznych bodoch M a N. Dokážte, že priamka MN prechádza bodom L_2.

(P.Hliněný)

A – S – 3

Dokážte, že ak pre reálne čísla a, b, c platí $a + b + c = 1$, tak

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca \geqq 1.$$

(R.Kollár)

A – II – 1

Ak je súčet $5^n + 3^n + 1$ prvočíslo, potom je prirodzené číslo n deliteľné dvanástimi. Dokážte.

(J.Šimša)

A – II – 2

Určte, pre ktoré veľkosti uhla DAB možno do kosoštvorca $ABCD$ vpísať dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ s týmito vlastnosťami: Kružnice k_1 a k_2 majú vonkajší dotyk, $r_2 = 2r_1$, kružnica k_1 sa dotýka ramien uhla DAB, kružnica k_2 sa dotýka ramien uhla BCD a obidve kružnice ležia v danom kosoštvorci.

(J.Zhouf)

A – II – 3

Postupnosť čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je definovaná rekurentne:

$$a_1 = 2,$$
$$a_n = 2(n + a_{n-1}) \quad \text{pre každé } n \geqq 2.$$

Dokážte, že nerovnosť $a_n \leqq 2^{n+2}$ platí pre každé prirodzené číslo n.

(J.Kratochvíl)

A – II – 4

Nájdite mnohosten s najmenším počtom vrcholov taký, že žiadne tri jeho steny nemajú rovnaký počet hrán.

(J.Kratochvíl)

A – III – 1

Označme strany a uhly trojuholníka ABC obvyklým spôsobom. Dokážte, že z rovnosti $\alpha = 3\beta$ vyplýva $(a^2-b^2)(a-b) = bc^2$. Rozhodnite, či tiež naopak z rovnosti $(a^2 - b^2)(a-$ $- b) = bc^2$ vyplýva $\alpha = 3\beta$.

(J.Šimša)

A – III – 2

Každá strana aj uhlopriečka pravidelného n-uholníka, kde $n \geqq 3$ je nepárne, je ofarbená buď modrou, alebo červenou farbou. Je povolené prefarbovať tieto úsečky len tak, že v každom kroku vyberieme jeden vrchol a zmeníme farby všetkých úsečiek, ktoré z neho vychádzajú (z modrej na červenú a naopak). Dokážte, že každé začiatočné ofarbenie možno týmto postupom zmeniť tak, aby nakoniec z každého vrcholu vychádzal párny počet modrých úsečiek. Dokážte tiež, že takéto výsledné ofarbenie je jednoznačne určené začiatočným ofarbením.

(J.Kratochvíl)

A – III – 3

Štvorsten $ABCD$ je bezo zvyšku rozdelený na päť konvexných mnohostenov tak, že žiadna jeho stena nie je rozdelená a prienik každých dvoch z piatich vzniknutých mnohostenov je buď spoločný vrchol, alebo spoločná hrana, alebo spoločná stena. Aký je najmenší možný súčet počtov stien týchto piatich mnohostenov?

(P.Hliněný)

A – III – 4

Dokážte, že existuje rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že pre každé prirodzené číslo $k \geqq 2$ postupnosť $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje len konečne veľa prvočísel.

Rozhodnite, či existuje rastúca postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel taká, že pre každé celé číslo $k \geqq 0$ postupnosť $(k + a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje len konečne veľa prvočísel.

(R.Kollár)

A – III – 5

Pre každé prirodzené číslo $n \geqq 2$ určte najväčšiu hodnotu výrazu

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1} \cos x_n + \sin x_n \cos x_1,$$

kde x_1, x_2,..., x_n sú ľubovoľné reálne čísla.

(J.Švrček)

A – III – 6

Daný je rovnobežník $ABCD$ taký, že ABD je ostrouhlý trojuholník a $|\sphericalangle BAD| = 45°$. Vo vnútri strán rovnobežníka možno rôznymi spôsobmi vybrať body $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$ a $N \in DA$ tak, aby $KLMN$ bol tetivový štvoruholník, ktorého opísaná kružnica má rovnaký polomer ako obidve kružnice opísané trojuholníkom ANK a CLM. Nájdite množinu priesečníkov uhlopriečok všetkých takých štvoruholníkov $KLMN$.

(J.Šimša)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

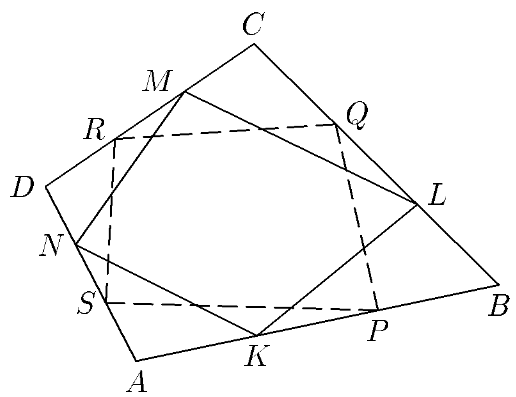
C – I – 1

Ak má číslo n vlastnosti zadané v úlohe, potom dvojciferné číslo A zložené z prvých dvoch číslic čísla n delí dvojciferné číslo C zložené z posledných dvoch číslic čísla n, teda $C = kA$, kde k je prirodzené. Ďalej číslo $C = kA$ delí číslo $n = 100A + C$, takže delí číslo $100A$. Teda k delí číslo 100. Preto sa môže k rovnať len niektorému z čísel 1, 2, 4, 5. Keby bolo $k \geqq 10$, nebolo by číslo $C = kA$ dvojciferné. Nutne sa teda n rovná niektorému z čísel $101A$, $102A$, $104A$ alebo $105A$.

Z koeficientov 101, 102, 104, 105 je len číslo 102 deliteľné 17. Ak je teda $k = 2$, môže byť A ľubovoľné číslo, ktorého dvojnásobok je tiež dvojciferný, takže $10 \leqq A \leqq 49$, to je 40 možností. Pre ostatné hodnoty k musí byť A deliteľné číslom 17, takže pre $k = 1$ môže byť $A = 17$, 34, 51, 68, 85 (5 možností), pre $k = 4$ alebo 5 musí byť $A = 17$ (2 možnosti). Výsledok: Čísel s danými vlastnosťami je práve 47, sú to čísla 1 785, 1 768, 1 717, 3 434, 5 151, 6 868, 8 585 a 1 020, 1 122, 1 224, …, 4 896, 4 998.

C – I – 2

Štvoruholník $KLMN$ dostaneme zo štvoruholníka $ABCD$ odobratím trojuholníkov NAK, KBL, LCM, MDN, štvoruholník $PQRS$ odobratím trojuholníkov SAP, PBQ, QCR, RDS (obr. 2). Pritom trojuholníky KBL, PBQ majú rovnaký obsah, pretože $|BL| = \frac{1}{2}|BQ|$, $|BK| = 2|BP|$. Podobne pre ďalšie dvojice trojuholníkov.

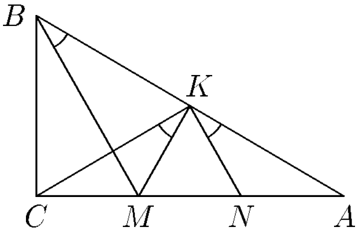


Obr. 2

C – I – 3

Označme N stred úsečky AM, KN je stredná priečka v trojuholníku ABM, preto $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle AKN|$ (obr. 3).

Ďalej je $|KC| = |KA|$ (kružnica opísaná trojuholníku ABC má stred v bode K). Trojuholník AKN je obrazom trojuholníka CKM v osovej súmernosti podľa osi úsečky AC, preto $|\sphericalangle AKN| = |\sphericalangle CKM|$, a teda $|\sphericalangle ABM| = |\sphericalangle CKM|$.



Obr. 3

Iné riešenie. Najprv zostrojíme obrazy‘ B', K' bodov B, K v osovej súmernosti podľa priamky AC a potom ťažnice v trojuholníku ABB'. Ťažnice $B'K$, BK' sa pretnú v bode M. Úsečka CK je strednou priečkou v trojuholníku ABB'.

C – I – 4

Miro poznal rozdiel m oboch čísel, mohli to teda byť čísla $10 + m$, 10 alebo $11 + m$, 11 atď. až 99, $99 - m$. Takých dvojíc je $99 - (9 + m) = 90 - m$. Vieme, že ich bolo deväť, takže $m = 81$. Karol si teda myslel niektorú z týchto dvojíc: $(91, 10)$, $(92, 11)$, $(93, 12)$, $(94, 13)$, $(95, 14)$, $(96, 15)$, $(97, 16)$, $(98, 17)$, $(99, 18)$. Ak spočítame pre každú z týchto dvojíc súčin oboch čísel, tak len v prípade $(96, 15)$ sa dá tento súčin napísať ešte ďalšími siedmimi spôsobmi ako súčin dvoch dvojciferných čísel: $96 \cdot 15 = 90 \cdot 16 = 80 \cdot 18 = 72 \cdot 20 = 60 \cdot 24 = 48 \cdot 30 = 45 \cdot 32 = 40 \cdot 36$. Karol si myslel čísla 96, 15.

C – I – 5

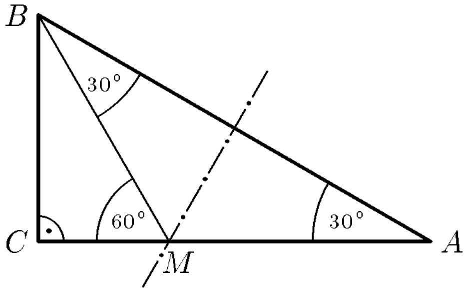
Pretože XK je kolmé na VK, leží bod K na Tálesovej kružnici nad priemerom XV. Podobne pre L a M, všetky tri body K, L, M ležia preto na guľovej ploche s priemerom XV. Aby bol tento priemer čo najmenší, musí byť X päta kolmice vedenej bodom V na rovinu ABC, takže X splýva s ťažiskom trojuholníka ABC. Je preto $|AX| = \frac{2}{3}|AP|$, kde P je päta výšky v trojuholníku ABC, takže $|AX| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}|AB|\sqrt{3} = 4$ cm, $|VX| = 3$ cm.

C – I – 6

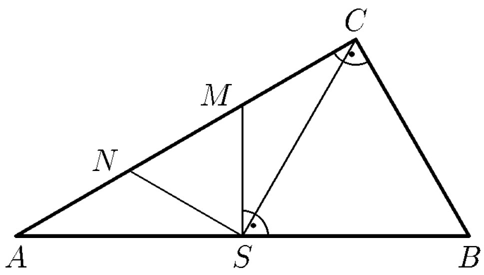
Odčítaním druhej a tretej rovnice od prvej dostaneme nutné podmienky $(x - y)(1 - z) = 0$, $(x - z)(1 - y) = 0$, takže buď je $x = y = z$, alebo $x = y = 1$, alebo $x = z = 1$, alebo $y = z = 1$. Ak je $x = y = z$, musí ešte platiť $x(x + 1) = 6$, preto $x = 2$ alebo $x = -3$. Ak je $x = y = 1$, je nutne $z = 5$. Riešením sú práve tieto usporiadané trojice: $(2, 2, 2)$, $(-3, -3, -3)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 5, 1)$ a $(5, 1, 1)$.

C – S – 1

Pretože $|BM| = |AM| = 2|CM|$, v pravouhlom trojuholníku BMC (obr. 4) platí $|\sphericalangle BMC| = 60°$, $|\sphericalangle MBC| = 30°$. Potom $|\sphericalangle BMA| = 120°$, a preto v rovnoramennom trojuholníku ABM platí $|\sphericalangle MAB| = |\sphericalangle MBA| = 30°$. Veľkosti uhlov v trojuholníku ABC sú $30°$, $60°$, $90°$.



Obr. 4



Obr. 5

Iné riešenie. Označme S stred prepony AB a N stred úsečky AM (obr. 5). Pretože $|AM| = 2|CM|$, je $|AN| = |MN| = |MC|$, takže úsečky MN a AC majú spoločnú os. Pretože $|AS| = |CS|$ (Tálesová kružnica nad priemerom AB), leží na tejto osi aj bod S. Preto tiež $|SM| = |SN|$. Zároveň však $|AN| = |NM| = |NS|$ (Tálesová kružnica nad priemerom AM), takže trojuholník MNS je rovnostranný. Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle BAC| = 30°$ a $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

Iné riešenie. Z podobnosti trojuholníkov ASM a ACB vyplýva

$$\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Pri obvyklom označení $a = |BC|$, $b = |CA|$ a $c = |AB|$ strán trojuholníka ABC platí $|AS| = \frac{c}{2}$, $|AM| = \frac{2}{3}b$. Potom z predchádzajúcej rovnosti dostávame

$$\frac{3c}{4b} = \frac{b}{c}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Z pravouhlého trojuholníka ABC však potom vyplýva $|\sphericalangle BAC| = 30°$ a $|\sphericalangle ABC| = 60°$.

C – S – 2

Označme s súčet myslených čísel. Potom dvojice čísel, ktoré si mohol Miro myslieť, môžeme napísať do stĺpcov (sú 4 možnosti):

10	$s-10$	10	$s-10$	99	$s-99$	99	$s-99$
11	$s-9$	11	$s-9$	98	$s-98$	98	$s-98$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x	$x+1$	x	$x+2$	$x+1$	x	$x+2$	x

V našom prípade budú v každom stĺpci štyri dvojice:

10	17	10	18	99	92	99	91
11	16	11	17	98	93	98	92
12	15	12	16	97	94	97	93
13	14	13	15	96	95	96	94

Vzhľadom na podmienku v zadaní si mohol Miro myslieť 4 dvojice čísel (4 riešenia): (17, 10), (17, 11), (97, 94) a (97, 93).

C – S – 3

Označme hľadané prirodzené čísla m, n, r a s. Súčasne musí platiť

$$mn + rs = 51,$$
$$mr + ns = 51,$$
$$ms + nr = 51.$$

Odčítaním prvých dvoch rovníc vyjde $(m - s)(n - r) = 0$, takže $m = s$ alebo $n = r$, a odčítaním posledných dvoch rovníc vyjde $(m - n)(r - s) = 0$, takže $m = n$ alebo $r = s$. To znamená, že tri z uvažovaných čísel sú rovnaké. Ďalej je zrejmé, že z troch čísel a a jedného čísla b môžeme zostaviť jediný taký súčet $a^2 + ab = a(a + b) = 51$. Číslo 51 má dva rôzne rozklady na súčin dvoch čísel, $51 = 3 \cdot 17 = 1 \cdot 51$, takže musí byť (zrejme $a < a + b$) buď $a = 3$, $b = 14$, alebo $a = 1$, $b = 50$.

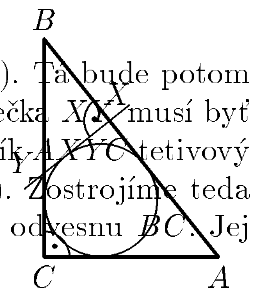
Riešením úlohy sú dve štvorice prirodzených čísel $(3, 3, 3, 14)$ a $(1, 1, 1, 50)$.

C – II – 1

Číslo $1\,000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$ má byť druhou mocninou, preto musí byť číslo $100a + b$ deliteľné číslom 11 a podiel $\frac{1}{11}(100a + b) = 9a + \frac{1}{11}(a + b)$ musí byť druhou mocninou prirodzeného čísla. Vzhľadom na to, že a a b ($a \neq 0$) sú číslice, musí byť $a + b = 11$, a pretože $9a + 1$ má byť druhou mocninou, vyjde $a = 7$. Hľadané číslo je $7\,744 = 88^2$.

C – II – 2

Najprv zostrojíme kružnicu k vpísanú do trojuholníka ABC (obr. 6). Tá bude potom tiež kružnicou vpísanou hľadanému štvoruholníku $AXYC$, takže úsečka XY musí byť dotyčnicou k tejto kružnici. Pretože uhol ACB je pravý, je štvoruholník $AXYC$ tetivový práve vtedy, keď je aj uhol YXA pravý ($|\sphericalangle YXA| + |\sphericalangle YCA| = \pi$). Zostrojíme teda dotyčnicu ku kružnici k, ktorá je kolmá na preponu AB a pretína odvesnu BC. Jej priesečníky s AB a BC sú hľadané body X a Y.



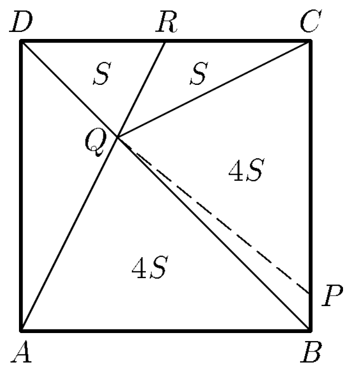
Obr. 6

C – II – 3

Janko poznal rozdiel oboch čísel, pričom vieme, že existuje práve 63 dvojíc dvojciferných čísel s týmto rozdielom. Usporiadajme jednotlivé dvojice tak, aby na prvom mieste bolo väčšie z oboch čísel, a dvojice zoraďme tak, aby čísla na prvých, a teda aj na druhých miestach klesali. Prvá dvojica má na prvom mieste číslo 99, posledná dvojica má na druhom mieste číslo 10. Je ich 63, preto prvá dvojica má na druhom mieste číslo 72 $(9+63)$. Janko teda vedel, že mamička zvolila jednu z dvojíc $(99,72)$, $(98,71),\ldots,$ $(38,11)$, $(37,10)$, rozdiel v každej dvojici je 27. Ak si mamička myslela čísla $27+m$ a m, potom dvojice s rovnakým súčtom $27+2m$ sú $(14+m,13+m)$, $(15+m,12+m),\ldots,(27+m,m)$, $(28+m,m-1)$, $(29+m,m-2),\ldots$ Marienka vedela, že ich je práve 40, takže posledná možná dvojica musela byť $(53+m,m-26)$. V ďalšej dvojici už musí byť buď prvé číslo trojciferné, teda $54+m=100$, $m=46$ a mamička si myslela čísla $27+46=73$ a 46, alebo musí byť druhé číslo už jednociferné, teda $m-27=9$ a ide o dvojicu $(63,36)$. Úloha má dve riešenia.

C – II – 4

Označme S obsah trojuholníka RDQ (obr. 7), rovnaký obsah má aj trojuholník RCQ, obsah trojuholníka ABQ je $4S$ (pretože $|AB|=2|DR|$, sú trojuholníky ABQ a RDQ podobné s koeficientom 2) a trojuholník QBC má obsah $4S$ (zo súmernosti podľa osi BD). Obsah štvoruholníka $ABCR$ je $9S$, preto musíme bod P zvoliť tak, aby obsah trojuholníka PQB bol $\frac{1}{2}S$, teda $|BP|=\frac{1}{8}|BC|$.



Obr. 7

Kategória B

B – I – 1

Dokážeme, že hľadanú uzavretú lomenú čiaru možno nájsť vždy v pravidelnom $(2n+1)$-uholníku $(n \geqq 2)$, a že je nemožno nájsť v pravidelnom $2n$-uholníku $(n \geqq 2)$.

Uvažujme teda na začiatok $(2n+1)$-uholník a označme jeho vrcholy po rade $A_0, A_1, \dots, A_{2n}$. Ďalej nech pre $k > 2n$ platí $A_k \equiv A_i$, kde $i \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ je zvyšok čísla k po delení číslom $2n+1$. Uvažujme uzavretú lomenú čiaru $A_0 A_n A_{2n} \dots A_{(2n+1)n}$, spojené sú vždy vrcholy, ktorých indexy sa líšia o n. Zrejme pre $n \geqq 2$ je každá úsečka $A_{kn} A_{(k+1)n}$ uhlopriečka, rovnako je zrejmé, že všetky body tejto lomenej čiary sú navzájom rôzne (až na prvý a posledný). Ak by totiž platilo $kn \equiv ln \pmod{2n+1}$, $0 \leqq k, l \leqq 2n$, tak $k \equiv l \pmod{2n+1}$, pretože čísla n a $2n+1$ sú nesúdeliteľné.

Každá z uvedených uhlopriečok rozdeľuje všetky vrcholy $(2n+1)$-uholníka s výnimkou svojich koncových bodov do dvoch skupín. Vo vnútri oboch týchto skupín sa indexy bodov líšia najviac o $n-1$, z čoho potom vyplýva, že ľubovoľné dve uhlopriečky uvažovanej lomenej čiary sa pretínajú (vzdialenosť susedných vrcholov v nej je vždy práve n).

