51. ROČNÍK
MATEMATICKEJ
OLYMPIÁDY
NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2001/2002

43. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
14. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

S pomocou spolupracovníkov spracovali
RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný, Mgr. Peter Novotný, Mgr. Michal Forišek
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Tomáš Jurík, Mgr. Ján Špakula
a členovia Úlohovej komisie MO.

ISBN 80–8072–023–1

Obsah

O priebehu 51. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Vyhlasuje ju Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠ SR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2001/2002 sa uskutočnil už 51. ročník MO, pretože matematická olympiáda na Slovensku je pokračovateľom rovnakej súťaže z bývalého Československa. Tak ako po iné roky, aj tento ročník MO riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO). Jednotlivé kolá odborne a organizačne zabezpečovali okresné a krajské komisie MO (OK MO, KK MO).

Cieľom súťaže je vyhľadávanie žiakov talentovaných v matematike, prebúdzanie a podpora ich záujmu o ňu, rozvíjanie ich matematických schopností a ich usmerňovanie a vedenie k samostatnej tvorivej činnosti. Pestovanie matematiky je však ťažká drina, takže vzhľadom na stále sa rozširujúcu ponuku iných atraktívnych súťaží a možností sebarealizácie bude asi čoraz ťažšie v budúcnosti udržať masovosť MO. Vyvrcholením súťaže je príprava na reprezentáciu Slovenskej republiky a účasť na medzinárodných súťažiach, najmä na Medzinárodnej matematickej olympiáde (IMO) a Medzinárodnej informatickej olympiáde (IOI).

Aj v tomto ročníku boli úlohy vo všetkých kolách MO v Českej republike a na Slovensku rovnaké. MO prebehla vo všetkých krajoch a okresoch SR. Personálne obsadenie SK MO bolo v 51. ročníku súťaže nasledovné.

Predsedníctvo SK MO tvorili:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., FPEDaS ŽU Žilina, predseda SK MO,
RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra, podpredseda SK MO,
doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc., PF UPJŠ Košice,
RNDr. Andrej Blaho, FMFI UK Bratislava,
RNDr. Monika Dillingerová, FMFI UK Bratislava,
Michal Forišek, FMFI UK Bratislava,
Juraj Földes, FMFI UK Bratislava,
doc. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava,
Ivan Lukáč, IUVENTA Bratislava,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., FPV ŽU Žilina,
doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., Slovenská štátna inšpekcia.

Členmi Predsedníctva SK MO boli z titulu svojej funkcie aj predsedovia KK MO:
RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová Bratislava,
RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra,
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., TU Trenčín,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., FPEDaS ŽU Žilina,

RNDr. Eva Oravcová, Gymnázium Jozefa Gregora Tajovského Banská Bystrica,
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice,
Mgr. Milan Demko, PedF PU Prešov.

V priebehu 51. ročníka MO sa uskutočnili tri zasadnutia SK MO. Zamerali sa na obsahové a organizačné zabezpečenie MO, finančné pokrytie súťaže, ďalšie aktivity (korešpondenčné semináre, sústredenia a pod.), ako aj na pokračovanie partnerskej spolupráce s českou Ústřední komisí MO pri príprave súťažných úloh a termínovom zabezpečení prebiehajúceho i ďalšieho ročníka MO. Hostiteľom májového zasadnutia úlohových komisií bola v tomto ročníku Žilina, novembrové zasadnutie prebehlo v Kostelci nad Černými lesy. Úlohy MO sú prevažne pôvodné; za zadaním každej súťažnej úlohy v ďalšom texte v zátvorke uvádzame meno autora (resp. navrhovateľa) úlohy.

Organizácia súťaže zostala v 51. ročníku MO zachovaná. Pre žiakov základných škôl bola rozdelená do šiestich kategórií Z4 – Z9 určených žiakom 4. až 9. ročníka ZŠ a odpovedajúcich ročníkov osemročných gymnázií. Pre žiakov stredných škôl a im zodpovedajúcich ročníkov viacročných gymnázií bola súťaž organizovaná v štyroch kategóriách C, B, A a P. Kategória C bola určená pre študentov prvých ročníkov, kategória B pre študentov druhých ročníkov a kategória A pre študentov tretích a štvrtých ročníkov stredných škôl. Kategória P, zameraná na úlohy z programovania a matematickej informatiky, bola určená žiakom všetkých ročníkov stredných škôl. Talentovaní žiaci mohli po súhlase svojho učiteľa matematiky súťažiť aj vo vyššej vekovej kategórii. Týkalo sa to aj žiakov ZŠ, ktorí tiež mohli súťažiť v niektorej z kategórií A, B, C a P.

Súťaž v každej z kategórií pozostáva z niekoľkých postupových kôl, pričom v kategórii Z4 je najvyšším kolom školské kolo, v kategóriách Z5 – Z8 je to okresné kolo, v kategóriách Z9, C a B sa súťaž končí krajským kolom a v kategóriách A i P olympiáda vyvrcholila celoštátnym kolom.

Celoštátne kolo 51. ročníka MO sa uskutočnilo v kategórii A v dňoch 7. – 10. apríla 2002 a v kategórii P v dňoch 10. – 13. apríla 2002 v Trnave.

Celoštátneho kola (CK MO) sa zúčastnilo 37 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii A a 26 najlepších riešiteľov krajských kôl v kategórii P, pričom sa postupovalo podľa poradia zostaveného po koordinácii bodových hodnotení z jednotlivých krajov. V tomto kole je súťaž rozdelená do dvoch dní. V kategórii A riešia súťažiaci každý deň tri úlohy v časovom limite 4 hodiny, v kategórii P v rovnakom limite prvý deň tri teoretické úlohy a druhý deň dve praktické úlohy na počítači.

K úspešnému priebehu CK MO nemalou mierou prispeli RNDr. M. Lucká, CSc. a I. Lukáč; aj touto cestou im ďakujem. Poďakovanie SK MO patrí aj hlavnému sponzorovi MO v tomto ročníku, ktorým bol EuroTel Bratislava, a. s. Podiel na sponzorovaní CK MO mali aj CK KARTÁGO TOURS, s. r. o., Bratislava, Pedagogická fakulta TU, Trnava, SLOVDEKRA, s. r. o., Bratislava, TATRACHEMA, výrobné družstvo Trnava, Rektor Trnavskej univerzity a Primátor mesta Trnava.

Deväť najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A prijalo pozvanie na výberové sústredenie v dňoch 21. – 27. 4. 2002 na FMFI UK v Bratislave. Na základe výsledkov tohto sústredenia, výsledkov predchádzajúcich kôl MO a s prihliadnutím na úspešnosť v korešpondenčnom seminári SK MO bolo na konci sústredenia vybrané šesťčlenné družstvo na reprezentáciu SR na IMO v Glasgowe v dňoch 19. – 30. júla 2002. Tento výber absolvoval ešte jedno (prípravné) sústredenie v dňoch 9. – 15. 6. 2002 v Žiline a zároveň nás reprezentoval na medzinárodnom trojstretnutí s Českou republikou a Poľskom, ktoré sa konalo vo Zwardoni v dňoch 16. – 19. 6. 2002. Aj keď trojstretnutiu a výsledkom medzinárodných súťaží IMO, IOI a CEOI sú v tejto ročenke venované samostatné kapitoly, už tu poznamenajme niekoľko faktov. Všetci 14 členovia všetkých troch našich reprezentačných družstiev získali medailu (2 zlaté, 7 strieborných, 5 bronzových). Katarína Quittnerová získala na IMO v Glasgowe striebornú medailu a má tak 4 medaile z IMO. Krásnu zbierku medailí má aj Radovan Bauer (striebornú z IMO a dve bronzové z IOI a CEOI). Mimoriadny výkon podal v tomto roku Peter Bella (bronz z IMO a dve zlaté z IOI a CEOI).

Výberové sústredenie pre najlepších riešiteľov v kategórii P sa uskutočnilo na FMFI UK v Bratislave. V rámci náročného sústredenia, ktoré približovalo podmienky medzinárodnej súťaže, účastníci každý deň dopoludnia tvorili programy, ktoré večer v ten istý deň aj spoločne vyhodnocovali. Na základe dosiahnutých výsledkov schválila SK MO zloženie štvorčlenného družstva, ktoré v dňoch 18. – 25. 8. 2002 reprezentovalo SR na IOI v Yong-In neďaleko Soulu. Toto družstvo pred IOI absolvovalo ešte jedno súťažné sústredenie, na ktorom sa zúčastnili aj olympionici z Českej republiky a Poľska. Rovnako bolo na základe výsledkov výberového sústredenia schválené štvorčlenné reprezentačné družstvo, ktoré sa v dňoch 30. 6. – 6. 7. 2002 zúčastnilo na Stredoeurópskej informatickej olympiáde (CEOI) v Košiciach. Obom súťažiam sú venované samostatné kapitoly. Pobyt na IMO aj IOI bol financovaný usporiadajúcou krajinou.

Súčasťou celoročnej prípravy na MO sú aj rôzne korešpondenčné semináre (KS) a sústredenia na okresnej a krajskej úrovni. Aj v tomto ročníku prebiehalo niekoľko KS s celoslovenskou pôsobnosťou:

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár (BKMS),
Stredoslovenský korešpodenčný matematický seminár (SKMS),
Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku (STROM),
Korešpodenčný seminár z programovania (KSP).

Stručnú informáciu o týchto aktivitách spolu s kontaktnými adresami možno nájsť v samostatnej kapitole.

Za mimoriadny úspech možno považovať, že SK MO sa podarilo v rekordne krátkom čase dosiahnuť, aby MŠ SR schválilo usporiadanie CEOI v Košiciach, a to aj navzdory stanovisku Koordinačnej rady súťaží, ktoré bolo skôr odmietavé. Považujem za potrebné vyjadriť poďakovanie všetkým organizátorom CEOI.

Všetkým čitateľom Ročenky prajem, aby im priniesla úžitok. Starších čitateľov prosím o čo najaktívnejšiu spoluprácu v budúcnosti a tým mladším prajem veľa krásnych chvíľ pri úspešnom riešení príkladov ďalších ročníkov MO.

Vojtech Bálint

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Katarína QUITTNEROVÁ	4	G Bilíkova Bratislava	7	7	7	7	7	7	42
2.	Andrej OSUSKÝ	4	G Jura Hronca Bratislava	7	7	7	4	5	7	37
3.	Peter BELLA	4	G Jura Hronca Bratislava	7	5	2	7	7	7	35
4.	Michal BURGER	2	G Grösslingová, Bratislava	7	4	6	6	1	4	28
5.	Radovan BAUER	4	G Poštová, Košice	6	6	2	7	4	1	26
6.	Péter KOLTAI	3	G H. Selyeho Komárno	6	5	7	4	1	2	25
	Marek TESAŘ	4	G B.S.Timravy Lučenec	7	2	2	6	1	7	25

Ďalší úspešní riešitelia

8.	Ján MAZÁK	4	G Poštová, Košice	7	4	2	5	0	3	21
9.	Eva SKOPALOVÁ	4	G Popradské nábr., Poprad	6	3	1	7	0	1	18
10.	Zoltán DOMONKOS		G A. Vámbéryho Dun. Streda	7	1	2	6	0	1	17
	Tomáš VÁŇA	2	G M.R.Štefánika, Žiar n/H.	6	1	2	6	0	2	17
12.	Jakub DAUBNER	4	G Veľká Okružná, Žilina	6	3	1	4	0	2	16
	Peter KOMORNÍK	4	G Grösslingová, Bratislava	6	1	2	4	2	1	16
	Jozef TVAROŽEK	4	G Jura Hronca Bratislava	7	1	2	5	0	1	16
	Jakub ZÁVODNÝ	2	G Grösslingová, Bratislava	5	1	3	6	0	1	16

Ostatní riešitelia

16.	Michal ADAMEC	3	G Jura Hronca Bratislava	7	1	2	4	1	0	15
	Stanislav KOVALČIN	4	G Alejová, Košice	6	2	2	3	0	2	15
	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	2	G Konštantínova, Prešov	7	0	3	4	0	1	15
	Martin MOLNÁR	2	G Mierová, Levice	6	3	0	6	0	0	15
	Peter RAKYTA	2	G H. Selyeho Komárno	5	3	1	4	0	2	15
21.	Branislav BOŠANSKÝ	4	G J.G.Tajovského B. Bystrica	6	1	1	4	0	2	14
	Ján KLACSO	4	G Mládežnícka, Šahy	3	2	2	5	1	1	14
	Michal MALÝ	4	G M.R.Štefánika, Žiar n/H.	6	1	0	0	0	7	14
	Ján SMOLEŇ	4	G Grösslingová, Bratislava	4	0	2	7	0	1	14
25.	Matej BLAŽEK	3	G Grösslingová, Bratislava	7	0	0	5	0	1	13
	Juliana LIPKOVÁ	3	G Jura Hronca Bratislava	7	1	1	3	0	1	13
	Michal MIKUŠ	4	G Jura Hronca Bratislava	6	2	2	2	1	0	13
28.	Margaréta HIEKEOVÁ	4	G Poštová, Košice	7	0	0	4	0	1	12
	Zuzana KVAŠŇÁKOVÁ	4	G Konštantínova, Prešov	6	0	0	5	0	1	12

	Michal ŽILKA	4 G J.G.Tajovského B. Bystrica	1	0	0	6	4	1	12
31.	Michal RJAŠKO	3 G Dr. Daxnera, Vranov n/T.	7	0	2	0	0	1	10
32.	Martin ŠKORUPA	2 G M.M.Hodžu Lipt. Mikuláš	5	3	1	0	0	0	9
33.	Michael ERDÉLYI	4 G Kremnická, Bratislava	0	2	0	4	0	2	8
	Michal PECÚCH	G Ľ. Štúra Trenčín	6	1	0	0	0	1	8
35.	Peter DZURJANIN	4 G Grösslingová, Bratislava	0	1	2	3	0	1	7
	Štefan ŠURINA	4 G Jura Hronca Bratislava	2	0	2	2	0	1	7
37.	Mária ŠOLTÉSOVÁ	2 G Grösslingová, Bratislava	1	0	1	2	0	0	4

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	31	14	2	3	5	2	5
6 bodov	22	13	1	1	7	0	0
5 bodov	11	3	2	0	5	1	0
4 body	16	1	2	0	10	2	1
3 body	12	1	5	2	3	0	1
2 body	33	1	5	16	3	1	7
1 bod	44	2	11	7	0	6	18
0 bodov	53	2	9	8	4	25	5
Priemer	2,77	5,46	2,00	1,95	4,24	0,95	2,00

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

Víťazi

1.	Peter BELLA	4 G Jura Hronca Bratislava	9	10	8	9	8	44
2.	Radovan BAUER	4 G Poštová, Košice	10	9	3	9	9	40
3.	Jozef TVAROŽEK	4 G Jura Hronca Bratislava	9	7	7	4	10	37
4.	Tomáš DZETKULIČ	4 G P. Horova Michalovce	8	7	9	3	7	34
	Tomáš VRÁBEL	4 G Malá Hora Martin	7	5	10	6	6	34
6.	Pavol MRAVEC	4 G K. Štúra Modra	10	10	1	7	5	33
	Vladimír REPISKÝ	4 G Žiar nad Hronom	9	8	5	4	7	33

Ďalší úspešní riešitelia

8.	Pavol JUHOS	4 G Grösslingová, Bratislava	5	7	7	4	9	32
9.	Ján KATRENIČ	4 G Školská Spiš. Nová Ves	3	9	6	7	5	30
10.	Michal MALÝ	4 G Žiar nad Hronom	8	6	9	2	4	29
11.	Marek TESAŘ	4 G Haličská, Lučenec	9	10	0	–	9	28
12.	Kamil PAULÍNY	4 G Poštová, Košice	8	7	3	5	2	25
13.	Martin SVETLÍK	4 G Grösslingová, Bratislava	3	4	3	6	6	22