Teraz dokážeme, že pre pravidelný $2n$-uholník $(n \geqq 2)$ hľadaná lomená čiara neexistuje. Označme jeho vrcholy $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Nech $A_1 A_k$ je jedna z uhlopriečok tvoriacich hľadanú lomenú čiaru. Nech druhá uhlopriečka (patriaca lomenej čiare) vychádzajúca z vrcholu A_1 vedie do bodu A_l a druhá vychádzajúca z vrcholu A_k nech vedie do vrcholu A_m. Ak by $l < k < m$, potom by sa tieto dve uhlopriečky nepretínali (rovnako v prípade $l > k > m$), preto zrejme musia ležať „na jednej strane“, čiže buď $m, l \in \mathcal{A} = \{2, 3, \dots, k-1\}$ alebo $m, l \in \mathcal{B} = \{k+1, k+2, \dots, 2n\}$. Bez ujmy na všeobecnosti nech m a l patria do $\mathcal{A}$. Pokračujme v lomenej čiare z bodu A_l, zrejme druhý koniec tejto uhlopriečky musí ležať v $\mathcal{B}$, inak by táto uhlopriečka nepretínala uhlopriečku $A_1 A_k$. Z koncového vrcholu vedieme opäť uhlopriečku do $\mathcal{A}$ atď. Časom musíme skončiť vo vrchole A_m, a to tak, že navštívime postupne všetky vrcholy množín $\mathcal{A}$ aj $\mathcal{B}$. Keďže však sa táto časť lomenej čiary začína aj končí v množine $\mathcal{A}$ a jej vrcholy ležia striedavo v množinách $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ musí $\mathcal{A}$ obsahovať o jeden vrchol viac ako $\mathcal{B}$. Preto je počet vrcholov celého $2n$-uholníka rovný $|A| + |B| + 2$ (vrcholy A_1 a A_k), čo je zrejme nepárne číslo.

B – I – 2

Funkciu budeme hľadať v tvare $f(x) = ax^2 + bx + c$. Keďže jej graf prechádza počiatkom súradníc, $c = 0$. Preto $f(x) = ax^2 + bx$ pre vhodné konštanty a, b.

Preskúmame najprv možnosti, keď je $f(x)$ na intervale $\langle 2, 5 \rangle$ monotónna, a teda buď

a) $f(2) = 15, \quad f(5) = 27$ ak je tam rastúca, alebo

b) $f(2) = 27, \quad f(5) = 15$ ak je tam klesajúca.

Riešme najprv prípad a). Dostaneme dve lineárne rovnice $4a + 2b = 15$ a $25a + 5b = 27$. Riešením tejto sústavy je $a = -\frac{7}{10}$ a $b = \frac{89}{10}$. Ešte musíme overiť, či je skutočne $f(x)$ na intervale $\langle 2, 5\rangle$ monotónna. Stačí zrejme zistiť, či nenadobúda svoj extrém (maximum) na tomto intervale. V našom prípade sa zrejme extrém nachádza v bode $\frac{89}{14}$, ktorý je mimo uvažovaného intervalu.

Prípad b). Obdobne ako v a) dostaneme funkciu $-\frac{7}{2}x^2 + \frac{41}{2}x$, ktorá nadobúda maximum v bode $\frac{41}{14}$, ktorý však tentokrát je v intervale $\langle 2, 5\rangle$, a hodnota funkcie v ňom je väčšia ako 27, teda táto funkcia nevyhovuje zadaným podmienkam.

Nech teraz $f(x)$ nie je na intervale $\langle 2, 5\rangle$ monotónna. Z tvaru kvadratickej funkcie vyplýva, že $f(x)$ mení svoju monotónnosť len v bode extrému, teda v našom prípade bude bod $-\frac{b}{2a}$ ležať intervale $\langle 2, 5\rangle$. Keďže y-ová súradnica vrchola paraboly je $-\frac{b^2}{4a}$, tak buď $-\frac{b^2}{4a} = 27, a < 0$ (1) alebo $-\frac{b^2}{4a} = 15$ pre $a > 0$, čo však zrejme nemôže byť minimum.

Minimum sa nadobúda na kraji intervalu, nastáva teda práve jedna z nasledujúcich možností

$$\text{a) } f(2) = 15;\quad 4a + 2b = 15; \tag{2}$$

$$\text{b) } f(5) = 15;\quad 25a + 5b = 15; \tag{3}$$

V prípade a) vyjadríme z (2) výraz $4a$ a dosadíme do (1). Dostaneme kvadratickú rovnicu $b^2 - 54b + 405 = 0$, ktorá má dva korene $b = 9; b = 45$. V jednotlivých prípadoch dostávame kvadratické funkcie:

$$f(x) = -\frac{75}{4}x^2 + 45x; \qquad f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 9x.$$

Pretože ani jedna z nich nemá extrém v $\langle 2, 5\rangle$, nevhovujú zadaným podmienkam.

V prípade b) obdobne dostávame kvadratickú rovnicu $5b^2 - 108b + 324 = 0$, ktorá má dva korene $b = 18; b = \frac{18}{5}$. V jednotlivých prípadoch tentokrát dostávame kvadratické funkcie:

$$f(x) = -3x^2 + 18x; \qquad f(x) = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{18}{5}x.$$

Opäť overíme, či tieto funkcie nadobúdajú svoj extrém v $\langle 2, 5\rangle$. Tentokrát vyhovuje len prvá funkcia.

Takto sme dostali všetky možné riešenia, kvadratické funkcie:

$$f(x) = -\frac{7}{10}x^2 + \frac{89}{10}x; \qquad f(x) = -3x^2 + 18x.$$

B – I – 3

Číslo $\underbrace{111\ldots111}_{24}$ je deliteľné siedmimi, preto 24-miestne číslo, ktoré má na m-tom a n-tom mieste dvojku a inde jednotky dáva po delení siedmimi taký istý zvyšok ako číslo $10^{m-1}+10^{n-1}$. Utvorme tabuľku zvyškov mocnín čísla 10 po delení siedmimi:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10^k \pmod 7$	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6

Vidíme, že zvyšky sa začínajú opakovať s periódou 6, takže mocniny desiatky, ktorých exponenty sa líšia o násobok 6, majú rovnaké zvyšky. Nasledujúca tabuľka ukazuje, ako voliť $m-1$ resp. $n-1$ modulo 6, keď chceme, aby číslo s dvojkami na m-tom mieste a n-tom mieste bolo deliteľné 7.

$m-1$	0	1	2	3	4	5
$n-1$	3	4	5	0	1	2

Jeden exponent môžno vždy voliť ľubovoľne, druhý má potom určený zvyšok modulo 6. Keďže $1 \leqq m, n \leqq 24$, máme $\dfrac{24\cdot 4}{2} = 48$ možností.

B – I – 4

Označme rovnice

$$x+y+z=3, \tag{1}$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0, \tag{2}$$
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}. \tag{3}$$

Uvažujme rovnicu (3). Po jej úprave na spoločného menovateľa, vynásobení a prenesení všetkých členov na jednu stranu rovnice dostaneme

$$(x-z)xz+(z-y)zy+(y-x)yx=0,$$

čo dáva ďalej

$$(y-x)(x-z)(z-y)=0.$$

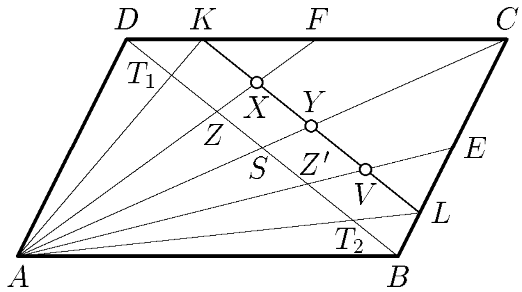
Bez ujmy na všeobecnosti nech $x=y$. Po dosadení do (1) a (2) dostávame sústavu:

$$2x+z=3 \quad (4) \qquad \frac{2}{x}+\frac{1}{z}=0 \quad (5)$$

Po vyjadrení z z (5) a dosadení do (4) máme $x=y=2, z=-1$. Vzhľadom na ekvivalentnosť použitých úprav sú zrejme táto usporiadaná trojica a jej permutácie $[2,-1,2]$ a $[-1,2,2]$ jedinými riešeniami sústavy.

B – I – 5

Označme body X, Y, S, V a Z ako na obr. 8. Ďalej označme x pomer dĺžok úsečiek $\dfrac{|FK|}{|FD|}$. Keďže DS a AF sú ťažnice trojuholníka ADC, platí $|DZ| = \frac{2}{3}|DS|$. Z podobnosti trojuholníkov FXK a FZD máme $|KX| = x \cdot |ZD| = \dfrac{2}{3} \cdot x \cdot |DS|$. Z podobnosti trojuholníkov CSD a CYK máme zase $|KY| = \dfrac{1+x}{2} \cdot |DS|$. Podľa zadania má platiť $|KY| = 2 \cdot |KX|$, teda $\dfrac{4x}{3} = \dfrac{1+x}{2}$, z čoho $x = \dfrac{3}{5}$.



Obr. 8

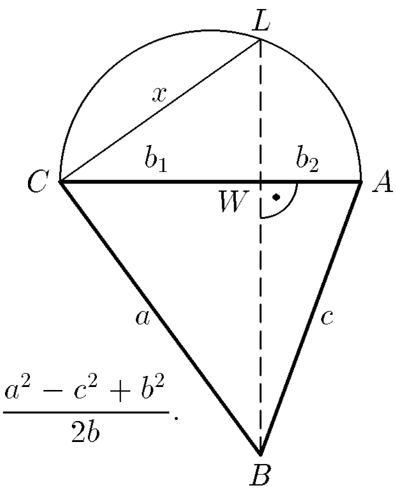
Zrejme tiež $x = \dfrac{|EL|}{|EB|}$, z čoho okamžite vyplýva, že AE delí úsečku YL v rovnakom pomere ako AF úsečku KY. Na prevedenie konštrukcie si už stačí uvedomiť, že $|KY| = |YL|$. Ďalšie kroky sú zrejmé.

Iné riešenie. Pretože $|KX| = |XY|$, je tiež $|T_1Z| = |ZS|$ (a podobne $|T_2Z'| = |Z'S|$). Bod T_1 je teda stred DZ. Bod K možno dostať ako priesečník priamky AT_1 s CD.

B – I – 6

Označme W pätu výšky na stranu AC v trojuholníku ABC. Ďalej označme $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c, |CW| = b_1$ a $|WA| = b_2$. Nech $x = |CL|$ (obr. 9). Z *Pytagorovej vety* pre trojuholníky CWB a BWA platí:

$$a^2 - b_1^2 = c^2 - b_2^2$$
$$a^2 - c^2 = b_1^2 - b_2^2$$



Obr. 9

Ak teraz použijeme vzťah $b_1 + b_2 = b$, tak dostaneme $b_1 = \dfrac{a^2 - c^2 + b^2}{2b}$.

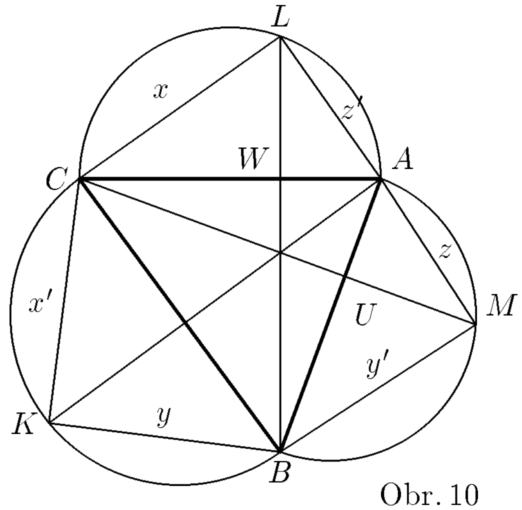
Z *Euklidovej vety* ďalej máme

$$x = \sqrt{b_1 b} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2}}.$$

Ak ďalej zavedieme označenie podľa obr. 10, zo symetrie potom zrejme

$$x' = \sqrt{\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2}}, \qquad \text{takže } x = x'. \tag{1}$$

Cyklickou zámenou tiež $y = y'$ (2) a $z = z'$ (3). Navyše sú uhly pri vrcholoch K, L a M pravé, takže ich súčet je menší ako 360°. Avšak rovnosti (1), (2) a (3) spolu so súčtom uhlov menším ako 360° sú zrejme postačujúcou podmienkou, aby obrazec $AMBKCL$ tvoril plášť štvorstena.



Obr. 10

Iné riešenie. Ak označíme U priesečník CM a AB, potom sú trojuholníky ACU a ABW podobné, lebo majú dva rovnako veľké uhly. Z toho $\dfrac{|CA|}{|AU|} = \dfrac{|BA|}{|AW|}$. Odtiaľ ďalej $|AC| \cdot |AW| = |BA| \cdot |AU|$. Z *Euklidových viet* v trojuholníkoch ACL a ABM potom okamžite $|AL|^2 = |AM|^2$, čiže $z = z'$. Obdobne ostatné rovnosti. Ďalší postup je rovnaký ako v prvom riešení.

B – S – 1

Najprv nájdeme všetky čísla tvaru $6A\,B73$, ktoré sú deliteľné 99-timi. Potom ukážeme, že všetky tieto čísla sú deliteľné 19-timi (ukáže sa, že takéto číslo je len jedno).

Číslo $6A\,B73$ môžeme zapísať ako

$$6A\,B73 = 60\,073 + 1\,000 \cdot A + 100 \cdot B = 60\,073 + 100 \cdot (10 \cdot A + B).$$

Toto číslo je deliteľné 99-mi práve vtedy, keď je deliteľné 99-mi číslo $10 \cdot A + B + 79$, pretože

$$60\,073 + 100 \cdot (10 \cdot A + B) = 99 \cdot (606 + (10 \cdot A + B)) + 10 \cdot A + B + 79.$$

Číslo $10 \cdot A + B + 79$ je prirodzené číslo z intervalu $\langle 79, 178 \rangle$. Ak má byť deliteľné 99-timi, musí zrejme byť rovné 99, čo nastáva len v prípade $A = 2$ a $B = 0$. Vtedy však $6A\,B73 = 62\,073 = 19 \cdot 3\,267$, a tým je tvrdenie v zadaní dokázané.

B – S – 2

Po dosadení čísla $x = 1 - \sqrt{2}$ do danej rovnice a jednoduchej úprave dostávame

$$(5 + 2a + b) \cdot \sqrt{2} = 7 + 3a + b + c.$$

Potom musí platiť:

$$(5 + 2a + b) = 0; \qquad 7 + 3a + b + c = 0.$$

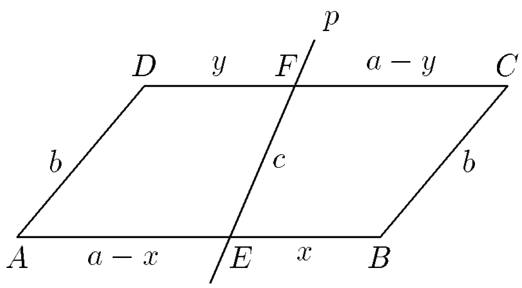
(Ak by $5+2a+b \neq 0$, tak číslo $\sqrt{2}$ je rovné podielu dvoch celých čísel, čiže je racionálne, to však nie je pravda.) Z týchto dvoch rovníc vyjadríme b a c pomocou a: $b = -5 - 2a$ a $c = -2 - a$. Potom

$$a - 2b + 5c = a - 2 \cdot (-5 - 2a) + 5 \cdot (-2 - a) = 0.$$

Tým je tvrdenie dokázané.

B – S – 3

Najprv predpokladajme, že hľadaná priamka p pretne protiľahlé strany AB a CD, a to po rade v bodoch E a F. Ďalej označme $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |DA| = b$, $|EF| = c$, $|DF| = y$ a $|EB| = x$ (obr. 11).



Obr. 11

Štvoruholník je dotyčnicový (vpísaný do kružnice) práve vtedy, keď má rovnaké obidva súčty dĺžok protiľahlých strán. Preto $b + c = a - x + y$ (štvoruholník $AEFD$) a $b + c = x + a - y$ (štvoruholník $EBCF$). Odtiaľ $x = y$ a $c = a - b$. Keďže je každý rovnobežník stredovo súmerný, tak bod S – stred EF – je priesečník uhlopriečok BD a AC. Odtiaľ vyplýva konštrukcia:

1. kružnica k; $k\left(S; \dfrac{a-b}{2}\right)$; S je stred AC;
2. body E, F; $E \in k \cap AB$, $F \in k \cap CD$;
3. priamka p; $p = \overleftrightarrow{EF}$.

Počet riešení závisí od počtu priesečníkov kružnice k so stranou AB (bez bodov A a B). Určme ich počet v závislosti na parametroch $ABCD$. Označme preto vzdialenosť priamok AB a CD ako v, $v = b\sin\alpha$. Z trojuholníkových nerovností pre trojuholníky ABC a ABD máme $a-b<|BD|$, $a-b<|AC|$. Preto môžu nastať len tri prípady:

• Kružnica k má so stranou AB jediný priesečník. To nastáva práve vtedy, keď $v=|EF|=a-b$, teda $a=b+b\sin\alpha$. Vtedy má úloha práve jedno riešenie.

• Kružnica k má so stranou AB dva priesečníky. To nastáva práve vtedy, keď $v<|EF|=a-b$, čiže $a>b+b\sin\alpha$. Vtedy má úloha práve dve riešenia (nie štyri, lebo priamka p musí prechádzať bodom S).

• Kružnica k nemá so stranou AB žiaden priesečník. To nastáva práve vtedy, keď $v>|EF|=a-b$, teda $a<b+b\sin\alpha$. Vtedy nemá úloha žiadne riešenie.

Ak priamka p pretína strany AD a BD, všetky úvahy možno previesť analogicky. Zrejme oba prípady nemôžu nastať súčasne.

Diskusia.

Úloha má práve jedno riešenie, ak $a=b\cdot(1+\sin\alpha)$ alebo $b=a\cdot(1+\sin\alpha)$.

Úloha má práve dve riešenia, ak $a>b\cdot(1+\sin\alpha)$ alebo $b>a\cdot(1+\sin\alpha)$.

V ostatných prípadoch úloha nemá riešenie.

Iné riešenie. Nech k_1 je kružnica, ktorá sa dotýka strán AB, AD a BC, k_2 kružnica dotýkajúca sa strán AB,BC a CD. Hľadaná priamka p je spoločná dotyčnica kružníc $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ (rôzna od AB a CD). Jej konštrukcia môže byť nasledujúca: bodom S_1 vediem dotyčnicu ku kružnici $k_3(S_2,r_1+r_2)$ a potom túto dotyčnicu posunieme v smere na ňu kolmom o vzdialenosť r_1 (smerom k bodu S_2). Táto priamka sa zrejme bude dotýkať oboch kružníc k_1 a k_2.

B – II – 1

Odčítaním prvej rovnice od druhej a druhej rovnice od tretej dostaneme po úprave

$$(x-y)(3+x+y)=0, \qquad (y-z)(3+y+z)=0.$$

Z týchto dvoch rovníc vyplýva, že musí platiť $x=y$ alebo $3+x+y=0$, a zároveň $y=z$ alebo $3+y+z=0$. Prebratím jednotlivých možností zistíme, že môžu nastať len nasledujúce dva prípady: buď sa všetky tri čísla x, y a z navzájom rovnajú, alebo sú dve z nich rovnaké (bez ujmy na všeobecnosti napr. $x=y$); tretie číslo potom vypočítame zo vzťahu $z=-y-3$. Ostatné riešenia dostaneme permutáciou takto nájdenej trojice (x,y,z).

• Ak $x=y=z$, tak je daná sústava ekvivalentná s (jedinou) kvadratickou rovnicou $2x^2-3x-14=0$ s koreňmi $x_1=\frac{7}{2}$ a $x_2=-2$. Odtiaľ vychádzajú dve riešenia: $x=y=z=\frac{7}{2}$ a $x=y=z=-2$.

• Ak $x=y$ a $z=-y-3$, tak je daná sústava ekvivalentná s (jedinou) kvadratickou rovnicou $2y^2+3y-5=0$ s koreňmi $y_1=-\frac{5}{2}$ a $y_2=1$. Odtiaľ vychádzajú dve riešenia $x=y=-\frac{5}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$ a $x=y=1$, $z=-4$ a permutáciou trojice (x,y,z) dostaneme ďalšie štyri riešenia $x=z=-\frac{5}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$; $x=z=1$, $y=-4$; $y=z=-\frac{5}{2}$, $x=-\frac{1}{2}$; $y=z=1$, $x=-4$.

Všetkých osem nájdených riešení spĺňa dané rovnice (skúška nie je potrebná, pretože z uvedeného postupu vidno, že nájdené trojice x, y a z danej sústave skutočne vyhovujú).