Ostatní riešitelia

14.	Milan ŠATKA	3 G Liptovský Hrádok	8	7	0	2	3	20
15.	Lucia TIEREROVÁ	4 G Jura Hronca Bratislava	8	5	3	3	0	19
16.	Miroslav BALÁŽ	2 G Jura Hronca Bratislava	2	3	2	4	6	17
	Ján MAZÁK	4 G Poštová, Košice	2	4	5	3	3	17
18.	Lukáš HRÍBIK	2 G A. Merici Trnava	2	2	5	0	7	16
	Jakub TEKEĽ	2 G Jura Hronca Bratislava	2	4	4	0	6	16
20.	Peter DZURJANIN	4 G Grösslingová, Bratislava	1	4	3	0	6	14
21.	Roman RODÁK	3 G A. Merici Trnava	1	1	5	0	5	12
22.	Pavol MÜLLER	4 G Grösslingová, Bratislava	1	6	3	–	–	10
	Michal RJAŠKO	3 G Daxnera Vranov n/Topľou	1	2	1	6	–	10
24.	Marián REVAY	4 G Čadca	1	2	0	–	6	9
25.	Jozef JIRÁSEK	3 G Zbrojničná, Košice	3	4	1	0	0	8
26.	Martin CHOMA	3 G Stará Ľubovňa	5	–	1	–	–	6

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. V kategóriách B, C, Z9, ak nie je uvedené inak, sú všetci žiaci študentmi 2., resp. 1., resp. 9. ročníka. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01 sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J.G.Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	Peter BELLA	4	Gymnázium Jura Hronca
2.	Katarína QUITTNEROVÁ	4	Gymnázium Bilíkova
3.	Michal BURGER	2	Gymnázium Grösslingová
	Michal MIKUŠ	4	Gymnázium Jura Hronca
5.	Andrej OSUSKÝ	4	Gymnázium Jura Hronca
6.	Ján SMOLEŇ	4	Gymnázium Grösslingová
7.	Michael ERDÉLYI	4	Gymnázium Kremnická
	Jakub ZÁVODNÝ	2	Gymnázium Grösslingová
9.	Peter KOMORNÍK	4	Gymnázium Grösslingová
10.	Peter DZURJANIN	4	Gymnázium Grösslingová
	Štefan ŠURINA	4	Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Michal BURGER	Gymnázium Grösslingová
	Jakub ZÁVODNÝ	Gymnázium Grösslingová
3.	Jakub KOVÁČ	Gymnázium Jura Hronca
	Peter TAR	Gymnázium Grösslingová
5.	Veronika BREZOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Martin TÓTH	Gymnázium Grösslingová
7.	Michal ČERMÁK	Gymnázium Jura Hronca

	František KOCUN	Gymnázium Školských bratov

Kategória C

1.	Andrej BORSUK	Gymnázium Grösslingová – kvarta
	František SIMANČÍK	Gymnázium Grösslingová
	Stanislava SOJÁKOVÁ	Gymnázium Jura Hronca
	Lucia STOHLOVÁ	Gymnázium Grösslingová
5.	Milan BRATKO	Gymnázium Pankúchova
	Martina BREZOVÁ	Gymnázium Grösslingová
7.	Viktor KUBINEC	Gymnázium Grösslingová
	Jakub TRIZULJAK	Gymnázium Palackého
9.	Peter KEPPERT	Gymnázium Grösslingová
	Ria RUPPELDTOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Ivana ŠVIHRANOVÁ	Obchodná akadémia Hrobákova
	Matej VITÁSEK	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.	Andrej BORSUK	Gymnázium Grösslingová
	Róbert LUKÁŠ	ZŠ Kalinčiakova
	Daniel MESÁROŠ	ZŠ Bieloruská
4.	Michal KOŽUCH	ZŠ Holíčska
	Ladislav MARŠÍK	Gymnázium Grösslingová
6.	Soňa OTHMANOVÁ	ZŠ Dubová
7.	Jakub IMRIŠKA	ZŠ Tbiliská
	Matúš KUBÍK	ZŠ Dubová
9.	Maroš KALINA	ZŠ Dubová
	Štefan ŠAFÁR	ZŠ Batkova
	Róbert ŠVAJDLENKA	ZŠ Záhorácka, Malacky

Kategória P

1.	Peter BELLA	Gymnázium Jura Hronca
2.	Pavol MRAVEC	Gymnázium K. Štúra Modra
3.	Jakub TEKEĽ	Gymnázium Jura Hronca
	Jozef TVAROŽEK	Gymnázium Jura Hronca
5.	Pavol JUHOS	Gymnázium Grösslingová
6.	Peter DZURJANIN	Gymnázium Grösslingová
	Lucia TIEREROVÁ	Gymnázium Jura Hronca
8.	Pavol MÜLLER	Gymnázium Grösslingová
9.	Miroslav BALÁŽ	Gymnázium Jura Hronca
	Martin SVETLÍK	Gymnázium Grösslingová

Kraj Nitra

Kategória A

1. Péter KOLTAI	3 Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
2. Martin MOLNÁR	2 Gymnázium Levice
3. Peter RAKYTA	2 Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
4. Ján KLACSO	4 Gymnázium maď., Šahy

Kategória B

1. Peter KAKYTA	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
2. Martin MOLNÁR	Gymnázium Levice
3. Daniel PRINCZKEL	Gymnázium maď., Želiezovce
4. Lásló FEKETE	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
5. Szilvia BAGÓCSIOVÁ	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
6. Štefan FÜZESI	Gymnázium maď., Šahy
Marek JANČUŠKA	Gymnázium Párovská, Nitra
Róbert PATHÓ	Gymnázium Štúrovo

Kategória C

1. András MORAUSZKI	Gymnázium maď., Želiezovce
2. Jozef CHOVAN	Gymnázium Štúrovo
Erik NAGY	Gymnázium Šaľa
Péter ZAJÍČEK	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
5. Gábor SZCS	ZŠ maď., Ul. práce, Komárno
6. Szabolcs CSÉFALVAY	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
7. Péter MÁTYÁS	Gymnázium H. Selyeho maď., Komárno
Martin TAKÁČ	Gymnázium Nové Zámky
9. Jaroslava BÓNOVÁ	Gymnázium Zlaté Moravce
Krisztián KACZ	ZŠ maď., Školská, Kolárovo

Kategória Z9

1. Miroslav HOTÁK	Gymnázium Levice
2. Krisztián KACZ	ZŠ maď., Školská, Kolárovo
3. Juraj PETROVIČ	ZŠ Čajkov
4. Roman BETÍK	ZŠ Jesenského, Levice

5. Tibor TÓTH	ZŠ Bátorove Kosihy
6. Ondrej PETRÍK	ZŠ Radošiná
7. Ildikó DUBOVÁ	ZŠ maď., Želiezovce
Jana ŠTOLCOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
9. Peter PILINSKÝ	ZŠ Pri Podlužianke, Levice
Gábor SZCS	ZŠ maď., Ul. práce, Komárno

Kategória P

1. Peter TRUCHLÝ	Gymázium Párovská Nitra
2. Tomáš SÁGHY	SPŠE Nové Zámky
3. Peter KÁLNAI	Gymnázium Mierová Levice
4. Ľubomír VARGA	SPŠ F. Kráľa Nitra
5. László MARÁK	Gymnázium H. Selyeho Komárno
Peter ŠVOLIK	SPŠ Levice

Kraj Trnava

Kategória A

1. Zoltán DOMONKOS	Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
2. Ágnes PÉKOVÁ	Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta

Kategória B

1. Samuel PERES	Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
2. Robert BIRKUS	Gymnázium Štvrť SNP, maď., Galanta

Kategória C

1. Eva ROZBORILOVÁ	Gymnázium Nám. Slobody, Skalica
2. Marta LUNGOVÁ	Gymnázium Nám. Slobody, Skalica
3. Juraj MACH	Gymnázium Dlhá, Senica
Róbert SASÁK	SPŠ elektrotechnická, Nám. SNP, Piešťany
5. Tomáš BARTEK	Gymnázium Kostolná, Sereď
Jozef BEBIAK	Gymnázium Nám. sv. Štefana, Dunajská Streda
Fridrich LOSONSZKY	Gymnázium Bratislavská, maď., Veľký Meder
Daniela MARTINKOVIČOVÁ	Gymnázium A. Merici Trnava
Alexander MELICHER	Gymnázium Námestie SNP, Piešťany
Marianna NEDOROSTOVÁ	Gymnázium Námestie SNP, Piešťany

Kategória Z9

1.	Juraj SEKEREŠ	ZŠ Vančurova, Trnava
2.	Petra BRESTOVANSKÁ	ZŠ Nám. SUT, Trnava
	Silvia HRČKOVÁ	VII. ZŠ Piešťany
4.	Michal DANIŠKA	Gymnázium Hlohovec
5.	Jaroslav KOVÁČ	Gymnázium Senica
	Tatiana SLÁDKOVIČOVÁ	ZŠ P.O. Hviezdoslava Sereď
7.	Zoltán JALSOVSZKY	Gymnázium maď., Galanta
	Tamás NAGY	ZŠ maď., Gabčíkovo
9.	Martin GAŠPAROVIČ	ZŠ A. Kubinu, Trnava
10.	László BÁNDY	ZŠ maď., Šamorín
	Martin MOJŽIŠ	V. ZŠ Piešťany

Kategória P

1.	Lukáš HRÍBIK	Gymnázium A. Merici Trnava
2.	Roman RODÁK	Gymnázium A. Merici Trnava

Kraj Trenčín

Kategória A

1.	Michal PECÚCH	Gymnázium L. Štúra Trenčín

Kategória B

1.	Igor TRÚCHLIK	Gymnázium Považská Bystrica
	Juraj PRIEVALSKÝ	Gymázium V.B.Nedožerského Prievidza
3.	Peter AUGUSTÍN	Gymnázium M.R.Štefánika Nové Mesto n/V.
	Peter SIVÝ	SPŠ Dubnica n/Váhom

Kategória C

1.	Peter ČERNO	Gymnázium L. Štúra Trenčín
2.	Jozef GÁBIK	Gymnázium PGJB Trenčín
3.	Milan KOVÁČ	Gymnázium Považská Bystrica
	Jakub LACHKÝ	Gymnázium Dubnica n/Váhom
	Ľubomír MALO	Gymnázium Púchov
6.	Martin ADAMČÍK	Gymnázium Považská Bystrica

	Martin LOŠONCI	Gymázium V.B.Nedožerského Prievidza
	Marián PRISTACH	ZSPŠ Nové Mesto n/Váhom
9.	Michaela HÁJKOVÁ	Gymnázium M.R.Štefánika Nové Mesto n/V.
	Michal JURDÍK	Gymnázium Považská Bystrica

Kategória Z9

1.	Jana VRÁBELOVOVÁ	ZŠ Novomeského, Trenčín
2.	Karol KOVÁČ	ZŠ Mládežnícka, Púchov
	Peter ZÁMEČNÍK	ZŠ Štúrova, Nové Mesto n/Váhom
4.	Vladimír SIVÁK	ZŠ Trenč. Turná
	Michal SIVÁK	ZŠ Trenč. Turná
	Alena KRÁLIKOVÁ	ZŠ Melčice Lieskové
7.	Hana VÁCLAVOVÁ	ZŠ Hodžova, Trenčín
	Anton ŠIDLO	ZŠ Energetikov, Prievidza
9.	Ľubomír NOVÁK	ZŠ kpt. Nálepku, Nové Mesto n/Váhom
	Milan GRAJCARÍK	ZŠ Medňanská, Ilava
	Mária BERNÁTOVÁ	ZŠ Partizánska, Bánovce
	Martin BÁTORA	ZŠ Duklianska, Bánovce

Kategória P

1.	Juraj BLAHO	Gymázium Školská, Považská Bystrica
2.	Peter GRAMANTÍK	Gymázium V.B.Nedožerského Prievidza
3.	Martin ŽEMBER	Gymázium V.B.Nedožerského Prievidza

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Martin ŠKORUPA	2 Gymnázium Liptovský Mikuláš
2.	Jakub DAUBNER	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Peter HLINKA	5 Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin
	Miroslav HUDEC	4 Gymnázium Velká okružná, Žilina
5.	Miroslav MAKÝŠ	5 Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin
	Mirko ZIBOLEN	5 Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin

Kategória B

1.	Daniela JANÁČOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

2.	Bianka KOVÁČOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
3.	Pavel LACKO	Gymnázium Liptovský Mikuláš
	Vlasta POLIAČKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
5.	Martin LAUKO	Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin
	Miroslav MAHDOŇ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
7.	Martina BLAHUTOVÁ	Gymnázium Liptovský Mikuláš

Kategória C

1.	Jaroslav KNEBL	Gymnázium Námestovo – kvarta
2.	Peter ŠEPITKA	Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin
3.	Daniel BOŽÍK	Gymnázium Liptovský Mikuláš
	Ondrej KOREC	Gymnázium J. Lettricha Martin
	Pavel KROPITZ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Andrea TINAJOVÁ	Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin
7.	Lukáš HARAKAĽ	Gymnázium Liptovský Mikuláš
8.	Monika HANZELOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Lukáš HUBČÍK	Gymnázium J. Lettricha Martin
	Miroslav JAGOŠ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Martin LADECKÝ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Peter MACKO	Gymnázium Liptovský Hrádok
	Eva PEŠKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Lenka VESELOVSKÁ	Gymnázium Liptovský Mikuláš
2.	Miroslav KELEMEN	ZŠ Moskovská, Žilina
	David VARGA	Gymnázium Varšavská, Žilina
4.	Zuzana HROUDNÁ	ZŠ Clementisova, Kysucké Nové Mesto
	Oto MACKA	ZŠ Gaštanová, Žilina
	Matúš MAJCHRÁK	ZŠ Zakamenné
	Ondrej PONIŠTIAK	ZŠ Komenského, Čadca
8.	Natália KÁŇOVÁ	Gymnázium V. Paulinyho–Tótha Martin
9.	Alena BACHRATÁ	ZŠ Zaymusova, Žilina
	Jozef JÁNOŠÍK	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Martin TUKA	ZŠ J. Kráľa, Liptovský Mikuláš

Kategória P

1.	Milan ŠATKA	Gymázium Liptovský Hrádok
	Tomáš VRÁBEL	Gymázium Malá Hora Martin
3.	Marián REVAY	Gymázium Čadca

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Marek TESAŘ	4	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
2.	Michal MALÝ	4	Gymnázium M.R.Štefánika Žiar nad Hronom
3.	Michal ŽILKA	4	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
4.	Tomáš VÁŇA	2	Gymnázium M.R.Štefánika Žiar nad Hronom
	Branislav BOŠANSKÝ	4	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica

Kategória B

1.	Tomáš VÁŇA	Gymnázium M.R.Štefánika Žiar nad Hronom
2.	Hana BUDÁČOVÁ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
3.	Tomáš OSIČKA	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Ivan ŠTUBŇA	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Tomáš BABIAK	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Karol KUBANDA	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica

Kategória C

1.	Jozef BODNÁR	Gymnázium Fiľakovo
2.	Vladimír KOVÁČ	Gymnázium ĽŠ Zvolen
	Soňa KYSELOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Adam ŠTEFÁNIK	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
5.	Veronika SLUKOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Jana ŠIŠLÁKOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
7.	Silvia BALÁŽOVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Miroslav CICKO	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Martin KOVÁČ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Michal LUBČO	Gymnázium MH Hnúšťa
	Martina MIŠÁNIKOVÁ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
	Ján MIŠKOV	Gymnázium AS Krupina
	Miroslav PETROVIČ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Vladimíra SEČKÁROVÁ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Mária SUDOLSKÁ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica
	Ľubomír SYČ	Gymnázium J.G.Tajovského Banská Bystrica

Kategória Z9

1.	Zuzana PÔBIŠOVÁ	ZŠ Pionierska, Brezno
	Peter PEREŠÍNI	ZŠ Radvanská, Banská Bystrica
	Michal TAKÁCS	ZŠ Spojová, Banská Bystrica
	Ondrej BUDÁČ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
	Ján MIKULÁŠ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
6.	Martin PAĽKO	ZŠ Kriváň
	Maroš RAUČINA	ZŠ Spojová, Banská Bystrica
8.	Peter JOMBÍK	ZŠ Radvanská, Banská Bystrica
	Tomás MOLNÁR	ZŠ Gemerský Jablonec
10.	Martin SLEZÁK	ZŠ Škultétyho, Tornaľa
	Ivana KVIETKOVÁ	ZŠ Pionierska, Brezno
	Miroslav BARTOŠ	ZŠ Budča
	Peter SLUKA	IX. ZŠ, Zvolen
	Ľubica LAŠŠÁKOVÁ	ZŠ Ľ. Štúra, Veľký Krtíš
	Andrea VOUNGOVÁ	ZŠ F. Kráľa, Žarnovica
	Peter DUBOVSKÝ	ZŠ R. Kráľa, Žarnovica

Kategória P

1.	Marek TESAŘ	Gymnázium B.S.Timravy Lučenec
2.	Michal MALÝ	Gymnázium M.R.Štefánika Žiar nad Hronom
	Vladimír REPISKÝ	Gymnázium M.R.Štefánika Žiar nad Hronom