B – II – 2

Zrejme stačí skúmať funkciu $g(x) = x^3 - px^2$, pretože nadobúda svoje minimá na každom intervale v rovnakých bodoch ako daná funkcia $f(x)$. Funkcia $g(x)$ má na intervale $\langle 0, 1\rangle$ minimum v bode 1, práve vtedy keď pre všetky x z tohoto intervalu platí $g(x) \geqq g(1)$, čiže $x^3 - px^2 \geqq 1 - p$. Po úprave dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$x^3 - 1 \geqq p(x^2 - 1), \tag{1}$$

ktorú môžeme upraviť na tvar

$$(1 - x)\big(x^2 + x + 1 - p(x + 1)\big) \leqq 0.$$

Vzhľadom na to, že pre číslo $x = 1$ je nerovnosť (1) splnená triviálne, môžeme pre $x \in \langle 0, 1)$ vydeliť poslednú nerovnosť dvojčlenom $1 - x$ a dostaneme ekvivalentnú podmienku

$$q(x) = x^2 + (1 - p)x + 1 - p \leqq 0.$$

Pretože $q(x)$ je kvadratická funkcia s kladným koeficientom pri x^2 (jej grafom je parabola „obrátená nahor"), platí nerovnosť $q(x) \leqq 0$ pre všetky $x \in \langle 0, 1)$, práve keď súčasne platí $q(0) \leqq 0$ a $q(1) \leqq 0$, t.j. práve keď $1 - p \leqq 0$ a $3 - 2p \leqq 0$. Spolu tak vychádza jediná (nutná aj postačujúca) podmienka $p \geqq \frac{3}{2}$.

Iné riešenie. Po odvodení nerovnosti (1) môžeme postupovať aj nasledujúco. Pre číslo $x = 1$ je nerovnosť triviálne splnená, pre $x \in \langle 0, 1)$ môžeme nerovnosť vydeliť záporným dvojčlenom $x^2 - 1$, takže vyjde

$$p \geqq \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1} \tag{2}$$

pre všetky $x \in \langle 0, 1)$. Ukážeme, že funkcia $h(x) = x + \dfrac{1}{x + 1}$ je na tomto intervale rastúca.

Pokiaľ totiž $x \geqq 0$ a $\varepsilon > 0$, platí $h(x + \varepsilon) > h(x)$, pretože

$$x + \varepsilon + \frac{1}{x + \varepsilon + 1} > x + \frac{1}{x + 1}, \qquad \text{čo po úprave dáva} \qquad 1 < (x + \varepsilon + 1)(x + 1).$$

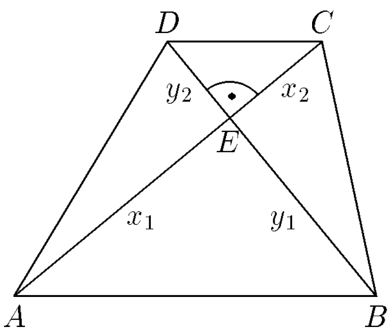
Táto nerovnosť však vzhľadom na voľbu x a ε platí, a pretože všetky úpravy boli ekvivalentné, dokázali sme, že funkcia $h(x)$ je rastúca dokonca na intervale $\langle 0, \infty)$. Nerovnosť (2) je splnená pre všetky $x \in \langle 0, 1)$, práve keď platí pre $x = 1$, t.j. práve keď $p \geqq \frac{3}{2}$. Riešením sú všetky reálne čísla p z intervalu $\big\langle \frac{3}{2}, \infty\big)$.

Iné riešenie. Po uhádnutí výsledku $p \geqq \frac{3}{2}$ stačí ukázať, že pre takéto p nerovnosť (1) platí (pre $x \in \langle 0,\, 1 \rangle$). Na to však stačí overiť nerovnosť $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} \leqq \dfrac{3}{2}$, čo je vzhľadom na prípustné hodnoty x ekvivalentné s nerovnosťou $2x^2 - x - 1 \leqq 0$, čiže $(x-1)(2x+1) \leqq 0$, čo zjavne platí.

Poznámka. Možno postupovať aj pomocou dif. počtu. Z prvej a druhej derivácie možno nahliadnuť, že na intervale $\langle 0,\, 1 \rangle$ nadobúda funkcia $f(x)$ len dva extrémy: v bode $x = 0$ a v bode $x = \dfrac{2p}{3}$. Z toho potom možno usúdiť, že vyhovujú práve čísla $p \geqq \dfrac{3}{2}$.

B – II – 3

Zaveďme označenie podľa obr. 12. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $|AB| > |CD|$. Potom z podobnosti trojuholníkov ABE a CDE vyplýva, že $x_1 > x_2$ a $y_1 > y_2$.



Obr. 12

Zrejme $|AB| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|BC| = \sqrt{x_2^2 + y_1^2}$, $|CD| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ a $|DA| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$, takže dokazovaná nerovnosť prejde do tvaru

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} < \sqrt{x_2^2 + y_1^2} + \sqrt{x_1^2 + y_2^2}.$$

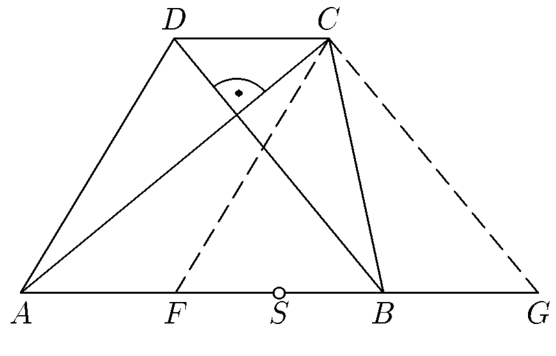
Po umocnení a ľahkej úprave dostaneme nerovnosť

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} < \sqrt{x_1^2 + y_2^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_1^2},$$

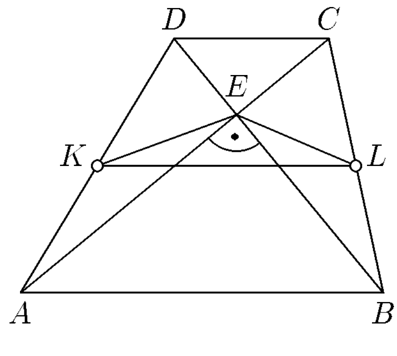
čo možno upraviť na

$$0 < (x_1^2 - x_2^2)(y_1^2 - y_2^2).$$

Posledná rovnosť ale vzhľadom na predpoklady na začiatku riešenia platí. Keďže všetky vykonané úpravy boli ekvivalentné, tvrdenie je dokázané.



Obr. 13



Obr. 14

Iné riešenie. Veďme bodom C rovnobežky $CF \parallel DA$ a $CG \parallel DB$ (obr. 13). Ďalej označme S stred AG. Pretože $|\sphericalangle ACG| = 90°$, $|BG| = |CD|$ a $|FC| = |AD|$, tak $|AB| + |CD| = |AG| = 2|CS|$, $|AD| + |BC| = |CF| + |CB|$. Stačí teda dokázať, že $2|CS| < |CF| + |CB|$. Keďže $|AF| = |CD| = |BG|$, tak S je aj stred úsečky FB, a tak CS

je ťažnica v trojuholníku FBC. Preto ak trojuholník FBC doplníme na rovnobežník $FHBC$, tak z trojuholníkovej nerovnosti dostaneme

$$|CF| + |CB| = |HB| + |CB| > 2|CS|.$$

Tým je tvrdenie dokázané.

Iné riešenie. Pre dĺžku úsečky KL spájajúcu stredy ramien AD a BC ľubovoľného lichobežníka (obr. 14) platí známy vzorec

$$|KL| = \tfrac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

Bod E nemôže ležať na úsečke KL, pretože inak by bolo $|AE| = |EC|$ a $|BE| = |ED|$, čo by znamenalo, že $ABCD$ je rovnobežník, a preto z predchádzajúcej rovnosti vyplýva

$$|AB| + |CD| = 2|KL| < 2\left(|KE| + |LE|\right) = 2|KE| + 2|LE| = |AD| + |BC|$$

(posledná rovnosť vyplýva z toho, že KE, resp. LE sú polomery Tálesových kružníc nad priemermi AD, resp. BC, na ktorých bod E v prípade kolmých uhlopriečok leží). Tým je dôkaz ukončený.

B – II – 4

Označme si číslice A, B, C a D. Žiaci mali sčítať 24 čísel. Každá číslica sa v týchto číslach nachádza šesťkrát na prvom, šesťkrát na druhom a šesťkrát na treťom mieste. Preto je súčet S všetkých týchto čísel rovný $S = 6 \cdot 111 \cdot (A+B+C+D)$. Janko zabudol na jedno trojciferné číslo, ktoré určite neprevyšuje 987. Preto platia nerovnosti

$$12\,497 < S \leqq 12\,497 + 987,$$

čiže

$$12\,497 < 666 \cdot (A + B + C + D) \leqq 13\,484.$$

Odtiaľ $19 \leqq A + B + C + D \leqq 20$. Môžu nastať dva prípady:

- $A + B + C + D = 19$, potom $S = 12\,654$ a chýbajúce číslo je 157. Štvrtá číslica je teda 6.
- $A + B + C + D = 20$, potom $S = 13\,320$ a chýbajúce číslo je 823. Štvrtá číslica je teda 7.

Úloha má preto dve riešenia. Buď boli na tabuli napísané číslice 1, 5, 6 a 7 a Janko zabudol na číslo 157, alebo to boli číslice 2, 3, 7 a 8 a Janko zabudol na číslo 823.

Kategória A

A – I – 1

Pretože 3^6 dáva po delení 7 zvyšok 1 a $6 \mid n_k$ pre $k \geqq 2$, platí $7 \mid 3^{n_k} - 1$ pre $k \geqq 2$. Na druhej strane, $7 \mid n_k$ pre $k \geqq 4$, takže pre všetky $k \geqq 4$ možno daný zlomok krátiť číslom 7. Samostatne sa presvedčíme, že pre $k = 2, 3$ možno zlomok krátiť len číslom 2.

A – I – 2

Označme x_1, x_2 korene polynómu f a y_1, y_2 korene polynómu g. Podľa zadania má platiť

$$g(x_1), g(x_2) \in \{x_1, x_2\} \quad \text{a} \quad f(y_1), f(y_2) \in \{y_1, y_2\}.$$

V ďalšom rozlíšime 3 možnosti pre hodnoty $g(x_i)$:

- G1: $g(x_1) = g(x_2)$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $g(x_1) = g(x_2) = x_1$. Potom ale kvadratický polynóm $g(x) - x_1$ má korene x_1, x_2, a je teda $g(x) - x_1 = f(x)$ (pokiaľ majú normované kvadratické trojčleny spoločné dva rôzne korene, zhodujú sa ich koeficienty).
- G2: $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$. V tomto prípade má kvadratický polynóm $g(x) - x$ korene x_1, x_2, a je teda $g(x) - x = f(x)$.
- G3: $g(x_1) = x_2$, $g(x_2) = x_1$. V tomto prípade má kvadratický polynóm $g(x) + x - x_1 - x_2$ korene x_1, x_2, a je teda $g(x) + x - x_1 - x_2 = f(x)$.

Podobne pre hodnoty $f(y_i)$ rozlíšime 3 možnosti:

- F1: $f(y_1) = f(y_2)$, a teda $f(x) - y_1 = g(x)$ (opäť bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $f(y_1) = f(y_2) = y_1$).
- F2: $f(y_1) = y_1, f(y_2) = y_2$, a teda $f(x) - x = g(x)$.
- F3: $f(y_1) = y_2, f(y_2) = y_1$, a teda $f(x) + x - y_1 - y_2 = g(x)$.

V prípadoch G1, F1 sa polynómy f a g líšia o konštantu (pre koeficienty teda platí $a = c$), v ostatných prípadoch sa lineárne členy f a g líšia, pričom $a = c + 1$ v prípadoch G3 a F2, a $a = c - 1$ v prípadoch G2 a F3. Tieto tri možnosti teraz prešetríme.

G1–F1: Podľa G1 je $g(x) - f(x) = x_1$, podľa F1 je $g(x) - f(x) = -y_1$. Máme teda

$$x_1 = -y_1.$$

Ďalej pre korene kvadratických trojčlenov platí

$$x_1 + x_2 = -a = -c = y_1 + y_2,$$

a teda

$$y_2 = x_1 + x_2 - y_1 = 2x_1 + x_2.$$

Z Viètových vzťahov pre koeficienty kvadratického trojčlena dostávame

$$x_1 x_2 = b = d + y_1 = y_1 y_2 + y_1 = y_1(y_1 + 1) = -x_1(2x_1 + x_2 + 1),$$

alebo

$$x_1(2x_1 + 2x_2 + 1) = 0.$$

Je teda buď $x_1 = 0$, alebo $x_2 = -x_1 - \frac{1}{2}$.

V prvom prípade potom je $y_1 = 0$, $x_2 = \beta$ ľubovoľné a $y_2 = x_2$, čo vedie k riešeniu

$$f(x) = g(x) = x^2 - \beta x, \quad \beta \neq 0.$$

(Podmienka $\beta \neq 0$ zaručuje rôznosť koreňov trojčlenov. Ako f, tak g majú korene 0 a β, pričom $f(0) = f(\beta) = g(0) = g(\beta) = 0$ je opäť koreň f aj g.)

V druhom prípade je $x_1 = \alpha$ ľubovoľné, $x_2 = -\alpha - \frac{1}{2}$, $y_1 = -\alpha$, $y_2 = \alpha - \frac{1}{2}$, odkiaľ máme druhé riešenie

$$f(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \alpha^2 - \frac{\alpha}{2}, \quad g(x) = x^2 + \frac{x}{2} - \alpha^2 + \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha \neq \pm\frac{1}{4}.$$

(Podmienka $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}$ je opäť kvôli rôznosti koreňov trojčlenov. Dosadením sa ľahko presvedčíme, že $g(\alpha) = g(-\alpha - \frac{1}{2}) = \alpha$ a $f(-\alpha) = f(\alpha - \frac{1}{2}) = -\alpha$, a teda f a g vyhovujú požiadavkám úlohy.)

G2–F3: Z G2 vyplýva $g(x) = f(x) + x$, z F3 vyplýva $g(x) = f(x) + x - y_1 - y_2$, a teda $c = -y_1 - y_2 = 0$. Ďalšie riešenie je teda

$$f(x) = x^2 - x + d, \quad g(x) = x^2 + d, \quad d < 0.$$

(Podmienka $d < 0$ zaručuje, že ako f, tak g majú dva rôzne reálne korene. Korene g sú $y_{1,2} = \pm\sqrt{-d}$, korene f sú $x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4d}\right)$ a dosadením sa možno ľahko presvedčiť, že $g(x_i) = x_i$, $f(y_i) = y_{3-i}$ pre $i = 1, 2$.)

G3–F2: Tento prípad je symetrický s predchádzajúcim a dáva štvrté riešenie

$$f(x) = x^2 + b, \quad g(x) = x^2 - x + b, \quad b < 0.$$

A – I – 3

Ukážeme, že všeobecne platí implikácia

$$a < \frac{b + c}{2} \quad \Longrightarrow \quad t_a > \frac{t_b + t_c}{2},$$

zatiaľ čo obrátená implikácia platiť nemusí.

Druhé tvrdenie potvrdzuje príklad známeho pravouhlého trojuholníka so stranami $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ a $t_a = \sqrt{13} \doteq 3{,}606$, $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{73} \doteq 4{,}272$, $t_c = 2{,}5$.

Aby sme dokázali uvedenú implikáciu, predpokladajme, že $2a < b + c$, a vysvetlíme, prečo platí nerovnosť

$$\frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} > \frac{1}{4}\Bigl(\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\Bigr) \tag{1}$$

(využili sme známe vzorce pre dĺžky ťažníc). Po násobení štyrmi, umocnení na druhú a algebraickej úprave dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$\sqrt{(4a^2 + 4c^2 - 2b^2)(4a^2 + 4b^2 - 2c^2)} < 7(b^2 + c^2) - 8a^2. \tag{2}$$

Podľa nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom platí

$$\begin{aligned}&\sqrt{(4a^2 + 4c^2 - 2b^2)(4a^2 + 4b^2 - 2c^2)} \leqq \\ &\leqq \frac{(4a^2 + 4c^2 - 2b^2) + (4a^2 + 4b^2 - 2c^2)}{2} = 4a^2 + b^2 + c^2.\end{aligned}$$

Preto miesto (2) stačí overiť silnejšiu nerovnosť

$$4a^2 + b^2 + c^2 < 7(b^2 + c^2) - 8a^2, \quad \text{alebo} \quad 4a^2 < 2(b^2 + c^2).$$

To je ale ľahké: z predpokladu $2a < b + c$ totiž vyplýva

$$4a^2 < (b + c)^2 = 2(b^2 + c^2) - (b - c)^2 \leqq 2(b^2 + c^2).$$

Tým je dôkaz hotový a celá úloha vyriešená.

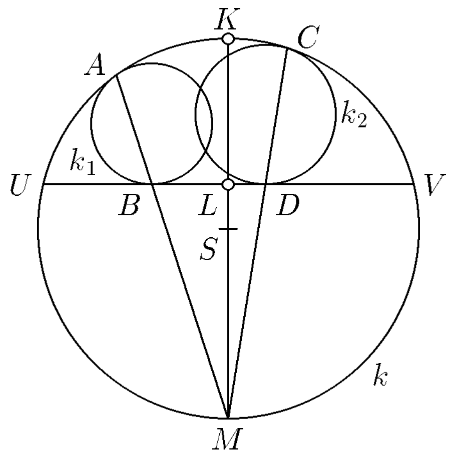
Poznámka. Inou možnosťou riešenia je využiť známu nerovnosť $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leqq \sqrt{\frac{x+y}{2}}$ na dôkaz požadovanej nerovnosti (1), čím sa vyhneme pracnejšiemu umocňovaniu odmocnín.

A – I – 4

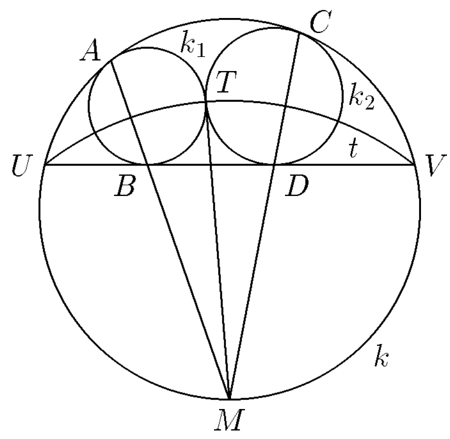
a) Nech k je celá kružnica nášho odseku, S jej stred, M stred jej oblúka „dopĺňajúceho“ oblúk uvažovaného odseku (obr. 15). Kružnice k_1 a k sú rovnoľahlé so stredom A, pritom v tejto rovnoľahlosti bodu B odpovedá bod M (presnejšie — dotyčnici UV kružnice k_1 v bode B zodpovedá dotyčnica kružnice k v bode M), takže body A, B, M ležia na priamke. Podobne odvodíme, že body C, D, M ležia na priamke.

Označme K (L) priesečník priamky MS s oblúkom (základňou) odseku (obr. 16). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BLM a KAM vyplýva $|BM| \cdot |AM| = |LM| \cdot |KM|$. Obdobne platí $|CM| \cdot |DM| = |LM| \cdot |KM|$. Preto $|BM| \cdot |AM| = |CM| \cdot |DM|$ a podľa vety o mocnosti bodu ku kružnici ležia body A, B, C, D na jednej kružnici.

b) Označme T spoločný bod dotyku kružníc k_1 a k_2 (nutne ide o vonkajší dotyk). Ukážeme, že priamka MT je spoločnou dotyčnicou kružníc k_1 a k_2. Ak by to tak nebolo, nech T_1 (T_2) je druhý priesečník priamky MT s kružnicou k_1 (k_2). Mocnosť bodu M



Obr. 15



Obr. 16

ku kružnici k_1 je $|MA| \cdot |MB| = |MT| \cdot |MT_1|$, podobne ku k_2 je $|MC| \cdot |MD| = |MT| \cdot \cdot |MT_2|$ a podľa rovnosti $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$ z časti a) je $|MT_1| = |MT_2|$, teda $T_1 = T_2 = T$ a MT je spoločnou dotyčnicou oboch kružníc k_1, k_2.

Preto $|MT|^2 = |MC| \cdot |MD| = |LM| \cdot |KM|$, čo znamená, že bod T leží na oblúku kružnice t so stredom M a polomerom $\sqrt{|LM| \cdot |KM|}$ vnútri odseku.

Pre úplnosť je treba dodať, že kružnica t prechádza krajnými bodmi U, V základne odseku (vyplýva to napríklad z Euklidovej vety o odvesne pre trojuholníky MKU a MKV), a že možné polohy bodu T vyplnia celé vnútro oblúka t medzi U a V, čo je vidieť zo spojitosti, ale je potrebné uviesť konštrukciu:

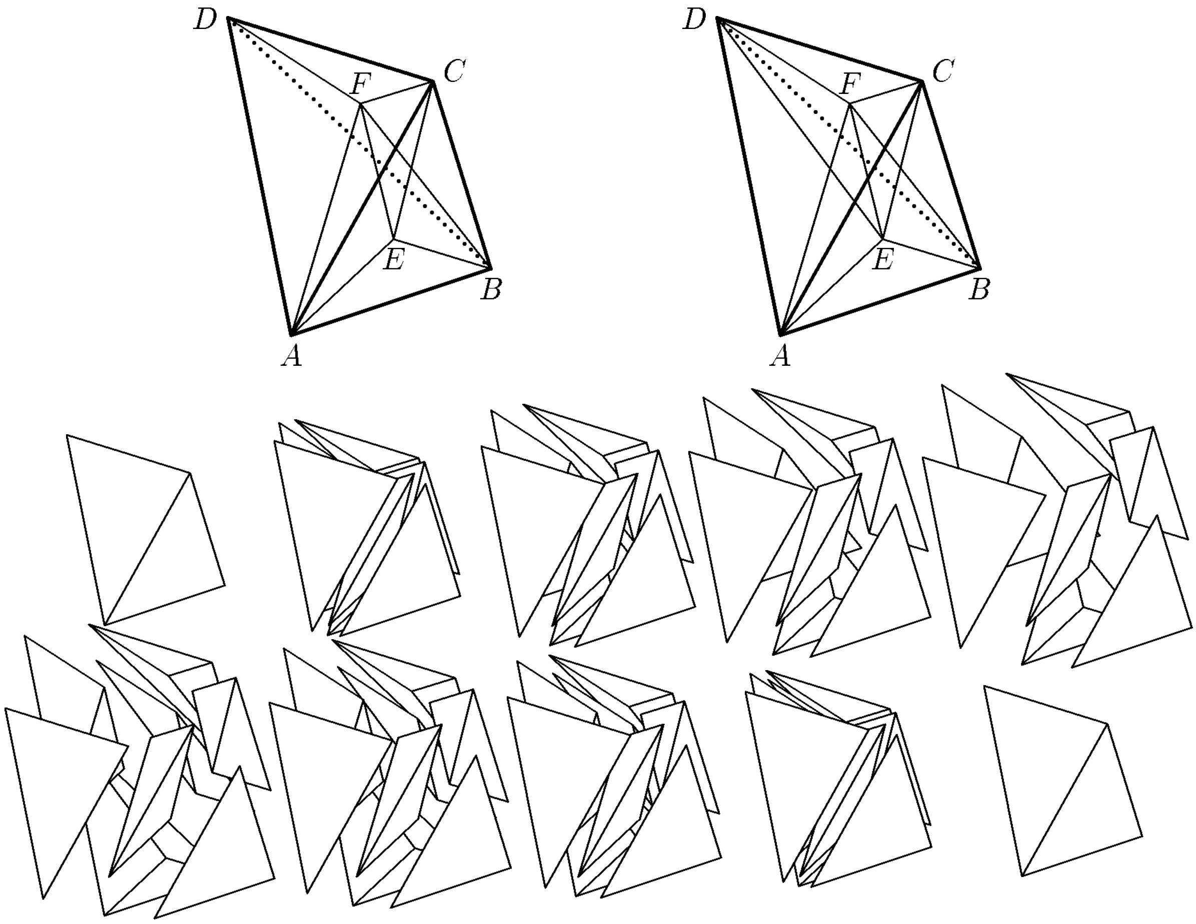
Pre daný bod T ležiaci na oblúku kružnice t vnútri odseku využijeme pri konštrukcii kružnice k_1 rovnoľahlosť so stredom A (uvažovanú v časti a) riešenia), ktorá priamku MT zobrazuje na dotyčnicu kružnice k rovnobežnú s MT. Takéto dotyčnice existujú práve dve s bodmi dotyku T_1, T_2 a podľa uvažovanej rovnoľahlosti body A a C získame ako druhé priesečníky TT_1 a TT_2 s kružnicou k. Potom je už ľahké obe kružnice k_1, k_2 zostrojiť.

A – I – 5

Všimnime si najprv stenu ABC, tá nemôže byť rozrezaná (lebo vnútri nej nemôže byť vrchol), preto musí byť medzi menšími štvorstenmi štvorsten typu $ABCX$, kde X je E alebo F. To isté platí aj pre ostatné steny, teda pri rozrezávaní daného štvorstena musia vzniknúť (okrem iných) štyri štvorsteny $ABCX_1$, $ABDX_2$, $ACDX_3$, $BCDX_4$, kde $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{E, F\}$.

Ďalej ukážeme, že úsečka EF nemôže celá ležať v niektorom z vyššie spomínaných štvorstenov. Obidva vrcholy E aj F totiž musia byť vrcholmi aspoň jedného z týchto štvorstenov. Preto pokiaľ by napríklad EF bola obsiahnutá vo štvorstene $ABCE$, musel by bod F ležať v niektorej stene, napr. ABE, a body A, B, E, F by ležali v rovine. To však podľa zadania nie je možné.

Úsečka EF preto musí byť hranou ďalších štvorstenov typu $EFYZ$, kde $Y, Z \in$ $\in \{A, B, C, D\}$, a toto sú jediné štvorsteny, ktoré ju obsahujú. Také štvorsteny musia byť aspoň tri, aby vyplnili celý priestor „okolo“ úsečky EF. Na druhej strane môžu byť najviac 4 také štvorsteny, pretože každé dva susedné z nich sú od seba „odrezané“ jedným zo štyroch trojuholníkov EFA, EFB, EFC alebo EFD.



Obr. 17

Iné typy štvorstenov ako vyššie diskutované zrejme vzniknúť nemôžu, preto sú dve možnosti, ako daný štvorsten požadovaným spôsobom rozrezať — na 7 či na 8 menších štvorstenov. Obe možnosti možno vždy realizovať, ako je vidieť z obr. 17 — vľavo je rozrezanie na 7 štvorstenov $ABCE$, $ABEF$, $ACEF$, $BCEF$, $ACFD$, $ABFD$, $BCFD$, vpravo na 8 štvorstenov $ABCE$, $ABDE$, $ACDF$, $BCDF$, $ACEF$, $BCEF$, $ADEF$, $BDEF$. Pre lepšiu predstavu sú na obr. 17 náčrtky „skladačiek“ týchto rozrezaní.

A – I – 6

a) Odpoveď je ÁNO. Nech $X_1X_2 \ldots X_n$ je lomená čiara zložená z uhlopriečok n-uholníka (teda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú vrcholy n-uholníka, avšak nie nutne v tomto poradí). Takúto čiaru možno ľahko zostaviť, napríklad takto: Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú (v tomto poradí) vrcholy n-uholníka. Položme

$$X_1X_2 \dots X_n = A_1A_3A_5 \dots A_{n-1}A_2A_4 \dots A_n \text{ pre } n \text{ párne;}$$
$$X_1X_2 \dots X_n = A_1A_3A_5 \dots A_nA_2A_4 \dots A_{n-1} \text{ pre } n \text{ nepárne.}$$

Ukážeme, že uhlopriečky možno prefarbiť tak, že všetky uhlopriečky X_iX_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n-1$, sú modré:

Prvý dôkaz — existenčný. Uvážme prefarbenie, ktoré obsahuje najdlhšiu možnú súvislú čiaru $X_1X_2 \dots X_k$ zloženú iba z modrých uhlopriečok. Tvrdíme, že nutne $k = n$. Keby totiž bolo $k < n$, bola by uhlopriečka X_kX_{k+1} červená a po následnom prefarbení uhlopriečok vychádzajúcich z bodu X_{k+1} by sme dostali ofarbenie, v ktorom by všetky uhlopriečky tvoriace lomenú čiaru $X_1X_2 \dots X_{k+1}$ boli modré. To by bol spor s maximálnosťou k.

Druhý dôkaz — algoritmický. Priamo popíšeme spôsob, ako požadované prefarbenie nájsť.

1. $i := 1$.
2. Pokiaľ je uhlopriečka X_iX_{i+1} červená, prefarbi všetky uhlopriečky vychádzajúce z bodu X_{i+1}.
3. $i := i + 1$.
4. Pokiaľ $i < n$ choď na 2., inak KONIEC.

Indukciou podľa i sa ľahko overí, že po prevedení 2. kroku sú vždy všetky uhlopriečky X_jX_{j+1}, $1 \leqq j \leqq i$, modré. Teda po skončení algoritmu je celá lomená čiara $X_1X_2 \dots X_n$ zložená iba z modrých úsečiek.

b) Odpoveď je NIE. Jednoduchý protipríklad tvorí $n = 5$ so všetkými uhlopriečkami ofarbenými na červeno. Ľahko sa presvedčíme, že po každom prefarbení ostane nepárny počet červených úsečiek (1, 3 alebo 5). Pretože však každá uzavretá lomená čiara musí obsahovať všetkých päť uhlopriečok, požadované prefarbenie neexistuje.

A – S – 1

Z rovnice je vidieť, že $5^p - 6$ musí byť deliteľné číslom 7. Všimnime si zvyšky čísel 5^k po delení číslom 7:

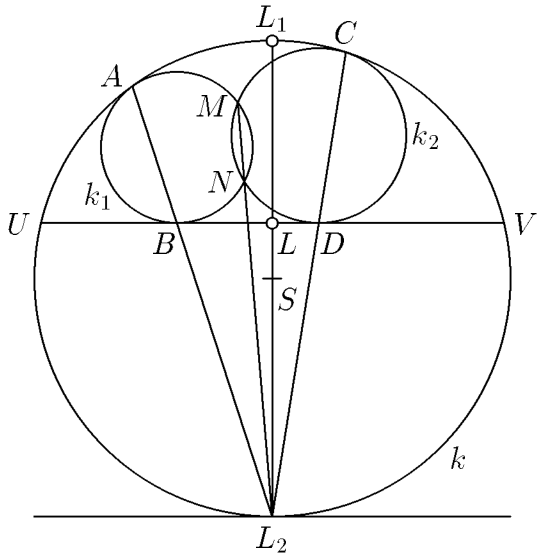
k	1	2	3	4	5	6	7	…
5^k	5	4	6	2	3	1	5	…
$5^k - 6$	6	5	0	3	4	2	6	…

Vidíme, že sa zvyšky opakujú s periódou 6 a jediný prípad, keď $7 | 5^k - 6$, je pre $k = 6n + 3$. Preto aj p musí byť tvaru $6n + 3$ pre vhodné n. To ale znamená, že p je deliteľné tromi. A pretože p je zároveň prvočíslo, jediná možnosť je $p = 3$. Potom vychádza $q = 17$, čo je prvočíslo.

Riešením úlohy je jediná dvojica prvočísel $p = 3$ a $q = 17$.

A – S – 2

Riešenie priamo vychádza z riešenia podobnej úlohy domáceho kola: Označme S stred kružnice k; A a C po rade body dotyku kružníc k_1 a k_2 s k, a B, D po rade body dotyku kružníc k_1 a k_2 s UV (obr. 18). Kružnice k_1, k sú rovnoľahlé so stredom A, pritom v tejto rovnoľahlosti bodu B zodpovedá bod L_2 (a dotyčnici UV kružnice k_1 v bode B zodpovedá dotyčnica kružnice k v bode L_2), takže body A, B, L_2 ležia na priamke. Podobne odvodíme, že body C, D, L_2 ležia na priamke.



Obr. 18

Označme L priesečník priamky L_2S s úsečkou UV. Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BLL_2 a L_1AL_2 vyplýva $|BL_2| \cdot |AL_2| = |LL_2| \cdot |L_1L_2|$. Obdobne platí $|CL_2| \cdot |DL_2| = |LL_2| \cdot |L_1L_2|$. Preto $|BL_2| \cdot |AL_2| = |CL_2| \cdot |DL_2|$. (Doposiaľ sme len zopakovali riešenie úlohy domáceho kola.)

Teraz veďme bodom L_2 priamku L_2M a dokážme, že táto priamka prechádza aj bodom N. Označme po rade N_1 a N_2 druhé priesečníky priamky L_2M s kružnicami k_1 a k_2. Pokiaľ je priamka L_2M náhodou dotyčnicou niektorej z kružníc k_1 či k_2 v bode M, potom položíme $N_1 = M$ či $N_2 = M$.

Podľa vety o mocnosti bodu L_2 ku kružnici k_1 je $|AL_2| \cdot |BL_2| = |ML_2| \cdot |N_1L_2|$, podobne pre kružnicu k_2 je $|CL_2| \cdot |DL_2| = |ML_2| \cdot |N_2L_2|$. Z úvahy v prvej časti riešenia potom vyplýva

$$|ML_2| \cdot |N_1L_2| = |AL_2| \cdot |BL_2| = |CL_2| \cdot |DL_2| = |ML_2| \cdot |N_2L_2|,$$

teda $|N_1L_2| = |N_2L_2|$ a nutne $N_1 = N_2$. To znamená, že bod $N_1 = N_2$ je spoločným bodom kružníc k_1 a k_2, a musí byť $N_1 = N_2 = N$. Preto priamka ML_2 prechádza bodom N.

A – S – 3

Vzhľadom na podmienku $a+b+c=1$ máme dokázať nerovnosť

$$2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\geqq(a+b+c)^2,$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\geqq 0,$$

a tá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geqq 0.$$

Posledná nerovnosť platí pre každú trojicu a, b, c, preto platí aj dokazovaná nerovnosť.

Iné riešenie. Ak si vyjadríme $c=1-a-b$ a dosadíme do ľavej strany danej nerovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned}L&=3(a^2+b^2)-3(a+b)+3ab+2=\\&=3(a^2+ab-a)+3b^2-3b+2=\\&=3\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}b^2-\frac{3}{2}b+\frac{5}{4}=\\&=3\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(3b-1)^2+1,\end{aligned}$$

čo je pre každé dve čísla a, b väčšie alebo rovné 1.

Iné riešenie. Zo zrejmej nerovnosti $0\leqq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ rozpísaním odvodíme nerovnosť

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\leqq 3(a^2+b^2+c^2).$$

(Táto nerovnosť je zároveň jednoduchým dôsledkom Cauchyho nerovnosti a nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom.) V našom prípade je $(a+b+c)^2=1$, takže $3(a^2+b^2+c^2)\geqq 1$. Keď k poslednej nerovnosti znovu pričítame rovnosť $(a+b+c)^2=1$, vyjde $4(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)\geqq 2$, teda

$$2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)\geqq 1.$$

A – II – 1

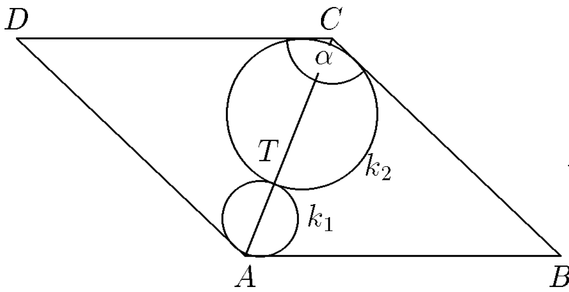
Zrejme $S_n=5^n+3^n+1\geqq 9$ pre každé prirodzené n. Z tabuliek zvyškov mocnín 5^n a 3^n po delení číslami 3, 5 a 7 zistíme, že $3\mid S_n$ pre každé $n=2k+1$, $5\mid S_n$ pre každé $n=4k+2$ a $7\mid S_n$ pre každé $n=6k+2$ a každé $n=6k+4$. Preto ak je S_n prvočíslo, nemôžu po delení čísla n dvanástimi vyjsť zvyšky 1, 3, 5, 7, 9, 11, ani zvyšky 2, 6, 10, ani zvyšky 2, 4, 8, 10, takže toto delenie vyjde bezo zvyšku.

(Dodajme pre zaujímavosť, že číslo $S_{12} = 244\,672\,067$ je prvočíslo.)

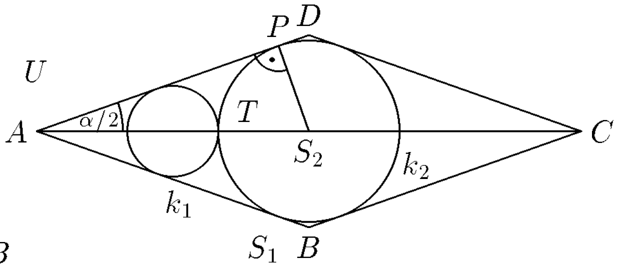
A – II – 2

Označme T bod dotyku oboch kružníc, T leží na úsečke AC. Kružnice k_1, k_2 sú rovnoľahlé so stredom T, a keďže táto rovnoľahlosť zároveň prevádza priamku AB na CD a priamku BC na DA, sú $|AT|$ a $|CT|$ v rovnakom pomere ako polomery kružníc, teda $|CT| = 2|AT|$ (obr. 19). Označme ďalej $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCD| = \alpha$.

Stačí teda skonštruovať kružnice k_1 a k_2 tak, aby sa dotýkali po rade strán rovnobežníka AB, AD a BC, CD a prechádzali bodom T. To je však známa úloha (dá sa riešiť pomocou rovnoľahlosti, prípadne pomocou výpočtu uhlov), ktorá má vždy práve jedno riešenie. Potrebujeme však ešte zaručiť, aby obidve kružnice ležali vo vnútri kosoštvorca. Hraničná situácia pre tento prípad je naznačená na obr. 20, kde sa kružnica k_2 dotýka všetkých štyroch strán kosoštvorca. Zrejme pre všetky hodnoty α väčšie než táto hraničná hodnota vyjde k_2 vo vnútri kosoštvorca, a naopak pre všetky menšie hodnoty α kružnica k_2 pretne strany AB a AD a zadaniu úlohy nevyhovuje. Zostáva už len určiť túto medznú hodnotu uhla α.



Obr. 19



Obr. 20

Ak označíme V priesečník kružnice k_1 s uhlopriečkou AC (rôzny od T), U dotykový bod k_1 a AP, vzdialenosť $|AV| = x$ a polomery kružníc k_1, k_2 po rade r_1, r_2, potom $r_2 = 2r_1$. Z podobnosti trojuholníkov AS_2P a AS_1U vyplýva

$$\frac{|S_1U|}{|AS_1|} = \frac{|PS_2|}{|AS_2|}, \qquad \text{čiže} \qquad \frac{r_1}{r_1 + x} = \frac{r_2}{r_2 + x + 2r_1}.$$

Z toho $x = 2r_1$, preto z pravouhlého trojuholníka AS_2P dostávame $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

Riešením úlohy sú všetky α z intervalu $(0, \pi)$, pre ktoré je $\sin\frac{\alpha}{2} \geqq \frac{1}{3}$, alebo $\alpha \in \langle 2\arcsin\frac{1}{3}, \pi)$.

A – II – 3

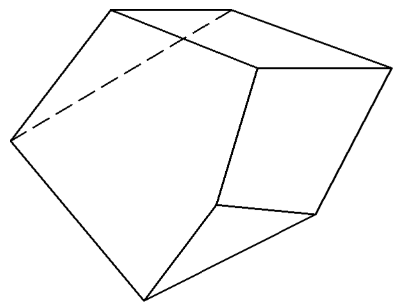
Skúmaním prvých členov postupnosti rozdielov $2^{n+2} - a_n$ uhádneme, že $2^{n+2} - a_n = 2n + 4$. Odtiaľ už ľahko vyplýva dokazovaná nerovnosť. Rovnosť dokážeme indukciou.

Pre $n = 1$ je to jasné: $2^3 - a_1 = 8 - 2 = 6 = 2 \cdot 1 + 4$.

Ďalej môžeme písať $2^{n+3} - a_{n+1} = 2^{n+3} - 2(n + 1 + a_n) = 2(2^{n+2} - a_n - n - 1) = = 2(2n + 4 - n - 1) = 2(n + 1) + 4$. Tým je overený indukčný krok, a teda aj tvrdenie úlohy.

A – II – 4

Štvorsten — teleso s najmenším počtom vrcholov — úlohe zrejme nevyhovuje. Preto hľadaný mnohosten musí mať aspoň 5 stien. Pretože žiadne tri jeho steny nemajú rovnaký počet hrán, jedna z týchto stien musí byť aspoň päťuholník, teda musí mať aspoň 5 susedných stien, a celkove teda musí mať hľadaný mnohosten najmenej 6 stien. To ale znamená, že dve jeho steny sú najmenej päťuholníkové. Tieto dve steny majú spoločné nanajvýš 2 vrcholy, a preto mnohosten musí mať celkom aspoň $2 \times 5 - 2 = 8$ vrcholov.