Kraj Košice

Kategória A

1.	Radoslav BAUER	4 Gymnázium Poštová, Košice
2.	Stanislav KOVALČIN	4 Gymnázium Alejová, Košice
	Ján MAZÁK	4 Gymnázium Poštová, Košice
4.	Tomáš DZETKULIČ	4 Gymnázium Pavla Horova Michalovce

Kategória B

1.	Ivana KOMÁREKOVÁ	Gymnázium Michalovce
2.	Ján BORSÍK	Gymnázium Poštová, Košice
	Karol VEGSO	Gymnázium Poštová, Košice
	Štefan SABOL	Gymnázium Michalovce
5.	Ladislav MIKEŠ	Gymnázium Alejová, Košice

	Marek NOVÁK	Gymnázium Poštová, Košice
	Darina POLOVKOVÁ	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves

Kategória C

1.	Marek REGEC	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Michal DZETKULIČ	Gymnázium Michalovce
	Lenka KOVALČINOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Štefan GURSKÝ	Gymnázium Alejová, Košice
	Bohuslav MACEK	Gymnázium Alejová, Košice
	Katarína MIŽÁKOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
	Michal REPISKÝ	Gymnázium Poštová, Košice
8.	Jozef FETTERIK	Gymnázium Poštová, Košice
	Tatiana GONDEKOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter KOBAN	Gymnázium Alejová, Košice – kvarta
	Silvia RÁKOCIOVÁ	Gymnázium Poštová, Košice

Kategória Z9

1.	Lenka ANDRLOVÁ	VII. ZŠ, Michalovce
	Michal BODNÁR	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Tomáš DZURŇÁK	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Zuzana FEDORKOVÁ	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
	Pavol HLAVÁČ	Strážske
	František LUKÁČ	ZŠ Krosnianska, Košice
7.	Slávka JADLOVSKÁ	Gymnázium J.A.Komenského Košice
	Miloš ŠIMURDA	III. ZŠ Michalovce
9.	Martin KRAVEC	VI. ZŠ Michalovce
10.	Peter JURČO	III. ZŠ Michalovce
	Monika KUKUVKOVÁ	ZŠ Charkovská, Košice
	Ondrej PAŠUTH	VI. ZŠ Michalovce

Kategória P

1.	Tomáš DZETKULIČ	Gymázium P. Horova Michalovce
2.	Radovan BAUER	Gymázium Poštová, Košice
	Ján MAZÁK	Gymázium Poštová, Košice
4.	Ján KATRENIČ	Gymázium Školská, Spišská Nová Ves
5.	Kamil PAULÍNY	Gymázium Poštová, Košice
6.	Jozef JIRÁSEK	Gymázium Zbrojničná, Košice

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Zuzana KVAŠNÁKOVÁ	4 Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.	Katarína KVAŠNÁKOVÁ	2 Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Michal RJAŠKO	3 Gymnázium Vranov nad Toplou
	Eva SKOPALOVÁ	4 Gymnázium Popradské nábrežie, Poprad

Kategória B

1.	Katarína KVAŠNÁKOVÁ	Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.	Vladimír ŽÁK	Gymnázium L. Stöckela Bardejov

Kategória C

1.	Anton REPKO	Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov
2.	Martin BEKESS	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Ivana PROKOPIČOVÁ	Gymnázium Stropkov
	Lenka WILDNEROVÁ	Gymnázium P.O.Hviezdoslava, Kežmarok
5.	Martin FEKÉSHÁZY	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
	Lukáš GAMRÁT	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
	Samuel GAŠPAR	Gymnázium P.O.Hviezdoslava, Kežmarok
	Zuzana GIČOVÁ	Gymnázium Snina
	Ľudovít MYDLA	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
	Miroslav ONTKOVIČ	SPŠ-e Plzenská, Prešov

Kategória Z9

1.	Ján SULIN	V. ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
	Matej JENEČEK	ZŠ Francisciho, Poprad
	Ľuboslava PIŠTEJOVÁ	Gymnázium J.A.R., Prešov
4.	Martin FEČ	IV. ZŠ Karpatská, Svidník
	Martina POLIVČÁKOVÁ	ZŠ Bernolákova, Vranov nad Topľou
6.	Radoslav KRIVÁK	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Natália SLÁVIKOVÁ	ZŠ Šmeralova, Prešov
	Matúš FEDÁK	ZŠ Cyrila a Metoda, Stará Ľubovňa
9.	Zuzana VARCHOLOVÁ	V. ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
	Lukáš RADVANSKÝ	V. ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
	Matúš MAJERNÍK	V. ZŠ Pod Vinbargom, Bardejov
	Dušan MAČUGA	ZŠ Šrobárova, Prešov

	Michal VACHNA	ZŠ Šmeralova, Prešov

Kategória P

1. Michal RJAŠKO — Gymázium Dr. Daxnera Vranov nad Topľou
2. Martin CHOMA — Gymázium Stará Ľubovňa

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Dokážte, že existuje jediná číslica c, pre ktorú možno nájsť jediné prirodzené číslo n končiace číslicou c a majúce vlastnosť, že číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla.

(M. Koblížková)

C – I – 2

V štvoruholníku $ABCD$ sa uhlopriečky pretínajú v bode P, uhlopriečka AC je rozdelená bodmi P, N a M na štyri zhodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a uhlopriečka BD je rozdelená bodmi L, K a P na štyri zhodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určte pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$.

(J. Zhouf)

C – I – 3

Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

(J. Zhouf)

C – I – 4

Jožko sa vracal z výletu. Najprv cestoval vlakom a potom pokračoval zo zastávky na bicykli. Celá cesta mu trvala presne 1 hodinu 30 minút a prešiel pri nej vzdialenosť 60 km. Vlak išiel priemernou rýchlosťou 50 km/h. Určte, ako dlho išiel Jožko na bicykli, keď jeho rýchlosť v km/h je vyjadrená prirodzeným číslom rovnako ako vzdialenosť meraná v km, ktorú prešiel na bicykli.

(E. Kováč)

C – I – 5

Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou BC danej dĺžky a, ak je daný stred P strany AB a bod Q ($Q \neq P$), ktorý je pätou výšky z vrcholu B.

(J. Švrček)

C – I – 6

Istý panovník pozval na oslavu svojich narodenín 28 rytierov. Každý z rytierov mal medzi ostatnými práve troch nepriateľov.

a) Ukážte, že panovník môže rytierov rozsadiť k dvom stolom tak, aby každý rytier sedel pri rovnakom stole najviac s jedným nepriateľom.

b) Ukážte, že v prípade ľubovoľného takéhoto rozsadenia sedí pri každom stole najviac 16 rytierov.

(Nepriateľstvo je vzájomný vzťah: Ak A je nepriateľom B, tak aj B je nepriateľom A.)

(J. Šimša)

C – S – 1

Do športového krúžku chodí 21 chlapcov. Na posledných dvoch schôdzkach nikto nechýbal, chlapci sa zakaždým rozdelili do troch družstiev po sedem hráčov. Dokážte, že niektorí traja chlapci boli na oboch schôdzkach spolu v jednom družstve.

(J. Šimša)

C – S – 2

V rovine je daný pravouhlý trojuholník ABC taký, že kružnica $k(A;|AC|)$ pretína preponu AB v jej strede S. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku BCS je zhodná s kružnicou k.

(J. Švrček)

C – S – 3

Určte všetky dvojice prvočísiel (p,q) také, že $p>q$ a číslo p^2-q^2 má najviac štyroch deliteľov.

(P. Calábek)

C – II – 1

Určte počet dvojíc (a,b) prirodzených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi.

(J. Zhouf)

C – II – 2

Nech kružnice zostrojené nad ramenami lichobežníka ako nad priemermi majú vonkajší dotyk. Dokážte, že dotykový bod týchto kružníc leží na osi uhla, ktorý obe ramená lichobežníka zvierajú.

(J. Švrček)

C – II – 3

Nájdite všetky celé čísla x, pre ktoré sú obe čísla $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ prvočísla.

(J. Šimša)

C – II – 4

V rovine sú dané body C, V, U také, že $|CV| = 3\,\mathrm{cm}$, $|VU| = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a $|CU| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$. Zostrojte ostrouhlý trojuholník ABC tak, aby bol V priesečník jeho výšok a bod U bol súmerne združený s bodom A podľa stredu kružnice opísanej trojuholníku ABC.