Obr. 21

Obrázok 21 ukazuje mnohosten s ôsmymi vrcholmi, ktorý vyhovuje podmienkam úlohy.

A – III – 1

Ak $\alpha = 3\beta$, tak $\gamma = \pi - 4\beta$, takže podľa sínusovej vety platí

$$a = K \sin 3\beta, \quad b = K \sin \beta, \quad c = K \sin 4\beta, \tag{1}$$

kde K je kladné číslo. Preto v prvej časti riešenia stačí overiť identitu

$$(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) = \sin \beta \sin^2 4\beta. \tag{2}$$

Podľa známych goniometrických vzťahov platí

$$(\sin 3\beta - \sin \beta)^2 = (2 \cos 2\beta \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta,$$
$$\sin 3\beta + \sin \beta = 2 \sin 2\beta \cos \beta,$$

a odtiaľ pre ľavú stranu rovnosti (2) dostávame

$$\begin{aligned}(\sin^2 3\beta - \sin^2 \beta)(\sin 3\beta - \sin \beta) &= (4 \cos^2 2\beta \sin^2 \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos \beta) = \\ &= (2 \sin \beta \cos \beta) \cdot (2 \sin 2\beta \cos 2\beta) \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \\ &= \sin 2\beta \cdot \sin 4\beta \cdot 2 \sin \beta \cos 2\beta = \sin \beta \sin^2 4\beta.\end{aligned}$$

Tak sme dokázali, že (2) platí pre každé β.

Teraz vysvetlíme, prečo opačná implikácia neplatí. Funkcia sínus má periódu $360°$, takže strany trojuholníka ABC sú tvaru (1) aj v prípade, keď platí $\alpha = 3\beta - 360°$

(a $\gamma = 540^\circ - 4\beta$), napr. pokiaľ $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 125^\circ$ a $\gamma = 40^\circ$. Pre trojuholník s takými vnútornými uhlami platí (ako sme dokázali) rovnosť $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$ napriek tomu, že $\alpha \neq 3\beta$.

A – III – 2

Nazvime vrcholy n-uholníka nasledovne:

párny – ak z neho vychádza párny počet modrých úsečiek (teda aj párny počet červených);

nepárny – ak z neho vychádza nepárny počet modrých úsečiek (a nepárny počet červených).

Susedom vrcholu n-uholníka nazvime každý ďalší vrchol n-uholníka, s ktorým je spojený úsečkou, teda každý jeho ďalší vrchol. Počet nepárnych vrcholov v začiatočnom ofarbení je zrejme párny, pretože do počtu modrých úsečiek vychádzajúcich z vrcholov n-uholníka je každá modrá úsečka započítaná dvakrát (keďže n je nepárne, počet párnych vrcholov je potom nepárny).

Ďalej si uvedomíme, že výsledok prefarbovania nezávisí od poradia vrcholov, podľa ktorých prefarbujeme, ale len od toho, koľkokrát podľa ktorého vrcholu prefarbujeme (stačí uvážiť, že vlastne záleží len na počte prefarbení každej úsečky a nie na poradí prefarbovania). Keďže farba každej úsečky závisí len od parity počtu zmien jej ofarbenia, nemá zmysel v žiadnom vrchole prefarbovať úsečky viac ako raz. Pretože n je nepárne, párny vrchol zostane aj po jeho prefarbení párny a nepárny zostane nepárny. Na druhej strane, pri prefarbovaní každého vrcholu počet modrých úsečiek vychádzajúcich zo všetkých jeho susedov zmení paritu, a teda všetky ostatné párne vrcholy sa zmenia na nepárne, kým všetky nepárne sa zmenia na párne.

Preto na dosiahnutie ofarbenia, pri ktorom budú všetky vrcholy párne, potrebujeme prefarbiť nepárny počet susedov každého nepárneho vrcholu a párny počet susedov každého párneho vrcholu. Ľubovoľné dva párne resp. nepárne vrcholy teda musia mať rovnakú paritu počtu prefarbených susedov, teda buď prefarbíme obidva alebo ani jeden. Preto možno dosiahnuť potrebné ofarbenie len tak, že prefarbíme buď všetky párne vrcholy, všetky nepárne vrcholy, alebo úplne všetky vrcholy (už sme dokázali, že párnych vrcholov je nepárny počet a nepárnych je párny počet). Z týchto možností vyhovujú prvé dve. Ak napríklad prefarbíme všetky nepárne vrcholy, každý párny vrchol má párny počet prefarbených susedov (nepárne vrcholy), čiže zostane párny, a každý nepárny vrchol má nepárny počet prefarbených susedov (nepárne vrcholy okrem neho), čiže sa zmení na párny. Podobnú úvahu možno použiť aj keď prefarbíme všetky párne vrcholy.

V druhej časti zrejme stačí ukázať, že žiadne ofarbenie, v ktorom sú všetky vrcholy párne, nemožno prefarbiť na iné takéto ofarbenie. Na základe úvah z prvej časti vieme, že sa to dá dosiahnuť len tak, že prefarbíme všetky párne alebo všetky nepárne vrcholy. Kým v prvom prípade prefarbíme všetky vrcholy, a teda dostaneme pôvodné ofarbenie, v druhom prípade neprefarbíme nič. Preto je výsledné ofarbenie len s párnymi vrcholmi jednoznačne určené začiatočným ofarbením.

Iné riešenie. Znovu si najprv uvedomíme, že výsledok prefarbovania nezávisí od poradia vrcholov, podľa ktorých prefarbujeme, ale len od toho, koľkokrát podľa ktorého vrcholu prefarbujeme. Ak sú $A_1, A_2, \dots, A_n$ vrcholy daného n-uholníka, označme p_i počet prevedených prefarbení vzhľadom na vrchol A_i a $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ ich celkový súčet. Úsečka A_iA_j zmení farbu, práve keď prevedieme prefarbenie vzhľadom k jednému z vrcholov A_i alebo A_j. Vo výslednom prefarbení teda úsečka A_iA_j zmení farbu, práve keď $p_i + p_j \equiv 1 \pmod 2$. Počet modrých úsečiek vychádzajúcich z vrcholu A_i má vo výslednom ofarbení rovnakú paritu ako v počiatočnom ofarbení, práve keď

$$\sum_{j\neq i}(p_i + p_j) = (n-1)p_i + \sum_{j\neq i} p_j \equiv p - p_i \equiv 0 \pmod 2.$$

Ukážeme, že každé počiatočné ofarbenie možno prefarbiť tak, aby z každého vrchola vychádzal párny počet modrých úsečiek: Budeme postupne prefarbovať n-uholník vzhľadom k tým vrcholom, z ktorých v pôvodnom ofarbení vychádzal nepárny počet modrých úsečiek (bude teda $p_i = 1$, pokiaľ v pôvodnom ofarbení vychádzal z vrcholu A_i nepárny počet modrých úsečiek, $p_i = 0$ v opačnom prípade).

Označme a_i počet modrých úsečiek vychádzajúcich z vrcholu A_i, potom $\sum_{i=1}^{n} a_i$ je rovné dvojnásobku celkového počtu modrých úsečiek, čiže nepárnych a_i je párny počet. Pre práve popísané prefarbovanie je $p_i = 1$ pre párny počet vrcholov A_i a $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ je párne. Pre vrchol A_i, z ktorého v pôvodnom ofarbení vychádzal párny počet modrých úsečiek, je $p_i = 0$, teda parita počtu modrých úsečiek z neho vychádzajúcich sa po prefarbení nezmení. Pre vrchol A_i, z ktorého v pôvodnom ofarbení vychádzal nepárny počet modrých úsečiek, však je $p_i = 1$, takže $p - p_i \equiv 1 \pmod 2$, t.j. nepárny počet modrých úsečiek z neho vychádzajúcich sa po prefarbení zmení na párny, čo sme chceli dosiahnuť.

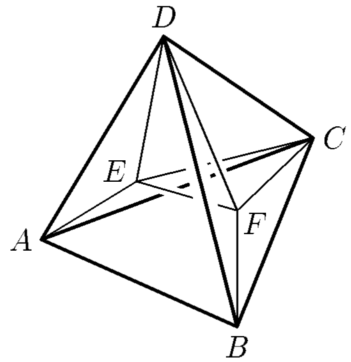
Keby sa niektoré počiatočné ofarbenie dalo prefarbiť na dve rôzne ofarbenia, v ktorých by z každého vrcholu vychádzal párny počet modrých úsečiek, bolo by tiež možné jedno z týchto „párnych“ ofarbení prefarbiť na druhé. Ukážeme, že to nejde. Predpokladajme teda, že máme ofarbenie Π, v ktorom z každého vrcholu vychádza párny počet modrých úsečiek. Predpokladajme ďalej, že po prefarbení, pri ktorom voči vrcholu A_i prefarbujeme p_i-krát ($i = 1, 2, \dots, n$), dostaneme iné ofarbenie Ω, v ktorom opäť z každého vrcholu vychádza párny počet modrých úsečiek. Je teda $p - p_i \equiv 0 \pmod 2$, pre každé $i = 1, 2, \dots, n$, a teda $p_i \equiv p_j \pmod 2$, alebo $p_i + p_j \equiv 0 \pmod 2$ pre každé $i, j = 1, 2, \dots, n$. Potom ale žiadna úsečka po prefarbení nezmenila farbu. Ofarbenia Π a Ω sú teda totožné, čiže ku každému ofarbeniu existuje jediné, ktoré z neho možno dostať popísaným spôsobom, a v ktorom z každého vrcholu vychádza párny počet modrých úsečiek.

A – III – 3

Pretože každý mnohosten má aspoň štyri steny, hľadaný najmenší súčet musí byť aspoň $5 \cdot 4 = 20$. Pokiaľ by bol práve 20, museli by sme daný štvorsten rozdeliť na 5 štvorstenov. Ukážeme sporom, že za podmienok v zadaní to nie je možné. (V dôkaze je možné odvolať sa na riešenie úlohy tohtoročného domáceho kola, je však potrebné dať si pozor na korektnosť úvah.)

Pripusťme teda, že štvorsten $ABCD$ je rozdelený za podmienok v zadaní na 5 štvorstenov T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Steny daného štvorstena deliť nemožno, preto každá z nich je zároveň stenou (práve) jedného zo štvorstenov $T_1, \dots, T_5$. Podľa Dirichletovho princípu potom niektorý z nich, povedzme T_1, nemá s $ABCD$ žiadnu spoločnú stenu. To však znamená, že T_1 obsahuje nanajvýš dva z bodov A, B, C, D — predpokladajme, že T_1 *neobsahuje* vrcholy C, D.

Pretože daný štvorsten je rozdelený bezo zvyšku, štvorsten T_1 musí mať každú svoju stenu spoločnú s niektorým zo zvyšných štvorstenov T_2, T_3, T_4, T_5 (so žiadnym samozrejme nemôže mať spoločné steny dve). Ak je teda $T_2 = BCDX$ štvorsten obsahujúci stenu BCD daného štvorstena, musí T_1 bez ohľadu na to, ktorú stenu má s T_2 spoločnú, obsahovať vrchol C alebo D, a to je spor s predpokladom.



Obr. 22

Ďalším dôležitým poznatkom je, že súčet počtov stien získaných mnohostenov je párny. Vyplýva to z toho, že v súčte každú zo štyroch stien štvorstena $ABCD$ započítame práve raz (nemožno ju deliť) a každú z ďalších stien práve dvakrát (za každý z dvoch mnohostenov, ktorým je spoločná). Preto tento súčet musí byť tvaru $4 + 2k = 2(k + 2)$, takže sa nerovná 21.

Minimálna hodnota skúmaného súčtu je 22, príslušné rozdelenie (na tri štvorsteny $ACDE$, $BCDF$ a $EFCD$ a dva štvorboké ihlany $ABFED$ a $ABFEC$) je na obr. 22.

A – III – 4

Stačí zvoliť postupnosť $a_n = (n!)^3$. Pre $k \geqq 2$ rovnako ako pre $k = 0$ tvrdenie o postupnosti $(k + a_n)$ zrejme platí, pre $k = 1$ stačí využiť vzťah $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

A – III – 5

Ak odhadneme zhora každý sčítanec súčtu V_n podľa nerovnosti $ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, ktorá zrejme platí pre ľubovoľné reálne čísla a, b, dostaneme odhad

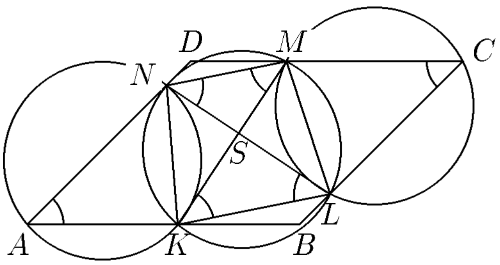
$$V_n \leqq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2} + \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2} + \ldots + \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Skúmaný výraz nadobúda najväčšiu hodnotu $\frac{1}{2}n$, lebo ako ľahko nahliadneme, pre hodnoty $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{4}\pi$ vyjde $V_n = \frac{1}{2}n$.

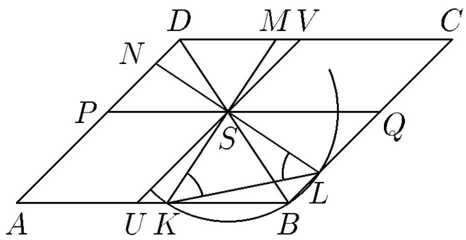
A – III – 6

Predpokladajme, že body K, L, M, N vyhovujú predpokladom úlohy (obr. 23). Z vlastností obvodových uhlov v zhodných kružniciach opísaných trojuholníkom AKN a CLM

a štvoruholníku $KLMN$ vyplýva, že každý z uhlov KLN, KMN, LKM a LNM má rovnakú veľkosť ako zhodné uhly rovnobežníka pri vrcholoch A a C, t.j. $45°$. Preto sú trojuholníky SKL a SMN (S je priesečník uhlopriečok KM a LN) rovnoramenné, pravouhlé a rovnoľahlé podľa stredu S. V rovnoľahlosti, v ktorej bodu K zodpovedá bod M a bodu L bod N, sa priamka AB zobrazí na priamku CD, lebo $K \in AB$, $M \in$ $\in CD$ a $AB \parallel CD$; rovnako tak sa priamka BC zobrazí na priamku DA, takže prienik $AB \cap BC$ sa zobrazí na prienik $CD \cap DA$, alebo bod B prejde do bodu D. To znamená, že bod S je vnútorným bodom úsečky BD. (Dodajme, že každý uvažovaný štvoruholník $KLMN$ je rovnoramenný lichobežník s navzájom kolmými uhlopriečkami.)



Obr. 23



Obr. 24

Zvoľme teraz naopak ľubovoľný vnútorný bod S úsečky BD a ukážme, že je priesečníkom uhlopriečok niektorého z uvažovaných štvoruholníkov $KLMN$. Preložme zvoleným bodom S „priečky“ $PQ \parallel AB$ a $UV \parallel BC$ ako na obr. 24. Zhodné trojuholníky UBS a QSB sú podobné s trojuholníkom ABD, takže sú to ostrouhlé trojuholníky s najmenšími vnútornými uhlami $45°$ pri vrcholoch U a Q. Preto je $|SB| < |UB|$ a $|SB| < |BQ|$, takže kružnica $k(S, |SB|)$ pretína úsečku BU vo vnútornom bode, ktorý označíme K, a úsečku BQ vo vnútornom bode, ktorý označíme L. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle platí

$$|\sphericalangle KSL| = 360° - 2 \cdot |\sphericalangle KBL| = 360° - 2 \cdot 135° = 90°,$$

takže zhodné uhly SKL a SLK majú veľkosť $45°$. Vnútorné body M a N úsečiek DV a DP určíme ako obrazy bodov K a L v rovnoľahlosti so stredom S, v ktorej $B \mapsto$ $\mapsto D$ (a $Q \mapsto P$ a $U \mapsto V$). Z vlastností obvodových uhlov vyplýva, že takto zostrojený štvoruholník $KLMN$ má potrebné vlastnosti, lebo každý z uhlov vyznačených na obr. 23 má podľa konštrukcie naozaj veľkosť $45°$.

Odpoveď. Hľadaná množina je úsečka BD bez krajných bodov.

Prípravné sústredenia pred MMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (MMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po prvom z nich SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí dvoch náhradníkov. Druhé sústredenie je zamerané na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva.

Na výberovom sústredení pred MMO sa zúčastnilo 10 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 27.4.–2.5.1997 v Bratislave. Súťažiaci boli ubytovaní v priestoroch EKOIUVENTY a súťažili na MFF UK. Každý deň študenti riešili monotematickú sériu troch až piatich úloh, pri rovnakých podmienkach ako na MMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítajú a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na MMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) je vybrané šesťčlenné družstvo na MMO.

Výsledky sústredenia:

1.	*Vladimír Marko*	46,75	6.	*Viera Růžičková*	29,75
2.	*Peter Novotný*	45,5	7.	*Martin Sleziak*	27,25
3.	*Peter Kozák*	42,75	8.	*Vladimír Zajac*	26,5
4.	*Miroslav Dudík*	41,75	9.	*Peter Bodík*	22,25
5.	*Ján Špakula*	35	10.	*Kristína Černeková*	19,25

Úlohy zadávali lektori z Bratislavy:

Richard Kollár, MFF UK, úlohy 1 – 4 (Nerovnosti),
Martin Niepel, MFF UK, 5 – 8 (Planimetria),
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK, 9 – 11 (Kombinatorika),
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc., MFF UK, 12 – 15 (Stereometria),
Prof. Pavel Kostyrko, DrSc., MFF UK, 16 – 19 (Funkcie),
Prof. Ivan Korec, DrSc., MÚ SAV, 20 – 23 (Teória čísel).

Pre vybrané družstvo sa organizovalo ešte jedno prípravné sústredenie v dňoch 23.–27. 6. 1997 v zariadení IUVENTY na Zochovej chate. Toto sústredenie bolo zamerané viac na vedomostnú prípravu študentov a jeho obsahom boli prednášky na vybrané témy. Lektormi boli:

Richard Kollár, MFF UK Bratislava (Nerovnosti),
RNDr. Pavol Černek, CSc., MFF UK Bratislava (Kombinatorika),
doc. RNDr. Ján Čižmár, CSc., MFF UK Bratislava (Geometria),
Prof. Ivan Korec, DrSc., MÚ SAV Bratislava (Teória čísel).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Nájdite všetky reálne čísla c s vlastnosťou: Pre každú dvojicu reálnych čísel a, b existuje dvojica takých reálnych čísel x, y z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, že platí

$$|xy - ax - by| \geqq c.$$

2. Dokážte, že pre každé tri nezáporné reálne čísla x, y, z platí

$$8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geqq 9(x^2 + yz)(y^2 + xz)(z^2 + xy).$$

Platí táto nerovnosť aj bez podmienky nezápornosti čísel x, y, z ? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

3. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, $n \geqq 2$ platí:

$$n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right).$$

4. Daný je polynóm $f(x)$ s celočíselnými koeficientami. V troch rôznych celých číslach a_1, a_2 a a_3 platí $|f(a_1)| = |f(a_2)| = |f(a_3)| = 1$. Dokážte, že $f(x)$ nemá žiaden celočíselný koreň.

5. Daný je trojuholník ABC so stranami $a > b > c$ a v ňom ľubovoľný bod O. Označme P, Q a R po rade priesečníky priamok AO, BO a CO po rade so stranami trojuholníka BC, AC a AB. Dokážte, že platí $|OP| + |OQ| + |OR| < a$.

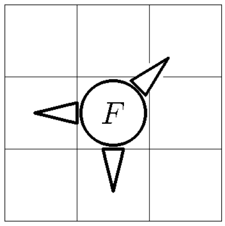
6. Vo vnútri strán AB, BC, CD a DA rovnobežníka $ABCD$ sa po rade nachádzajú body K, L, M a N. Dokážte, že obsah štvoruholníka $KLMN$ sa rovná polovici obsahu rovnobežníka $ABCD$ práve vtedy, keď niektorá z jeho uhlopriečok je rovnobežná s niektorou zo strán rovnobežníka $ABCD$.

7. V trojuholníku ABC platí $|AB| = |AC| + \frac{1}{2}|BC|$. Na strane BC je daný bod tak, že $|BP| = \frac{1}{4}|BC|$. Dokážte, že $2|\sphericalangle APC| = |\sphericalangle ACB|$.

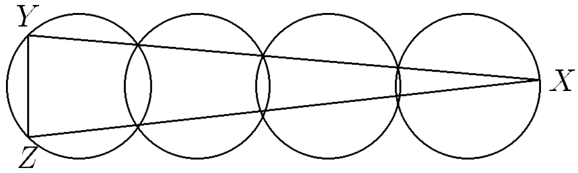
8. V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) označíme D priesečník osi uhla ACB so stranou AB. Priamka kolmá na CD a prechádzajúca cez stred kružnice opísanej trojuholníku ABC pretína BC v bode E. Priesečník rovnobežky s CD vedenej bodom E so stranou AB označíme F. Dokážte, že $|BE| = |FD|$.