(P. Leischner)

Kategória B

B – I – 1

Do tabuľky 4×4 sú vpísané kladné reálne čísla tak, že súčin v každej pätici tvaru  je rovný 1. Zistite maximálny počet rôznych čísel zapísaných v tabuľke.

(P. Černek)

B – I – 2

Určte, koľko čísel môžeme vybrať z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 75\,599, 75\,600\}$ tak, aby medzi nimi bolo číslo $75\,600$ a aby pre ľubovoľné dve vybrané čísla a, b platilo, že a je deliteľom b alebo b je deliteľom a. (Uveďte všetky možnosti.)

(J. Földes)

B – I – 3

Nech k je polkružnica zostrojená nad priemerom AB, ktorá leží vo vnútri štvorca $ABCD$. Uvažujme jej dotyčnicu t_1 z bodu C (rôznu od BC) a označme P jej priesečník so stranou AD. Nech t_2 je spoločná vonkajšia dotyčnica polkružnice k a kružnice vpísanej trojuholníku CDP (rôzna od AD). Dokážte, že priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé.

(J. Švrček)

B – I – 4

Pokiaľ máme $n \geqq 2$ prirodzených čísel, môžeme s nimi spraviť nasledujúcu operáciu: Vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky a každé z vybraných čísel nahradíme ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú začiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké, ak n sa rovná

a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17.

(J. Földes)

B – I – 5

Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava

$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel.

(P. Černek)

B – I – 6

Je daný rovnostranný trojuholník MPQ. Nájdite množinu vrcholov C všetkých trojuholníkov ABC takých, že body P, Q sú päty výšok z vrcholov A, B a bod M je stred strany AB.

(J. Šimša)

B – S – 1

Určte reálne číslo p tak, aby rovnica

$$x^2 + 4px + 5p^2 + 6p - 16 = 0$$

mala dva rôzne korene x_1, x_2 a aby súčet $x_1^2 + x_2^2$ bol čo najmenší.

(J. Šimša)

B – S – 2

Vnútri strán BC, CA, AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC sú po rade vybrané body X, Y a Z tak, že každému zo štvoruholníkov $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ sa dá opísať kružnica. Dokážte, že body X, Y, Z sú päty výšok trojuholníka ABC.

(E. Kováč)

B – S – 3

Na tabuli sú napísané čísla $l, 2, ..., 17$. Čísla postupne zotierame, a to tak, že z doposiaľ nezotretých čísel zvolíme ľubovoľné číslo k a zotrieme všetky tie čísla na tabuli, ktoré delia číslo $k + 17$. Dokážte, že opakovaním tejto procedúry sa nám nepodarí zotrieť všetky čísla.

(J. Földes)

B – II – 1

Nájdite všetky prirodzené čísla n, ktoré sú menšie ako 100 a majú tú vlastnosť, že druhé mocniny čísel $7n + 5$ a $4n + 3$ sa končia rovnakým dvojčíslím.

(J. Šimša)

B – II – 2

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$(x^2+1)(y^2+1)+24xy=0$$
$$\frac{12x}{x^2+1}+\frac{12y}{y^2+1}+1=0.$$

(J. Šimša)

B – II – 3

Vo vnútri strán AB, BC, CD a DA konvexného štvoruholníka $ABCD$ sú postupne zvolené body K, L, M a N. Označme S priesečník priamok KM a LN. Ak je možné vpísať kružnice štvoruholníkom $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, potom je možné vpísať kružnicu aj štvoruholníku $ABCD$. Dokážte.

(J. Zhouf)

B – II – 4

Je daných n nezáporných čísel. Môžeme vybrať ľubovoľné dve z nich, napríklad a a b, $a \leqq b$, a zameniť ich číslami 0 a $b-a$. Dokážte, že opakovaním tejto operácie je možné všetky dané čísla zmeniť na nuly práve vtedy, keď pôvodné čísla je možné rozdeliť do dvoch skupín tak, že súčty čísel v oboch skupinách sú rovnaké.

(J. Földes)

Kategória A

A – I – 1

Ak je S obsah trojuholníka so stranami a, b, c a T je obsah trojuholníka so stranami $a+b$, $b+c$, $c+a$, potom platí $T \geqq 4S$. Dokážte a zistite, kedy nastane rovnosť.

(P. Kaňovský)

A – I – 2

V obore celých čísel x, y riešte rovnicu

$$(x_5)^2+(y^4)_5=2xy^2+51,$$

kde n_5 označuje násobok piatich najbližší k číslu n, napríklad $(-9)_5=-10$.

(P. Černek)

A – I – 3

V danom trojuholníku ABC pretína os uhla ACB stranu AB v bode K a opísanú kružnicu v bode L ($L \neq C$). Označme V stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC, S stred kružnice opísanej trojuholníku KBV a Z priesečník priamok AB a SL. Dokážte, že priamka SK je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku KLZ.

(J. Földes)

A – I – 4

Nech $n \geqq 2$ je dané prirodzené číslo. Pre ktoré hodnoty reálneho parametra p má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x_1^4 + \frac{2}{x_1^2} &= px_2, \\ x_2^4 + \frac{2}{x_2^2} &= px_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}^4 + \frac{2}{x_{n-1}^2} &= px_n, \\ x_n^4 + \frac{2}{x_n^2} &= px_1 \end{aligned}$$

aspoň dve riešenia v obore reálnych čísel?

(J. Švrček)

A – I – 5

Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré pre každé reálne číslo x spĺňajú rovnosť

$$(x+1)\,P(x-1) + (x-1)\,P(x+1) = 2x\,P(x).$$

(E. Kováč)

A – I – 6

Nájdite všetky štvorsteny, ktoré majú sieť tvaru deltoidu a práve štyri hrany danej dĺžky a. (Deltoidom rozumieme konvexný štvoruholník, ktorý je súmerný podľa jedinej zo svojich uhlopriečok, nepatrí k nim ani štvorec, ani kosoštvorec.)

(P. Leischner)

A – S – 1

V obore celých čísel x riešte rovnicu

$$3(x^2)_5 + (3x)_5 = (3x-2)(x+2),$$

kde n_5 znamená násobok piatich najbližší číslu n, napr. $(-3)_5 = -5$.

(J. Šimša)

A – S – 2

Označme S stred kružnice vpísanej danému trojuholníku ABC a P, Q päty kolmíc z vrcholu C k priamkam, na ktorých ležia osi vnútorných uhlov BAC a ABC. Dokážte, že priamky AB a PQ sú rovnobežné.

(J. Švrček)

A – S – 3

Zistite, pre ktoré reálne čísla p má sústava rovníc

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= (p+1)x + py - z,\\
y^2 + 1 &= (p+1)y + pz - x,\\
z^2 + 1 &= (p+1)z + px - y
\end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z práve jedno riešenie v obore reálnych čísiel.

(E. Kováč)

A – II – 1

Dokážte, že pre ľubovoľné čísla $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2)$ platí nerovnosť

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť.

(E. Kováč)

A – II – 2

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x a y, pre ktoré platí

$$x^2 = 4y + 3\cdot n(x,y),$$

kde $n(x,y)$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y.

(P. Černek)

A – II – 3

Do kružnice k je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD nie je priemerom. Dokážte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice k dotýkajú v bodoch B a D, leží na priamke AC práve vtedy, keď platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

(E. Kováč)

A – II – 4

V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x^2 - 1 = p(y + z),$$
$$y^2 - 1 = p(z + x),$$
$$z^2 - 1 = p(x + y)$$

s neznámymi x, y, z a parametrom p. Vykonajte diskusiu počtu riešení.

(E. Kováč)

A – III – 1

V obore celých čísel riešte sústavu rovníc

$$(4x)_5 + 7y = 14,$$
$$(2y)_5 - (3x)_7 = 74,$$

kde $(n)_k$ značí násobok čísla k najbližší k číslu n.

(P. Černek)

A – III – 2

Uvažujme ľubovoľný rovnostranný trojuholník KLM, ktorého vrcholy K, L a M ležia postupne na stranách AB, BC a CD daného štvorca $ABCD$. Nájdite množinu stredov strán všetkých takých trojuholníkov KLM.

(J. Zhouf)

A – III – 3

Dokážte, že prirodzené číslo A je druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla práve vtedy, keď pre každé prirodzené n je aspoň jeden z rozdielov

$$(A+1)^2 - A,\ (A+2)^2 - A,\ (A+3)^2 - A,\ \dots,\ (A+n)^2 - A$$

deliteľný číslom n.

(P. Kaňovský)

A – III – 4

Nájdite všetky dvojice reálnych čísel a, b, pre ktoré má rovnica

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

v obore reálnych čísel práve dve riešenia, pričom ich súčet je 12.

(P. Černek)

A – III – 5

V rovine je daný trojuholník KLM a bod A ležiaci na polpriamke opačnej k polpriamke KL. Zostrojte pravouholník $ABCD$, ktorého vrcholy B, C a D ležia postupne na priamkach KM, KL a LM.

(P. Calábek)

A – III – 6

Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spĺňajúce pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnosť

$$f\bigl(xf(y)\bigr) = f(xy) + x.$$

(P. Kaňovský)

Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Nech (nepárne) číslo $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla p, potom p je tiež nepárne. Zo vzťahu $p^2 = 2n+1$ vyplýva, že $n = (p^2 - 1)/2 = (p - 1)(p + 1)/2$. Zostavme tabuľku niekoľkých prvých nepárnych prvočísiel p a im odpovedajúcich čísel n.

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
n	4	12	24	60	84	144	180	264	420	480	684	840	924

Číslo n je zrejme párne, dokonca je (ako prezradzuje aj tabuľka pre niekoľko hodnôt p) deliteľné štyrmi. To vidno z toho, že súčin $(p-1)(p+1)$ dvoch po sebe idúcich párnych čísel je vždy deliteľný ôsmimi. Z tabuľky naviac vidíme, že sa medzi číslicami, ktorými n končí, viackrát vyskytujú číslice 0 a 4, iba raz číslica 2, nevyskytujú sa 6 a 8.

Pozrime sa, akou číslicou končí číslo n v závislosti od číslice a, ktorou končí číslo p. Ak $p = 10k + a$, kde k je celé nezáporné číslo a a nepárna číslica, tak pre jednotlivé možné a dostaneme:

- Ak $a = 1$, tak $n = 10k(5k + 1)$, takže číslo n končí číslicou 0.
- Ak $a = 3$, tak $n = 10k(5k + 4) + 4$, takže číslo n končí číslicou 4.
- Ak $a = 5$, tak $n = 10(5k^2 + 5k + 1) + 2$, takže číslo n končí číslicou 2.
- Ak $a = 7$, tak $n = 10(5k^2 + 7k + 2) + 4$, takže číslo n končí číslicou 4.
- Ak $a = 9$, tak $n = 10(k + 1)(5k + 4)$, takže číslo n končí číslicou 0.

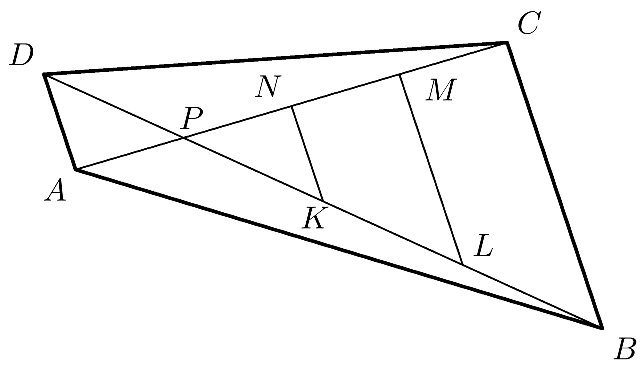
Ak je $2n + 1$ druhou mocninou nepárneho prvočísla (nepárneho čísla), môže číslo n končiť iba číslicami 0, 2, 4. Jediným kandidátom na hľadanú číslicu tak zostáva 2.

Pokiaľ $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla a n končí číslicou 2, prvočíslo p sa dá vyjadriť v tvare $10k + 5 = 5(2k + 1)$, je teda deliteľné piatimi. Jediné prvočíslo, ktoré je deliteľné piatimi, je číslo 5.

Hľadanou číslicou je teda $c = 2$; pre ňu existuje jediné prirodzené číslo $n = 12$, ktoré končí číslicou c, pričom $2n + 1$ je druhou mocninou prvočísla.

C – I – 2

Trojuholníky APD a NPK sú súmerne združené podľa stredu P (obr. 1), AD a NK sú preto rovnobežné a $|AD| = |NK|$. Z rovnosti príslušných úsečiek ďalej vyplýva, že trojuholníky KNP, LMP a BCP sú podobné, preto $NK \parallel ML \parallel BC$ a naviac $|LM| = 2|KN|$ a $|BC| = 3|KN|$. Ak označíme s obsah trojuholníka APD, je obsah trojuholníka NKP rovný s a obsah trojuholníka MLP je $4s$ (má dvakrát väčšiu výšku z vrcholu P ako trojuholník NKP z rovnakého vrcholu a jeho strana ML je dvakrát väčšia ako strana NK). Obsah lichobežníka $KLMN$ je preto $3s$.



Obr. 1

Strana AP trojuholníka APD je štyrikrát menšia ako strana AC trojuholníka ACD, výšky z vrcholu D sú v oboch trojuholníkoch rovnaké, preto je obsah trojuholníka ACD rovný $4s$. Strana PN trojuholníka PNK je štyrikrát menšia ako strana AC trojuholníka ACB, zatiaľ čo výška trojuholníka PNK z vrcholu K je trikrát menšia ako výška trojuholníka ABC z vrcholu B, preto je obsah trojuholníka ACB rovný $12s$. Obsah štvoruholníka $ABCD$ je rovný súčtu obsahov trojuholníkov ABC a ACD, teda $16s$.

Pomer obsahov štvoruholníkov $KLMN$ a $ABCD$ je rovný $3 : 16$.

C – I – 3

Zo zadania vyplýva, že x a y sú nutne prirodzené čísla. Vynásobením oboch strán nerovnice kladným číslom $y\sqrt{x}$ prejdeme k ekvivalentnej nerovnici

$$xy + 6 < 5\sqrt{xy}.$$

Jej úpravou dostaneme

$$(\sqrt{xy} - 3)(\sqrt{xy} - 2) < 0,$$

čo platí práve vtedy, keď $2 < \sqrt{xy} < 3$, čiže $4/x < y < 9/x$.

Pretože x a y sú prirodzené čísla, z poslednej nerovnosti vyplýva, že stačí uvažovať iba $x < 9$. Ľahko potom určíme všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením poslednej nerovnice, a teda aj danej nerovnice, ktorá je s ňou ekvivalentná: $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$, $(7, 1)$, a $(8, 1)$.

C – I – 4

Označme v vzdialenosť v kilometroch, ktorú Jožko prešiel na bicykli a r jeho rýchlosť v km/h. Podľa zadania sú r a v prirodzené čísla a $v < 60$. Čas, ktorý cestoval Jožko na bicykli, bol v/r hodín. Vlakom prešiel vzdialenosť $(60 - v)$ km a túto vzdialenosť prešiel za $(60 - v)/50$ hodín. Preto podľa zadania platí

$$\frac{60 - v}{50} + \frac{v}{r} = \frac{3}{2}.$$

Táto rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$50v - 15r - rv = 0,$$

ktorú ešte upravíme na tvar

$$(50 - r)(v + 15) = 15 \cdot 50 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Odtiaľ vyplýva, že $50 - r$ je prirodzené číslo menšie ako 50 a $v + 15$ je prirodzené číslo väčšie ako 15, ktoré neprevyšuje 75, a naviac, že súčin $(50 - r)(v + 15)$ je deliteľný číslom 5^3. Môžu nastať štyri prípady.