9. V rovine je daných 1998 bodov $A_1, A_2, \ldots, A_{1998}$, z ktorých žiadne tri neležia na jednej priamke. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s vlastnosťou: Ak zvolíme ľubovoľných n úsečiek, ktorých koncové body sú v bodoch $A_1, A_2, \ldots, A_{1998}$, tak sa medzi nimi nájdu také tri, ktoré tvoria strany jedného trojuholníka.

10. Daná je šachovnica 2000×2000 štvorčekov. Figúrka F sa môže v jednom kroku posunúť o jedno políčko jedným z troch spôsobov nakreslených na obr. 25. Figúrku sme na začiatku postavili na políčko $(156, 743)$. Je možné, aby prešla počas 3 999 999 krokov celú šachovnicu?



Obr. 25



Obr. 26

11. Dané sú body A, B. Určte množinu bodov C, pre ktoré má trojuholník ABC jeden z uhlov rovný $10°$ a dá sa pokryť štyrmi rovnakými kruhmi ako na obr. 26 pre trojuholník XYZ.

12. Daný je štvorsten $ABCD$. Jeho vrcholmi prechádzajú rovnobežky (rôznobežne so všetkými stenami), ktoré pretínajú roviny stien protiľahlých k vrcholom v bodoch A_1, B_1, C_1 a D_1. Určte pomer objemov štvorstenov $ABCD$ a $A_1B_1C_1D_1$.

13. Vnútri konvexného mnohostena je daných k disjunktných gúľ ($k \in \mathbb{N}$, $k > 1$), z ktorých žiadne dve nemajú rovnaké polomery. Dokážte, že existuje rozklad mnohostena na konvexné mnohosteny, z ktorých každý obsahuje práve jednu guľu.

14. Základne zrezaného štvorbokého ihlana $ABCDA'B'C$„D“ sú rovnobežníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ ($ABCD \parallel A'B'C'D'$). Priamka m pretína priamky AB', BC' a CD'. Určte všetky polohy, ktoré môže mať priamka m k priamke DA'. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

15. Konvexný n-sten ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 4$) je rovnobežne premietnutý do roviny. Určte, aký je najväčší možný počet strán priemetu. Svoje tvrdenie zdôvodnite.

16. Nech $\mathbb{N}_0$ je množina celých nezáporných čísel. Zistite, či existuje funkcia $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taká, že súčasne platí:
a) pre každé $b \in \mathbb{N}_0$ existuje nekonečne veľa $a \in \mathbb{N}_0$ tak, že $f(a) = b$;
b) pre každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(f(n^2)) = f(f(n)) + f(f(0))$.

17. Nech $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ je nezáporná funkcia, $f(1) = 1$ a pre každé $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ také, že $x_1 + x_2 \leqq 1$ platí $f(x_1 + x_2) \geqq f(x_1) + f(x_2)$. Dokážte, že $f(x) \leqq 2x$ pre každé $x \in \langle 0, 1\rangle$.

18. Určte najmenšie možné A tak, aby pre každú kvadratickú funkciu $f(x) = ax^2 + bx + c$ spĺňajúcu $|f(x)| \leqq 1$ pre všetky $0 \leqq x \leqq 1$, bola splnená nerovnosť $f'(0) \leqq A$.

19. Rastúca funkcia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ spĺňa $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$ pre ľubovoľnú dvojicu prípustných hodnôt. Dokážte, že existuje reálne číslo $p > 1$ tak, že $f(n) = \log_p n$ pre každé prirodzené číslo n.

20. Nájdite čo najviac dvojstredových štvoruholníkov s vrcholmi v mrežových bodoch roviny. (Štvoruholník sa nazýva dvojstredový, ak má vpísanú i opísanú kružnicu. Mrežové body roviny sú body s celočíselnými súradnicami.)

21. Nech $F(n)$ znamená n-té číslo Fibonacciovej postupnosti (teda $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ a $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ pre $n \geqq 0$). Nájdite počet riešení rovnice

$$F(x) + F(y) + F(z) = F(u) + F(v),$$

pre ktoré platí ; $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 1000$, ; $0 \leqq u \leqq v \leqq 1000$.

22. Nájdite všetky $n \geqq 3$, pre ktoré existuje

a) v rovine b) v priestore

pravidelný n-uholník s vrcholmi v mrežových bodoch.

23. Nech číslo N vznikne napísaním dekadických zápisov čísel od 10^5 do 8.10^5 včítane v ľubovoľnom poradí (ale každého práve raz). Dokážte, že číslo N nie je
a) vyššou ako druhou mocninou prirodzeného čísla;
b) vyššou ako prvou mocninou prirodzeného čísla.

3. československé stretnutie

Bílovec, 16.– 19. júna 1997

V tomto ročníku MO sa už po tretíkrát konala medzištátna súťaž medzi najlepšími riešiteľmi z Českej a Slovenskej republiky. Po prvom ročníku v mekke českej matematickej olympiády Jevíčku a minuloročnej súťaži v Žiline tentokrát súťaž prebiehala opäť v ČR, v priestoroch gymnázia so zameraním na matematiku v severomoravskom Bílovci. Organizačným vedúcim podujatia bol *doc. RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.,* z University Palackého v Olomouci.

Napriek tomu, že je táto súťaž azda najdôležitejšou previerkou pripravenosti súťažiacich družstiev pred medzinárodnou matematickou olympiádou, jedným z jej najväčších prínosov je stretnutie a spriatelenie sa študentov z dvoch historicky spätých krajín. Keďže príbuznosť jazykov organizátorov a oboch súťažiacich družstiev odstraňuje jazykovú bariéru, nie je potrebné prekladať ani zadania ani riešenia súťažiach do iných jazykov, je teda možné súťaž veľmi rýchlo vyhodnotiť. Preto je jej organizácia rovnaká ako v prípade tretieho kola kategórie A, s jediným rozdielom: čas na riešenie úloh je rovnaký ako na medzinárodnej olympiáde, teda štyri a pol hodiny. Výsledky súťaže sú v tabuľke.

Aj touto súťažou dávajú najvyššie orgány MO v oboch republikách najavo svoj záujem o vzájomnú spoluprácu a ďalšie pokračovanie v spoločnom organizovaní MO. Naďalej teda naozaj pokračuje dlhoročná tradícia MO v Československu, tak ako medzi organizátormi, tak aj medzi súťažiacimi.

V tomto ročníku bolo v tejto súťaži prvýkrát úspešnejšie slovenské družstvo, napriek tomu, že tento vynikajúci výsledok neskôr na MMO nepotvrdilo. Na druhej strane, v tradičnom volejbalovom stretnutí prvýkrát zvíťazilo družstvo Českej republiky. Možno práve tento fakt pomohol súperom k pomerne dobrému umiestneniu na MMO v Argentíne.

Por.	Meno	Ročník, Škola	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Súčet
1.	Vladimír Marko	4 G J. Hronca, Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
2.	Miroslav Dudík	4 G Trebišov	7	6	7	7	7	7	41
3.–5.	Libor Barto	3 G Hellichova, Praha	7	3	5	7	7	7	36
	Pavel Podbrdský	3 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	7	5	5	5	7	7	36
	Petr Zima	3 G nám.dr.E.Beneše, Kladno	7	2	7	6	7	7	36
6.	Peter Kozák	2 G Sučany	7	6	4	0	7	7	31
7.–8.	Viera Růžičková	3 G V. Okružná, Žilina	0	1	7	7	7	7	29
	Ján Špakula	3 G Poštová, Košice	7	7	1	2	7	5	29
9.	Peter Novotný	2 G V. Okružná, Žilina	7	0	4	2	7	7	27
10.–11.	Jan Spěvák	4 G Hellichova, Praha	7	4	4	5	4	1	25
	Jan Vybíral	4 G M.Kopernika, Bílovec	7	0	6	0	7	5	25
12.	Lukáš Vokřínek	2 G tř. Kpt. Jaroše, Brno	0	0	1	5	7	7	20

Zadania úloh 3. československého stretnutia

Úloha č.1

Daný je rovnostranný trojuholník ABC. Na jeho stranách AB a AC sú zvolené po rade body K a L tak, že $|BK| = |AL|$. Označme P priesečník úsečiek BL a CK. Určte pomer $|AK| : |BK|$, ak viete, že úsečky AP a CK sú navzájom kolmé.

(P.Kaňovský)

Úloha č.2

V danej spoločnosti viac ako šiestich ľudí si každý člen dopisuje s práve tromi ďalšími. Dokážte, že túto spoločnosť možno rozdeliť do dvoch neprázdnych skupín tak, aby si každý člen dopisoval s aspoň dvomi členmi tej skupiny, do ktorej sám patrí.

(J.Kratochvíl)

Úloha č.3

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$f\big(f(x) + y\big) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

platí pre všetky dvojice reálnych čísel x, y.

(P. Kaňovský)

Úloha č.4

Je možné v priestore rozmiestniť 100 gulí, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vnútorný bod, a to tak, aby sa každá z nich dotýkala aspoň tretiny ostatných?

(P.Hliněný)

Úloha č.5

Súčet niekoľkých celých čísel (niektoré z nich môžu byť rovnaké) sa rovná číslu 1 492. Zistite, či sa súčet ich siedmych mocnín môže rovnať

a) číslu 1 996, b) číslu 1 998.

(J.Šimša, J.Meszáros)

Úloha č.6

V istom jazyku sú len dve písmená A a B. Pre slová tohoto jazyka platí:

1) Jediné slovo dĺžky 1 je A.
2) Ľubovoľná skupina písmen $X_1X_2X_3 \dots X_nX_{n+1}$, kde $X_i \in \{A, B\}$ pre každý index i, tvorí slovo dĺžky $n + 1$, práve keď obsahuje aspoň jedno písmeno A, a pritom nie je tvaru $X_1X_2 \dots X_nA$, kde $X_1X_2 \dots X_n$ je slovo dĺžky n.

Dokážte, že existuje práve $\binom{3\,995}{1\,997} - 1$ slov, ktoré nezačínajú dvojicou písmen AA a sú zložené z 1 998 písmen A a rovnakého počtu písmen B.

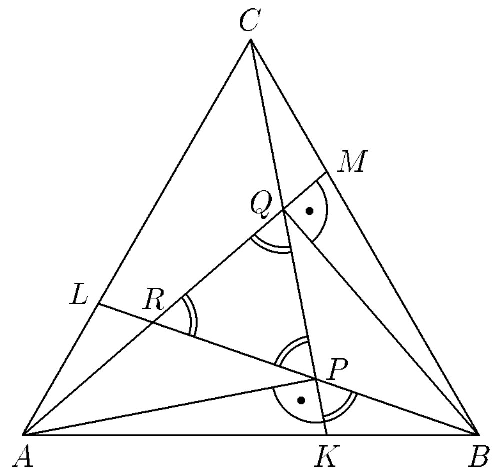
(J.Aragorn Tešínský)

Riešenia úloh 3. československého stretnutia

Úloha 1.

Zostrojme bod $M \in BC$ tak, aby $|BK| = |AL| = |CM|$. V otočení o $120°$, v ktorom $A \mapsto B \mapsto C$ ($\mapsto A$), platí tiež $M \mapsto L \mapsto K$ ($\mapsto M$), a teda rovnako $AM \mapsto$ $\mapsto BL \mapsto CK$ ($\mapsto AM$). Preto úsečky AM, BL a CK ohraničujú rovnostranný trojuholník PQR (obr. 27). Označme $d = |PQ|$. Z pravouhlých trojuholníkov APQ a BQR (s uhlom veľkosti $60°$ pri vrchole Q resp. R) dostávame $|AP| = d\sqrt{3}$ a $|BR| =$ $= 2d$, takže $|BP| = d$. Pretože poznáme vnútorné uhly trojuholníkov APK a BPK pri spoločnom vrchole P, môžeme určiť pomer ich obsahov:

$$\frac{S(APK)}{S(BPK)} = \frac{\frac{1}{2}d\sqrt{3} \cdot |PK| \cdot \sin 90°}{\frac{1}{2}d \cdot |PK| \cdot \sin 60°} = 2.$$



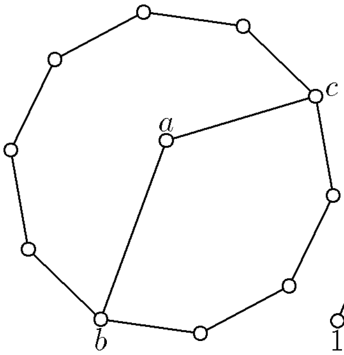
Obr. 27

Obidva trojuholníky však majú spoločnú výšku z vrcholu P, preto je určený pomer rovný hľadanému pomeru $|AK| : |BK|$.

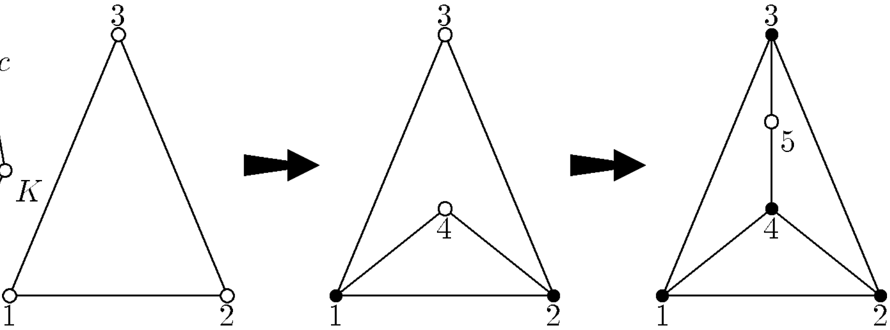
Úloha 2.

Situáciu popíšeme grafom s $n \geqq 7$ vrcholmi, ktoré budú zodpovedať jednotlivým členom spoločnosti; hranami spojíme práve tie dvojice vrcholov, ktoré zodpovedajú dvojiciam členov, ktorí si dopisujú. (V priebehu riešenia budeme vrcholy postupne označovať číslami $1, 2, \dots, n$.) Pretože z každého vrcholu vychádzajú práve tri hrany, iste v našom grafe existujú kružnice; nech K je tá z nich, ktorá má najkratšiu možnú dĺžku d, $3 \leqq d \leqq n$. (Ak je kružníc dĺžky d viac, vyberieme ľubovoľnú z nich). Nech $(1, 2, \dots, d, 1)$ je cyklické poradie vrcholov na kružnici K, a nech okrem hrán $(1, 2)$ a $(1, d)$ vychádza z vrcholu 1 ešte hrana $(1, x)$. Vrchol x na kružnici K neleží, inak by v grafe existovala kružnica kratšia ako K, a to kružnica $(1, 2, \dots, x-1, x, 1)$. Preto je $d < n$, takže množiny vrcholov K a $L = \{d+1, d+2, \dots, n\}$ tvoria rozdelenie množiny všetkých vrcholov na dve neprázdne podmnožiny. Kedy toto rozdelenie nevyhovuje podmienke zo zadania (hovorme ďalej „nie je vyhovujúce“)? Len vtedy, keď existuje „kritický“ vrchol $a \in L$, z ktorého vedú aspoň dve hrany, povedzme (a, b) a (a, c), do vrcholov na kružnici K (obr. 28). Vtedy môžeme „premostením“ kružnice K cestou (b, a, c) dostať dve nové kružnice nášho grafu; súčet ich dĺžok je zrejme $d+4$, čo v prípade $d \geqq 5$ vedie k sporu (dĺžka jednej z nových kružníc je menšia ako d). Preto zostáva posúdiť prípady, keď $d = 3$, alebo $d = 4$.

(i) $d = 3$. Ak nie je vyššie popísané rozdelenie na skupiny K a L vyhovujúce, budeme k skupine $\{1, 2, 3\}$ vrcholov kružnice K postupne pridávať „kritické“ vrcholy zo skupiny L, pokým také budú existovať. S ohľadom na ľubovôľu pri číslovaní vrcholov to musí prebiehať a skončiť najneskôr tak, ako vidieť na obr. 29. (Plným krúžkom znázorňujeme



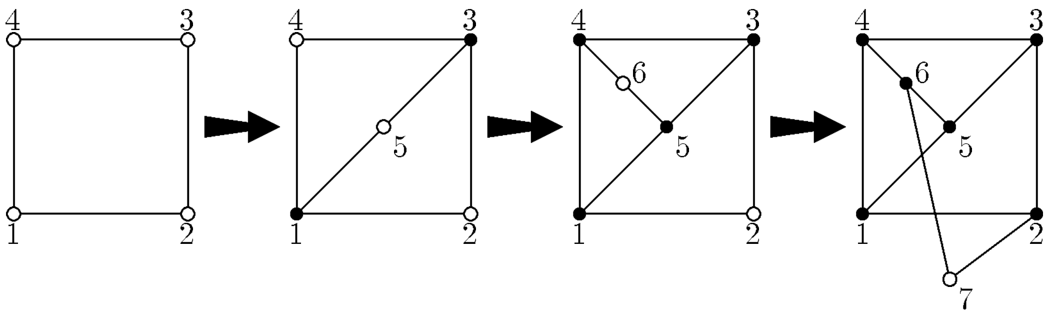
Obr. 28



Obr. 29

práve tie vrcholy, pri ktorých sú už zakreslené všetky tri hrany, ktoré z nich vychádzajú.) Rozdelenie vrcholov na skupinu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a jej (neprázdny) doplnok už musí byť vyhovujúce, lebo obidve skupiny spája práve jedna hrana (z vrcholu 5).

(ii) $d = 4$. Ak nie je rozdelenie na skupiny K a L vyhovujúce, budeme opäť pridávať k skupine vrcholov kružnice K „kritické“ vrcholy zo skupiny L. S ohľadom na ľubovôľu pri číslovaní vrcholov a na predpoklad, že v grafe neexistuje kružnica dĺžky 3, doplňovanie musí prebiehať a skončiť najneskôr tak, ako vidíte na obr. 30. (Využívame aj to,



Obr. 30

že $n \neq 6$, v prípade $n = 6$ by sme totiž po pridaní vrcholu 6 a hrany $(2, 6)$ dostali graf, pre ktorý vyhovujúce rozdelenie neexistuje. Ide o tzv. úplný bipartitný graf $\mathbf{K}_{3,3}$.) Rozdelenie vrcholov na skupinu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a jej doplnok už musí byť vyhovujúce, lebo obidve skupiny spája práve jedna hrana (odtiaľ mimochodom vyplýva, že aj druhá skupina je neprázdna, t.j. že $n > 7$).

Úloha 3.

Najprv dosadíme do danej rovnice $y = -f(x)$ a dostaneme

$$f(0) = f\bigl(x^2 + f(x)\bigr) - 4\bigl(f(x)\bigr)^2. \tag{1}$$

Dosadením $y = x^2$ ďalej

$$f\bigl(f(x) + x^2\bigr) = f(0) + 4f(x)x^2 \tag{2}$$

a sčítaním oboch rovností (1) a (2) dostaneme

$$4f(x)x^2 - 4\big(f(x)\big)^2 = f(x)\big(f(x) - x^2\big) = 0. \tag{3}$$

Z tejto rovnosti vyplýva jednak $f(0) = 0$, jednak $f(x) = x^2$ pre každé x, pre ktoré $f(x) \neq 0$. Ľahko sa presvedčíme, že danej rovnici vyhovujú nasledujúce dve riešenia:

$$f(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{a} \qquad f(x) = x^2 \ (x \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

Teraz predpokladajme, že existuje ešte iné riešenie f. Potom by muselo existovať $x_0 \neq 0$, pre ktoré $f(x_0) = 0$, a zároveň $y_0 \neq 0$ také, že $f(y_0) \neq 0$ (a teda podľa (3) $f(y_0) = y_0^2$). Ale dosadením $x = 0$ do pôvodnej rovnice máme $f(y) = f(-y)$, takže môžeme predpokladať, že $y_0 > 0$. Ak dosadíme do danej rovnice $x = x_0$, $y = -y_0$, dostaneme

$$0 \neq y_0^2 = f(-y_0) = f(x_0^2 + y_0) = (x_0^2 + y_0)^2 > y_0^2.$$

To je spor. Iné riešenia ako (4) daná rovnica nemá.

Úloha 4.

Nie je to možné. Predpokladajme, že také rozmiestnenie existuje. Označme K_0 jednu z gulí najmenšieho polomeru r_0 a S_0 jej stred. Každú z najmenej 33 gulí dotýkajúcich sa gule K_0 vhodnou rovnoľahlosťou zmenšíme tak, aby jej polomer bol r_0 a pritom ostal zachovaný pôvodný bod dotyku s guľou K_0. Zmenšené gule budú teda ležať v guli K so stredom S_0 a polomerom $3r_0$. Rovnako ako pôvodné gule, nemajú ani zmenšené gule žiaden spoločný vnútorný bod Pre objem $V(K)$ gule K však platí $V(K) = 3^3V(K_0) = 27V(K_0)$. Guľa K teda nemôže obsahovať 34 gulí s objemom $V(K_0)$, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vnútorný bod. To je však spor.

Úloha 5.

a) Áno, vhodný príklad objavíme, keď si všimneme, že platí

$$1\,996 - 1\,492 = 504 = 4 \cdot 126 = 4 \cdot (2^7 - 2).$$

Preto vyhovujúcu skupinu čísel zostavíme zo štyroch dvojok a 1 484 $(= 1\,492 - 4 \cdot 2)$ jedničiek.

b) Nie. Naše tvrdenie dokážeme pomocou deliteľnosti číslom 7, ktorým je deliteľný rozdiel $a^7 - a$ pre každé celé číslo a (podľa *malej Fermatovej vety*). Odtiaľ totiž vyplýva, že súčet siedmych mocnín ľubovoľnej skupiny celých čísel dáva po delení siedmymi rovnaký zvyšok ako súčet ich prvých mocnín. Číslo $1\,998 - 1\,492 = 506$ však siedmymi deliteľné nie je. (Rovnako možno argumentovať aj pomocou deliteľnosti tromi.)

Úloha 6.

Najprv určme, kedy tvorí daná skupina $\mathcal{W} = X_1X_2\dots X_n$ (zložená z písmen A, B) slovo uvažovaného jazyka. Nech $p \geqq 0$ je počet písmen A, ktorými skupina $\mathcal{W}$ končí, presnejšie, je tvaru $\mathcal{W} = X_1X_2\dots X_{n-p}\underbrace{AA\dots A}_{p\text{-krát}}$, kde v prípade $p < n$ nutne $X_{n-p} = B$. Indukciou podľa čísla p sa ľahko overia dve pravidlá:

- Ak nie je medzi $X_1, \dots, X_{n-p}$ žiadne A (ako v prípade $p = n$), potom $\mathcal{W}$ je slovo, práve keď je číslo p nepárne. (Skupina $X_1 X_2 \dots X_{n-p}$ nie je totiž slovo.)
- Ak je naopak medzi $X_1, \dots, X_{n-p}$ aspoň jedno A, potom $\mathcal{W}$ je slovo, práve keď je číslo p párne. (Skupina $X_1 X_2 \dots X_{n-p}$ je totiž slovo.)

Ďalej pre stručnosť označme $k = 1\,998$ (k je teda párne). Podľa predchádzajúceho popisu sú všetky slová $\mathcal{W}$, zložené z k písmen A, k písmen B a nezačínajúce dvojicou AA, jedného z nasledujúcich tvarov:

a) $\mathcal{W} = AB \dots B \underbrace{AA \dots A}_{2j\text{-krát}}$, kde $j \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$. Pre každé také j prvé tri bodky v zápise $\mathcal{W}$ označujú ľubovoľné poradie $k-2$ písmen B a $k - 2j - 1$ písmen A; týchto poradí je práve $\binom{2k-2j-3}{k-2}$.

b) $\mathcal{W} = B \dots B \underbrace{AA \dots A}_{2j\text{-krát}}$, kde $j \in \{0, 1, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$. Pre každé také j prvé tri bodky v zápise $\mathcal{W}$ označujú ľubovoľné poradie $k-2$ písmen B a $k-2j$ písmen A; týchto poradí je práve $\binom{2k-2j-2}{k-2}$.

Ak spočítame všetky počty zistené v častiach a) a b), dostaneme počet všetkých skúmaných slov:

$$\sum_{j=k-1}^{2k-2} \binom{j}{k-2} = \sum_{j=k-2}^{2k-2} \binom{j}{k-2} - 1 = \binom{2k-1}{k-1} - 1 = \binom{3\,995}{1\,997} - 1;$$

pri tom sme využili známu identitu

$$\binom{d}{d} + \binom{d+1}{d} + \binom{d+2}{d} + \dots + \binom{D}{d} = \binom{D+1}{d+1}, \qquad D \geqq d,$$

ktorú možno ľahko overiť indukciou podľa čísla D (pri pevnom d), alebo peknou kombinatorickou úvahou: Všetky $(d+1)$-prvkové podmnožiny množiny $\{0, 1, \dots, D\}$ rozdelíme do skupín podľa ich najväčšieho prvku, čísla M ($d \leqq M \leqq D$); práve $\binom{M}{d}$ takých podmnožín má totiž za najväčší prvok číslo M. Tým je úloha vyriešená.

38. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 18. až 31. júla 1997 sa v Mar del Plata v Argentíne, po prvý raz v histórii na juhoamerickom kontinente, uskutočnila medzinárodná matematická olympiáda. Súťažilo spolu 460 študentov z 82 krajín, celkový počet účastníkov, vrátane vedúcich výprav, organizátorov a koordinátorov, prevýšil číslo 800.

Medzinárodná matematická olympiáda (MMO) je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené z najviac šiestich súťažiacich, sprevádzané dvoma vedúcimi. Slovenské družstvo tento rok tvorili *Miroslav Dudík* zo 4 .ročníka Gymnázia v Trebišove, *Peter Kozák* z 2. ročníka Gymnázia v Sučanoch, *Vladimír Marko* zo 4. ročníka Gymnázia J.Hronca v Bratislave, *Peter Novotný* z 2. ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline, *Viera Růžičková* z 3. ročníka Gymnázia Veľká Okružná v Žiline a *Ján Špakula* z 3. ročníka Gymnázia Poštová v Košiciach. Vedúcim delegácie bol *RNDr. Pavol Černek, Csc.* a zástupcom vedúceho *Richard Kollár*, obaja z MFF UK v Bratislave.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni, študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na ich vyriešenie majú 4,5 hodiny. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Výsledky slovenského družstva uvádza nasledujúca tabuľka (ČU – čestné uznanie, získavajú tí súťažiaci, ktorí nezískajú žiadnu cenu, ale získajú aspoň za jednu z úloh hodnotenie 7 bodov):

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Miroslav Dudík	4	0	0	6	7	3	20	3.
Peter Kozák	5	0	1	4	2	0	12	–
Vladimír Marko	7	7	7	7	0	3	31	2.
Peter Novotný	1	7	0	7	1	0	16	3.
Viera Růžičková	2	2	0	4	1	0	9	–
Ján Špakula	0	1	0	7	0	0	8	ČU

Družstvo Slovenska skončilo v neoficiálnom poradí krajín na 36. mieste, čiže najhoršie v histórii MMO. Najúspešnejšie bolo družstvo Číny, napriek tomu, že jej najlepší reprezentant získal „iba“ 38 bodov. Poradie ďalších krajín je v tabuľke.

Spolu bolo udelených 39 prvých, 70 druhých a 122 tretích cien. Plný počet bodov (42) získali tento rok štyria súťažiaci, po jednom z Iránu, Rumunska, USA a Vietnamu. Jeden z nich – *Ciprian Manolescu* z Rumunska, získal plný počet bodov už po tretíkrát za sebou, čo je skutočne obdivuhodný výkon. Naše družstvo, tak ako minulý rok, prekvapilo. Tentokrát však veľmi zlým výkonom. Po 17. mieste v Indii sa očakával určite lepší výsledok ako 36. miesto napr. za Brazíliou, Mexikom a Lotyšskom. Neuspeli sme v úlohách s klasickými témami, planimetria a teória čísel, avšak v zložitej kombinatorickej úlohe, najťažšej úlohe tohtoročnej MMO, sme obstáli aj s nízkym bodovým ziskom nadpriemerne. Napriek miernemu neúspechu, nášmu najúspešnejšiemu olympionikovi, *Vladimírovi Markovi*, ušla tentokrát zlatá medaila len o kúsok, hranica bola 35 bodov. Bronzovú medailu však získal ešte len druhák *Peter Novotný*, a keďže okrem neho bol v družstve ešte jeden druhák a dvaja tretiaci, Slovensko vyslalo na MMO najmladšie družstvo v histórii. Na budúci rok sa už od skúseného družstva bude očakávať priaznivejší výsledok. Tím Českej republiky, ktorý minulý rok sklamal (28.), a nad ktorým sme tento rok výrazne zvíťazili v medzištátnom stretnutí, podal veľmi dobrý výkon a skončil na 18. mieste, keď *Pavel Podbrdský* získal zlatú medailu.

Okrem premiéry v Južnej Amerike mala olympiáda aj iné prívlastky, medzi inými aj najstarostlivejšie pripravená. Stovky organizátorov už pred olympiádou simulovali priamo na mieste rôzne situácie, čo napokon viedlo k úplne bezproblémovému priebehu MMO. Autobusy odchádzali s minimálnym meškaním, neboli problémy s informovanosťou. Námietky neboli po minuloročnej skúsenosti v Indii skutočne skoro žiadne.

Družstvo Slovenska po dlhej a náročnej ceste cez Viedeň, Amsterdam, Sao Paulo a Buenos Aires čakal na letisku sprievodca, už dôchodca *Justín Dudáš*, pôvodom Slovák. Keďže hovoril výborne po slovensky, dozvedeli sme sa od neho mnoho o živote v Argentíne, aj to, čo sme za krátky čas pobytu spoznať nemohli. Samotní argentínčania sú veľmi temperamentní. V letovisku Mar del Plata, napriek tomu, že bola v skutočnosti zima, bol v uliciach život v každú dennú aj nočnú hodinu (teplota sa pohybovala okolo 20° C). Na krásnych plážach a pešej zóne bolo aj o tretej hodine rannej množstvo ľudí, vrátane rodičov s malými deťmi, predávala sa cukrová vata, zmrzlina, obchody a reštaurácie boli otvorené. Úplný protiklad nočného života u nás. Krajina okolo Mar del Plata veľmi pripomína náš Žitný ostrov: siahodlhé polia, dobytok. Navštívili sme aj miestnu mini Zoo, morské akvárium s týranými tuleňmi a plameniakmi trasúcimi sa od zimy. Mesto Mar del Plata je argentínske rekreačné stredisko, ktoré má v zime pol milióna obyvateľov, ale v lete sú ich tam viac ako dva milióny. Všetci sa stretajú poobede na pláži popíjajúc neodmysliteľné maté podobný silnému zelenému čaju.

Avšak stredisko olympiády bolo priamo v hoteli, v ktorom bývali študenti. Množstvo zaujímavostí pripravili organizátori súťažiacim priamo pod nos. Hracie automaty, počítačové hry, ping-pongové stoly, biliard, stolné hry, veľkú puzzle (práve v jej skladaní sa vyznamenalo naše družstvo), večerné kino, diskotéky, folkový koncert a aj odvážne divadlo, to všetko sa dalo nájsť v pomerne luxusnom hoteli priamo v centre Mar del Plata. Dôležitou súčasťou a aj poslaním olympiády je stretávanie sa študentov z rôznych krajín. Študenti, ako aj vedúci, si vzájomne vymieňajú množstvo suvenírov. Tento rok dokonca zriadili organizátori špeciálnu miestnosť, kde každá krajina mohla prezentovať materiály o svojej krajine, a zároveň spoznávať ostatné. Pre všetkých účastníkov zorganizovali popoludnie hier vo veľkej športovej hale. V tradičných aj menej tradičných disciplínach si merali vzájomne sily študenti z celého sveta. Naši najmä s rivalmi z Českej republiky, žiaľ aj tu sme ťahali za kratší povraz.

Olympiáda bola veľmi úspešná, prejavil sa obrovský kus práce, ktorú odviedli domáci. Pred organizátorov nasledujúcich ročníkov postavili vysokú latku. Budúcu MMO usporiada Tchaj-wan, nasledujú Rumunsko (jubilejný 40. ročník), Južná Kórea, USA, Japonsko a Filipíny.

Výsledky medzinárodnej matematickej olympiády

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Albánsko	3	15	0	0	0	71.–72.
Alžírsko	4	3	0	0	0	82.
Argentína	6	94	0	0	3	37.–38.
Arménsko	6	97	0	0	3	34.–35.
Austrália	6	187	2	3	1	9.
Azerbajdžan	6	56	0	0	1	55.
Bielorusko	6	140	0	2	4	17.
Belgicko	6	88	0	0	3	41.–42.
Bosna a Hercegovina	5	45	0	0	1	62.
Bolívia	3	13	0	0	0	74.
Brazília	6	117	0	1	4	26.
Bulharsko	6	191	2	3	1	7.–8.
Cyprus	3	5	0	0	0	80.
Česko	6	139	1	2	2	18.
Čína	6	223	6	0	0	1.
Dánsko	6	53	0	0	1	57.–59.
Estónsko	6	64	0	0	2	53.–54.
Filipíny	2	14	0	0	0	73.
Fínsko	6	97	0	0	4	34.–35.
Francúzsko	6	105	1	0	1	32.–33.
Grécko	6	75	0	1	0	45.
Gruzínsko	6	109	0	1	3	28.
Guatemala	6	7	0	0	0	79.
Holandsko	6	94	0	2	0	37.–38.
Hong Kong	6	106	0	0	5	30.–31.
Chile	6	28	0	0	0	66.
Chorvátsko	6	121	0	1	4	24.
India	6	146	0	3	3	15.
Indonézia	6	44	0	0	0	63.
Irán	6	217	4	2	0	3.
Island	6	48	0	1	0	60.–61.
Izrael	6	124	0	1	5	22.–23.
Írsko	6	21	0	0	0	68.
Japonsko	6	163	1	3	1	12.
JAR	6	93	1	0	2	39.
Juhoslávia	6	125	0	2	3	20.–21.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Južná Kórea	6	164	1	4	1	11.
Kanada	6	107	0	2	2	29.
Kazachstan	6	73	0	0	1	46.–47.
Kirgistan	3	11	0	0	0	75.
Kolumbia	6	112	0	0	6	27.
Kuba	6	91	0	1	2	40.
Kuvajt	4	8	0	0	0	76.–78.
Litva	6	67	0	1	1	51.
Lotyšsko	6	124	0	1	4	22.–23.
Macao	6	55	0	0	0	56.
Macedónsko	6	73	0	0	3	46.–47.
Maďarsko	6	219	4	2	0	2.
Malajzia	6	19	0	0	0	69.–70.
Maroko	6	48	0	0	0	60.–61.
Mexiko	6	105	0	1	3	32.-33.
Moldavsko	3	53	0	0	2	57.–59.
Mongolsko	6	106	1	0	3	30.–31.
Nemecko	6	161	1	3	2	13.
Nový Zéland	6	71	0	0	2	48.–49.
Nórsko	6	79	0	0	3	44.
Paraguay	6	8	0	0	0	76.–78.
Peru	6	64	0	0	2	53.–54.
Poľsko	6	125	0	2	2	20.–21.
Portoriko	6	8	0	0	0	76.–78.
Portugalsko	6	15	0	0	0	71.–72.
Rakúsko	6	86	1	0	1	43.
Rumunsko	6	191	2	3	1	7.–8.
Rusko	6	202	3	2	1	4.–5.
Sigapúr	6	88	0	0	4	41.–42.
Slovensko	6	96	0	1	2	36.
Slovinsko	6	70	0	0	2	50.
Španielsko	6	39	0	0	0	64.
Švajčiarsko	5	53	0	0	2	57.–59.
Švédsko	6	128	1	0	3	19.
Taliansko	6	71	0	0	1	48.–49.

Krajina	Poč. žiakov	Body	1.cena	2.cena	3.cena	Poradie
Thajsko	6	66	0	0	1	52.
Tchaj-wan	6	148	0	4	2	14.
Trinidad a Tobago	6	30	0	0	0	65.
Turecko	6	119	0	1	4	25.
Ukrajina	6	195	3	3	0	6.
Uruguay	6	19	0	0	0	69.–70.
USA	6	202	2	4	0	4.–5.
Uzbekistan	3	23	0	0	0	67.
Veľká Británia	6	144	1	2	2	16.
Venezuela	3	4	0	0	0	81.
Vietnam	6	183	1	5	0	10.

Zadania úloh MMO

1. Body roviny s celočíselnými súradnicami sú vrcholmi jednotkových štvorcov. Tieto štvorce sú zafarbené striedavo čiernou a bielou farbou (ako na šachovnici). Pre ľubovoľnú dvojicu kladných celých čísel m a n uvažujme pravouhlý trojuholník, ktorého vrcholy majú celočíselné súradnice, a ktorého odvesny dĺžok m a n ležia pozdĺž strán štvorcov. Nech S_1 je celkový obsah čiernej časti trojuholníka a S_2 celkový obsah jeho bielej časti. Označme $f(m,n) = |S_1 - S_2|$.

a) Vypočítajte $f(m,n)$ pre všetky kladné celé čísla m a n, ktoré sú obe párne alebo obe nepárne.

b) Dokážte, že $f(m,n) \leqq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ pre všetky m a n.

c) Ukážte, že neexistuje žiadna konštanta C taká, že $f(m,n) < C$ pre všetky m a n.

2. Trojuholník ABC má najmenší uhol pri vrchole A. Body B a C rozdelia kružnicu trojuholníku opísanú na dva oblúky. Nech U je vnútorný bod oblúka medzi bodmi B a C, ktorý neobsahuje bod A. Osi úsečiek AB a AC pretínajú priamku AU po rade v bodoch V a W. Priamky BV a CW sa pretínajú v bode T. Dokážte, že $|AU| = |TB| + |TC|$.

3. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú reálne čísla spĺňajúce podmienky:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1 \qquad \text{a} \qquad |x_i| \leqq \frac{n+1}{2} \qquad \text{pre} \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dokážte, že existuje poradie $y_1, y_2, \dots, y_n$ čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ také, že

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leqq \frac{n+1}{2}.$$

4. Matica $n \times n$ (štvorcová tabuľka s n riadkami a n stĺpcami), ktorej všetky prvky sú z množiny $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, sa volá *strieborná* matica, ak pre každé $i = 1, \dots, n$ jej i-ty riadok a i-ty stĺpec obsahujú dohromady všetky prvky S. Dokážte, že

a) neexistuje žiadna strieborná matica pre $n = 1997$;

b) strieborné matice existujú pre nekonečne veľa hodnôt n.

5. Nájdite všetky dvojice (a, b) celých čísel $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, ktoré spĺňajú rovnicu

$$a^{b^2} = b^a.$$

6. Pre každé kladné celé číslo n označme $f(n)$ počet spôsobov vyjadrenia čísla n v tvare súčtu mocnín čísla 2 s nezápornými celými exponentami. Vyjadrenia, ktoré sa líšia iba poradím sčítancov, považujeme za rovnaké. Napríklad $f(4) = 4$, pretože číslo 4 môžeme vyjadriť nasledujúcimi štyrmi spôsobmi: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1. Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geqq 3$ platí

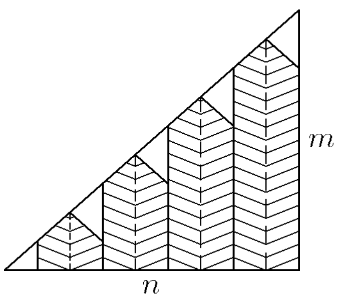
$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Riešenia úloh MMO

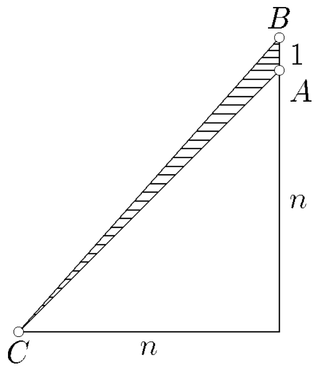
Úloha 1. *Riešenie podľa Vladimíra Marka.*

a) Doplňme daný trojuholník na obdĺžnik. Keďže m a n majú rovnakú paritu, zrejme aj políčko v ľavom hornom rohu má rovnakú farbu ako políčko v pravom dolnom rohu. Poľahky sa nahliadne, že aj celý vzniknutý obdĺžnik bude stredovo súmerný, vrátane ofarbenia (čierne políčko sa zobrazí na čierne a biele na biele). Potom však zrejme $f(m,n) = \frac{1}{2}|S_1' - S_2'|$, kde S_1' a S_2' sú po rade obsahy čiernej a bielej plochy v celom obdĺžniku. Preto

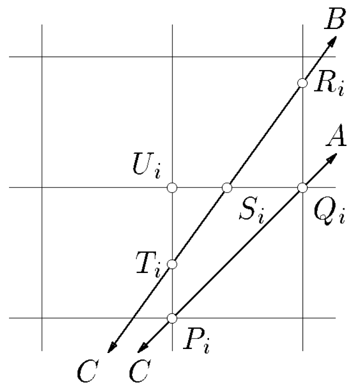
- $f(m,n) = 0$ ak $m \equiv n \equiv 0 \pmod 2$, lebo vtedy $S_1' = S_2'$;
- $f(m,n) = \frac{1}{2}$ ak $m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$, lebo vtedy $|S_1' - S_2'| = 1$.



Obr. 31



Obr. 32



Obr. 33

b) Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $n \geqq m$. Rozdeľme trojuholník na pásy šírky dva kolmo na dlhšiu odvesnu tak, že začneme deliť od druhej odvesny (obr. 31). (Pre nepárne n zostane ešte zvyšok šírky 1.)

Vyšrafované časti v jednotlivých pásoch sú osovo súmerné, ale s opačným ofarbením. Preto rozdiel $|S_1 - S_2|$ nemôže prevýšiť súčet obsahov nevyšrafovaných častí. Každá z nich má zrejme obsah $\frac{m}{n}$. Pre párne n je pásov šírky dva spolu $\frac{n}{2}$ a žiaden zvyšok, čiže súčet obsahov nevyšrafovaných častí je spolu $\frac{n}{2} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{2}$. Pre nepárne n je pásov šírky dva len $\frac{n-1}{2}$ a zvyšok má obsah $\frac{m}{2n}$. Preto je v tomto prípade súčet obsahov nevyšrafovaných častí $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{m}{n} + \frac{m}{2n} = \frac{m}{2}$.

Z toho vyplýva, že $|S_1 - S_2| \leqq \frac{1}{2}m$, z čoho okamžite dostávame požadované tvrdenie $f(m,n) \leqq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$. (Z dôkazu ľahko vyplýva, že dokonca $f(m,n) \leqq \frac{1}{2}\min\{m,n\}$.)

c) Položme $m = n+1$ pre ľubovoľné kladné párne n. V časti a) sme ukázali, že $f(n,n) = 0$. Preto $f(m,n)$ možno vypočítať ako $|S_1' - S_2'|$, kde S_1' a S_2' sú po rade obsahy čiernej a bielej plochy vo vyšrafovanom trojuholníku, ktorý vznikne z pôvodného pravouhlého trojuholníka s odvesnami n a $n+1$ odobraním pravouhlého rovnoramenného trojuholníka s odvesnami n (obr. 32). Situácia v i-tom stĺpci zľava je podrobnejšie nakreslená na obr. 33. Zrejme platí

$$|T_iU_i| = \frac{n+1-i}{n}, \quad |S_iU_i| = \frac{n+1-i}{n+1}, \quad |S_iQ_i| = \frac{i}{n+1}, \quad |R_iQ_i| = \frac{i}{n}.$$

Potom

$$f(m,n) = \left|\sum_{i=1}^{n} (S_{\triangle P_iQ_iU_i} - S_{\triangle S_iT_iU_i} - S_{\triangle S_iR_iQ_i})\right|.$$

Všetky tieto obsahy možno ľahko spočítať. Po dosadení a úpravách

$$\begin{aligned} f(m,n) &= \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{n+1-i}{n+1}\cdot\frac{n+1-i}{n} - \frac{1}{2}\frac{i}{n+1}\frac{i}{n}\right)\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1-i)^2}{n(n+1)} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n(n+1)}\right|. \end{aligned}$$

Ak v prvej sume zavedieme substitúciu $j = n+1-i$, zistíme, že

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(n+1-i)^2}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n(n+1)},$$

teda

$$f(m,n) = \left|\frac{1}{2}n - \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{1}{2}n - \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right| = \frac{n-1}{6}.$$

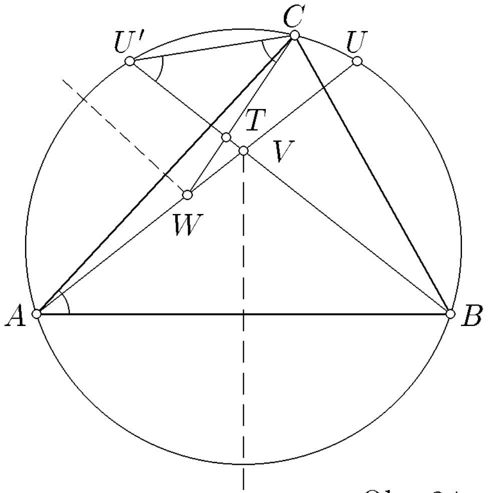
Preto zrejme pre rastúce párne n rastie hodnota $f(n+1,n)$ nad všetky medze.

Úloha 2.

Označme U' obraz bodu U v osovej súmernosti podľa osi strany AB (obr. 34). Zrejme aj bod U' leží na kružnici opísanej trojuholníku ABC a $|AU| = |BU'|$, teda stačí dokázať, že $|TC| = |TU'|$, t.j. že trojuholník $U'TC$ je rovnoramenný so základňou $U'C$.

Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha$ a $|\sphericalangle BAU| = \varphi$. Z vety o obvodovom uhle platí $|\sphericalangle CU'T| = \alpha$. Z rovnoramenného trojuholníka ABV dostávame $|\sphericalangle AVB| = \pi - 2|\sphericalangle VAB| = \pi - 2\varphi$.

Podobne z trojuholníka ACW máme $|\sphericalangle AWC| = \pi - |\sphericalangle CAW| = \pi - 2\alpha + 2\varphi$. Potom pre uhly trojuholníka VWT platí $|\sphericalangle WVT| = \pi - |\sphericalangle AVB| = 2\varphi$, $|\sphericalangle VWT| = \pi - |\sphericalangle AWC| = 2\alpha - 2\varphi$ a napokon $|\sphericalangle WTV| = \pi - |\sphericalangle TWV| - |\sphericalangle TVW| = \pi - 2\alpha$. Preto $|\sphericalangle U'TC| = \pi - 2\alpha$. Potom ale v trojuholníku $U'CT$ platí $|\sphericalangle U'CT| = \pi - |\sphericalangle CU'T| - |\sphericalangle U'TC| = \alpha$, čiže je naozaj rovnoramenný.



Obr. 34

V prípade, že uhol α je ostrý, možno previesť všetky spomínané úvahy.

Úloha 3. *Riešenie podľa Vladimíra Marka.*

Bez ujmy na všeobecnosti nech $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (pre $\sum_{i=1}^{n} x_i = -1$ stačí všetky x_i prenásobiť číslom -1 a úloha sa pretransformuje na pôvodnú so súčtom 1). Teraz určme „priemernú“ hodnotu S_p súčtu $\sum_{i=1}^{n} iy_i$, kde $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ je ľubovoľná permutácia $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, t.j. $y \in \pi(x)$ – spočítame súčet týchto hodnôt pre všetky možné permutácie a predelíme túto hodnotu ich počtom (zrejme $n!$).

$$S_p = \frac{\sum\limits_{y\in\pi(x)} \sum\limits_{i=1}^{n} iy_i}{n!}.$$

Keďže každé x_i sa vyskytne na konkrétnej j-tej pozícii práve $(n-1)!$-krát, preto

$$S_p = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(n-1)!\,jx_i}{n!} = \frac{\binom{n+1}{2}(n-1)!\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n!} = \frac{n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n+1}{2}.$$

Z toho vyplýva, že buď sú všetky súčty $\sum_{i=1}^{n} iy_i$ rovné $\dfrac{n+1}{2}$, alebo existujú zároveň súčty väčšie aj menšie ako $\frac{n+1}{2}$. Aby sme dokázali tvrdenie zo zadania, potrebujeme dokázať, že existuje taká permutácia y, pre ktorú $\sum_{i=1}^{n} iy_i$ je z intervalu $\langle -\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\rangle$. V prvom prípade (ak sú všetky tieto súčty rovné $\frac{n+1}{2}$) je to zrejmé, skúmajme preto druhú možnosť (existujú väčšie aj menšie). Uvažujme teraz takú permutáciu y, že $S_0 = \sum_{i=1}^{n} iy_i > \frac{n+1}{2}$ a druhú permutáciu z takú, že $S_2 = \sum_{i=1}^{n} iz_i < \frac{n+1}{2}$. Je zrejmé, že z permutácie y sa dá dostať k permutácii z postupnou výmenou susedných čísel v permutáciách. Pri takejto výmene $(y_1, \dots, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)$ na $(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, y_k, \dots, y_n)$ sa súčet S_0 zmení na S_1 takto:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= y_1 + \ldots + (k-1)y_{k-1} + ky_{k+1} + (k+1)y_k + (k+2)y_{k+2} + \ldots + ny_n = \\
&= S_0 + y_k - y_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Vzhľadom na to, že $|y_k| \leqq \frac{n+1}{2}$ a $|y_{k+1}| \leqq \frac{n+1}{2}$, je výraz $|y_k - y_{k+1}| \leqq n+1$. Preto sa počas popísanej výmeny zmení súčet S_0 nanajvýš o $n+1$. Toto platí pre každú výmenu v prechode od permutácie y k permutácii z. Teda ak sa má zmeniť hodnota tohto súčtu z $S_0 > \frac{n+1}{2}$ na $S_2 < \frac{n+1}{2}$, musí sa tento súčet dostať aspoň raz do intervalu $\langle -\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}\rangle$. V tej chvíli však aktuálna permutácia spĺňa podmienku zo zadania úlohy, čím je tvrdenie dokázané.

Úloha 4.

a) Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že pre prirodzené číslo n, $n > 1$ existuje *strieborná* matica A typu $n \times n$. Nech x je pevne zvolený prvok z množiny $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ ktorý neleží na uhlopriečke A (zrejme taký existuje). Zjednotenie i-teho stĺpca a i-teho riadku budeme ďalej nazývať i-ty kríž. Prvok x sa musí nachádzať v každom takomto kríži práve raz. Ak x je v A v i-tom riadku a j-tom stĺpci, potom A patrí aj i-temu aj j-temu krížu, t.j. jeden výskyt čísla x v A zabezpečuje jeho účasť v dvoch krížoch. Keďže však $n = 1997$ je nepárne číslo, muselo by sa x v A nachádzať práve $\frac{1997}{2}$-krát, čo však samozrejme nie je možné.

b) Popíšeme rekurentný postup na nájdenie *striebornej* matice typu $2n \times 2n$. Pre $n = 1$ nech

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

Táto matica je zrejme *strieborná*. Pre $n = 4$ ich je niekoľko, napríklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nech teraz A je *strieborná* matica typu $n \times n$. Potom skonštruujme *striebornú* maticu typu $2n \times 2n$ nasledujúcim spôsobom:

$$D = \begin{pmatrix} A & U \\ V & A \end{pmatrix},$$

kde U je matica typu $n \times n$, ktorá vznikne z A pripočítaním $2n$ ku každému jej prvku a V je matica, ktorá vznikne z U nahradením každého jej diagonálneho prvku číslom $2n$. Dokážeme, že aj matica D je *strieborná*. Uvažujme i-ty kríž v matici D. Nech $i \leqq \leqq n$, opačný prípad sa preverí analogicky. Tento kríž sa skladá z i-teho kríža A, i-teho riadku U a i-teho stĺpca V. Ale i-ty kríž A obsahuje (na základe predpokladu o A) čísla $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ a i-ty riadok U spolu s i-tym stĺpcom V spolu obsahujú vďaka našej konštrukcii čísla $\{2n, 2n+1, \dots, 4n+1\}$. Tým je tvrdenie dokázané.

Úloha 5. *Riešenie podľa Miroslava Dudíka.*

Pre $a = 1$ máme $1^{b^2} = b^1$, teda $b = 1$. Pre $b = 1$ podobne $a^{1^2} = 1^a$, čiže $a = 1$. Preto môžeme ďalej predpokladať, že $a > 1$ a $b > 1$. V prvočíselných rozkladoch a a b sa zrejme budú nachádzať rovnaké prvočinitele. Nech teda

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}, \qquad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}.$$

Podľa zadania má platiť

$$p_1^{\alpha_1 \cdot b^2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n \cdot b^2} = a^{b^2} = b^a = p_1^{\beta_1 \cdot a} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n \cdot a}.$$

Preto musí pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ platiť

$$a \cdot \beta_i = \alpha_i \cdot b^2,$$

čiže pomer $\dfrac{\beta_i}{\alpha_i}$ je konštantný a rovný racionálnemu číslu k,

$$k = \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{b^2}{a} = p_1^{2\beta_1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{2\beta_n - \alpha_n}. \tag{1}$$

Teda $\alpha_i \cdot k = \beta_i$, preto $2\beta_i - \alpha_i = \alpha_i \cdot (2k-1)$, pre $i = 1, \dots, n$. Preto

$$k = p_1^{\alpha_1 \cdot (2k-1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n \cdot (2k-1)} = a^{2k-1}. \tag{2}$$

Všetky tieto exponenty ($\alpha_i \cdot (2k-1)$) sú celé čísla, a keďže všetky α_i sú kladné, ich znamienko závisí len od znamienka $2k-1$. Rozoberieme niekoľko prípadov.

- Ak $2k-1=0$, tak potom z (2) vyplýva $k=a^0=1$, čo zrejme nemôže nastať.
- Ak $2k-1>0$, tak rozdiely $2\beta_i-\alpha_i$ sú kladné celé čísla, preto je na základe (1) číslo k kladné celé číslo. Z (2) potom pre $k=1$ dostávame neprípustné $a=1$, pre $k>1$ však platí $a^{2k-1} \geqq a^k > k$ (pre $a \geqq 2$). Preto také riešenie neexistuje.
- Ak $2k-1<0$, tak rozdiely $2\beta_i-\alpha_i$ sú záporné celé čísla, preto je na základe (1) číslo k prevrátenou hodnotou kladného celého čísla. Nech teda $q=\frac{1}{k}$. Ďalej z rovnosti $\alpha_i \cdot k=\beta_i$ vyplýva $a=b^q$. Potom daná rovnica prejde do tvaru $b^{q\cdot b^2} = b^{b^q}$, teda $q\cdot b^2=b^q$, čiže $b^{q-2}=q$. Pre $q=1$ dostávame neprípustné $b=1$, pre $q=2$ dostávame $2=b^0=1$, čo nedáva žiadne riešenie. Pre $q=3$ dostávame $3=b^1$, dopočítame $a=27$, pre $q=4$ dostávame $4=b^2$, teda $b=2$, dopočítame $a=16$. Pre $q>4$ a $b \geqq 2$ je $b^{q-2} \geqq 2^{q-2} > q$ (posledná nerovnosť pre $q=5$ platí a pre ďalšie q sa jednoducho dokáže matematickou indukciou).

Všetky riešenia danej rovnice sú $a=b=1$, $a=27, b=3$ a $a=16, b=2$.

Úloha 6.

Ak $n=2k+1$ je ľubovoľné nepárne celé číslo väčšie ako 1, potom každá reprezentácia čísla n v danom tvare má aspoň jednu „1“ (2^0) ako jeden zo sčítancov. Jej vynechaním dostaneme vyjadrenie čísla $2k$. Naopak jej pridaním dostaneme z každej reprezentácie čísla $2k$ reprezentáciu čísla $2k+1$, teda zrejme pre každé prirodzené k platí

$$f(2k+1)=f(2k). \tag{1}$$

Ďalej, ak $n=2k$ je ľubovoľné prirodzené číslo, tak každé vyjadrenie čísla n v zadanom tvare je jedného z nasledujúcich typov: buď obsahuje aspoň jednu „1“ v svojom zápise, alebo nie. V prvom prípade zmazaním jednej z nich dostaneme vyjadrenie čísla $2k-1$, a teda počet týchto vyjadrení je práve $f(2k-1)$. V druhom prípade (žiaden sčítanec nie je rovný „1“) môžeme všetky sčítance predeliť dvomi a dostaneme tak každé vyjadrenie čísla k zadaným spôsobom. Týchto vyjadrení je preto práve $f(k)$. Tieto úvahy vedú k rekurentnému vzorcu

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k). \tag{2}$$

Oba tieto vzorce platia pre všetky prirodzené k. Keďže môžeme dodefinovať $f(0)=1$ a $f(1)=1$, vzorce (1) a (2) jednoznačne určujú hodnoty funkcie f. Navyše je z ich tvaru vidieť, že funkcia f je neklesajúca. Spojením (1) a (2) dostávame

$$f(2k)-f(2k-2)=f(k) \qquad \text{pre } k=1,2,3,\dots.$$

Sčítaním týchto rovníc pre $k=1,2,\dots,n$ dostávame

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\ldots+f(n) \qquad \text{pre } n=1,2,3,\dots. \tag{3}$$

Teraz najprv dokážeme horný odhad zo zadania. V (3) sú všetky sčítance menšie alebo rovné ako posledný z nich. Keďže $2 = f(2) \leqq f(n)$, pre $n \geqq 2$, dostávame pre každé $n \geqq 2$

$$\begin{aligned} f(2n) &= 2 + (f(2) + \ldots + f(n)) \leqq 2 + (n-1)f(n) \leqq \\ &\leqq f(n) + (n-1)f(n) = nf(n) \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} f(2^n) &\leqq 2^{n-1} f(2^{n-1}) \leqq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f(2^{n-2}) \leqq \\ &\leqq 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-3}) \leqq \\ &\leqq \ldots \leqq 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{n(n-1)/2} \cdot 2. \end{aligned}$$

Keďže však očividne $2^{n(n-1)/2} \cdot 2 < 2^{n^2/2}$ pre $n \geqq 3$, horný odhad je dokázaný.

Pri dôkaze dolného odhadu najprv dokážeme, že platí

$$f(b+1) - f(b) \geqq f(a+1) - f(a) \tag{4}$$

pre $a \geqq b \geqq 0$ prirodzené čísla rovnakej parity. Totiž, ak a aj b sú obe párne, potom z (1) vyplýva, že na oboch stranách (4) sú nuly. Ak a aj b sú obe nepárne, potom z (2) dostávame: $f(b+1) - f(b) = f(\frac{b+1}{2})$ a $f(a+1) - f(a) = f(\frac{a+1}{2})$ a potom nerovnosť (4) platí, lebo f je neklesajúca.

Uvažujme prirodzené čísla $r \geqq k \geqq 1$, r párne, a nahraďme v (4) čísla a a b výrazmi $a = r - j$ a $b = r + j$ pre $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Sčítaním takto získaných nerovností dostávame nerovnosť:

$$f(r+k) - f(r) \geqq f(r+1) - f(r-k+1).$$

Keďže r je párne, platí $f(r+1) = f(r)$, a teda

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geqq 2f(r) \qquad \text{pre } k = 1, \ldots, r.$$

Sčítaním týchto nerovností pre $k = 1, \ldots, r$ dostaneme

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geqq 2rf(r).$$

Z (3) vyplýva, že ľavá strana poslednej nerovnice je rovná $f(4r) - 1$, preto

$$f(4r) \geqq 2rf(r) + 1 > 2rf(r)$$

pre každé prirodzené číslo r, $r \geqq 2$. Ak položíme $r = 2^{m-2}$ máme

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}). \tag{5}$$

Aby $r = 2^{m-2}$ bolo párne, predpokladajme, že $m > 2$, avšak (5) zrejme platí aj pre $m = 2$.

Napokon nech $n \geqq 1$. Ak l je prirodzené číslo, pre ktoré platí $2l \leqq n$, potom použitím (5) pre $m = n, n-1, \ldots, n-2l+2$ dostaneme

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) > \\ &> \ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2l+1)} \cdot f(2^{n-2l}) = 2^{j(n-l)} \cdot f(2^{n-2l}). \end{aligned}$$

Teraz ak n je párne, voľme $l = \frac{n}{2}$; ak n je nepárne voľme $l = \frac{n-1}{2}$. Získane nerovnosti majú tvar:

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n^2/4} \cdot f(2^0) = 2^{n^2/4} && \text{pre } n \text{ párne,} \\ f(2^n) &> 2^{(n^2-1)/4} \cdot f(2^1) = 2^{(n^2-1)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4} && \text{pre } n \text{ nepárne.} \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali dolný odhad pre $n > 2$ (pre $n = 1$ triviálne platí).

Obsah

PRVÝ DIEL

RNDr. Karel Horák, CSc. – Richard Kollár
Jana Višňovská – Tomáš Vinař
Bronislava Brejová – Úlohová komisia MO

Štyridsiatyšiesty ročník matematickej olympiády na stredných školách
1. diel

Vydala IUVENTA v roku 1998
Sadzbu programom $\mathcal{AMS}$-TEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc. a Richard Kollár
Grafická úprava obálky Karel Horák a Richard Kollár
Neprešlo jazykovou úpravou
1.vydanie

ISBN 80–88893–18–6