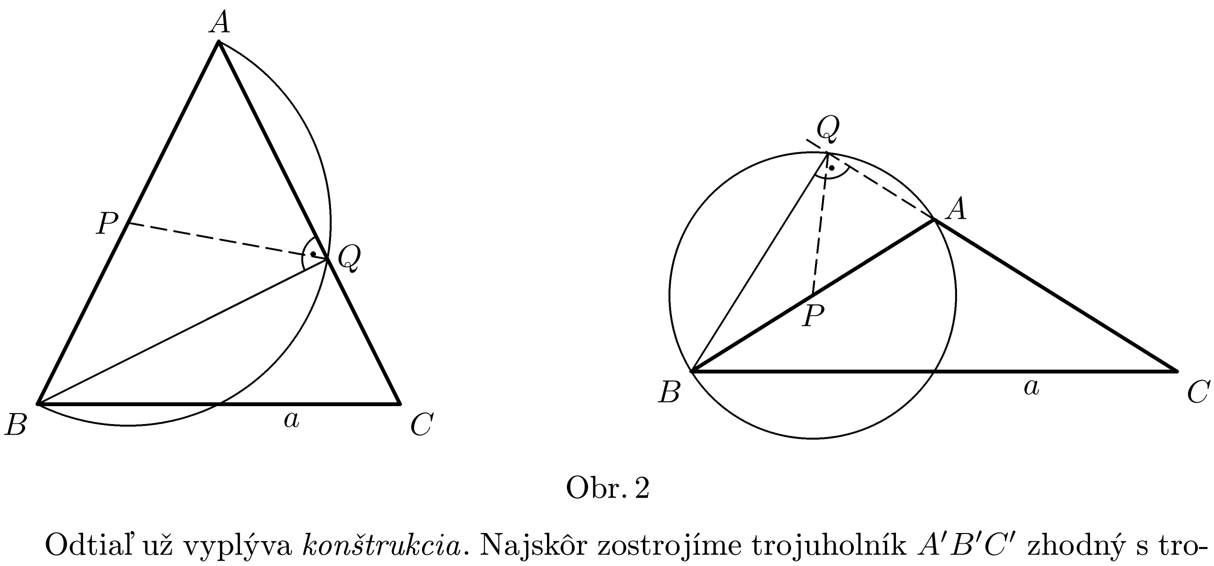
- $5^3 \mid 50 - r$. To nie je možné, pretože $1 \leqq 50 - r < 50$.
- $5^2 \mid 50 - r$ a $5 \mid v + 15$. Číslo $50 - r$ je preto rovné 25, odtiaľ $r = 25$ a $v = 15$.
- $5 \mid 50 - r$ a $5^2 \mid v + 15$. Číslo $v + 15$ je teda prvkom množiny $\{25, 50\}$, odtiaľ dopočítame ďalšie dve možnosti $r = 20$, $v = 10$ a $r = 35$, $v = 35$.
- $5^3 \mid v + 15$. To nie je možné, pretože $15 < v + 15 < 75$.

Možné časy Jožkovej jazdy na bicykli (v minútach) sú preto $15 \cdot 60/25 = 36$, $10 \cdot 60/20 = 30$ a $35 \cdot 60/35 = 60$.

Výpisom všetkých možností sme zistili, že pokiaľ Jožko cestoval podľa zadania úlohy, tak išiel na bicykli buď 30, alebo 36, alebo 60 minút.

C – I – 5

Uhol BQA je buď pravý, alebo $Q = A$. Preto bod Q leží na Tálesovej kružnici zostrojenej nad priemerom BA. (Na obr. 2 je znázornený prípad ostrouhlého aj tupouhlého trojuholníka ABC.) Pretože P je stred úsečky AB, $|PQ|$ je veľkosť polomeru tejto kružnice, preto veľkosť priemeru $|AB|$ tejto kružnice je rovná $2|PQ|$. Trojuholník ABC má dĺžku ramena $2|PQ|$, a pretože poznáme veľkosť základne, je tým jednoznačne určený.



Obr. 2

Odtiaľ už vyplýva *konštrukcia*. Najskôr zostrojíme trojuholník $A'B'C'$ zhodný s trojuholníkom ABC s veľkosťami strán $|A'B'| = |A'C'| = 2|PQ|$ a $|B'C'| = a$, ktorý potom premiestnime tak, aby sa stred strany $A'B'$ zobrazil na bod P a päta výšky z vrcholu B' na bod Q. To možno urobiť jednoznačne až na osovú súmernosť podľa priamky PQ. Pokiaľ teda trojuholník $A'B'C'$ existuje, má úloha dve riešenia súmerne združené podľa osi PQ.

Diskusia je zrejmá. Trojuholník ABC možno zostrojiť práve vtedy, keď možno zostrojiť rovnoramenný trojuholník $A'B'C'$, t. j. keď $a < 4|PQ|$ (trojuholníkové nerovnosti), v tomto prípade má úloha práve dve (zhodné) riešenia. Naviac pre $a < 2\sqrt{2}|PQ|$ bude trojuholník ABC ostrouhlý, pre $a = 2\sqrt{2}|PQ|$ pravouhlý a pre $2\sqrt{2}|PQ| < a < 4|PQ|$ tupouhlý. *Dôkaz správnosti* vyplýva z rozboru úlohy.

Iné riešenie. Označme R stred strany BC, ten je súčasne pätou výšky z vrcholu A. Oba body Q a R teda ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AB so stredom P, preto $|PQ| = |PR| = |AB|/2$. Nakoľko uhol BQC je pravý, leží bod Q na Tálesovej kružnici nad priemerom BC so stredom R, takže $|RQ| = |BC|/2 = a/2$. Trojuholník PQR je preto podobný s trojuholníkom ABC (koeficient podobnosti je 1/2).

Pri *konštrukcii* najskôr zostrojíme trojuholník PQR. Na priamke rovnobežnej so strednou priečkou PR prechádzajúcej bodom Q nájdeme bod $C \neq Q$ tak, aby $|RC| = a/2$. Body A a B potom už zostrojíme jednoducho.

Pre dané body P, Q môžeme zostrojiť tretí vrchol R trojuholníka PQR dvoma spôsobmi. *Diskusia* je teda rovnaká ako v predchádzajúcom riešení. *Dôkaz správnosti* vyplýva z rozboru úlohy.

C – I – 6

a) Rozsaďme v prvom kole rytierov ku stolom ľubovoľným spôsobom. Označme n_1 počet nepriateľov prvého rytiera pri stole, pri ktorom sedí, potom $n_1 \leqq 3$. Podobne označme $n_2 \leqq 3$ počet nepriateľov druhého rytiera pri stole, pri ktorom sedí, atď. Potom pre „hladinu nepriateľstva“

$$N_1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_{28}$$

v prvom kole platí $0 \leqq N_1 \leqq 3 \cdot 28 = 54$, pričom N_1 je celé nezáporné číslo.

Predpokladajme, že existuje rytier, ktorý sedí pri stole s aspoň dvoma nepriateľmi. Potom ho presadíme k druhému stolu. Tým vznikne nové rozsadenie. Skúmajme teraz hladinu nepriateľstva N_2 po tomto druhom kole.

Pokiaľ presadený rytier r sedel pôvodne pri jednom stole so všetkými tromi nepriateľmi a, b, c, po jeho presadení sa počet nepriateľov rytiera r pri stole, pri ktorom teraz sedí, znížil o 3 na nulu, a počet nepriateľov rytierov a, b a c pri ich stole sa znížil o jedna. Počty nepriateľov ostatných rytierov pri ich stoloch sa nezmenili. Teda $N_2 = N_1 - 6$.

Pokiaľ presadený rytier r sedel pôvodne pri jednom stole s dvoma nepriateľmi a a b a bol presadený ku stolu s nepriateľom c, po jeho presadení sa počet nepriateľov rytiera r pri stole, pri ktorom teraz sedí, znížil o jedna z dvoch na jedného, počet nepriateľov rytierov a a b pri ich stoloch sa o jedna znížil, a počet nepriateľov rytiera c pri stole, pri ktorom sedí, sa zvýšil o jedna. Počty nepriateľov ostatných rytierov pri ich stoloch sa nezmenili. V tomto prípade teda $N_2 = N_1 - 2$.

V oboch prípadoch vychádza $N_2 < N_1$.

Pokiaľ ešte po tomto kole existuje rytier, ktorý sedí pri jednom stole s aspoň dvoma svojimi nepriateľmi, opäť ho požiadame, aby si presadol k druhému stolu. Pre hladinu nepriateľstva N_3 po treťom kole bude z rovnakých dôvodov ako skôr platiť $N_3 < N_2$.

Rovnakým spôsobom vytvoríme hladiny nepriateľstva $N_4 > N_5 > \cdots$ po ďalších kolách.

Pretože v každom kole je hladina nepriateľstva menšia ako v predchádzajúcom kole, je vyjadrená celým nezáporným číslom a hladina nepriateľstva v prvom kole je najviac 54, môže sa taká situácia opakovať najviac päťdesiatštyrikrát. Počet kôl musí byť teda konečný a po poslednom kole už neexistuje rytier, ktorý by sedel pri jednom stole s aspoň dvoma nepriateľmi. Tým sme dokázali časť a).

b) Predpokladajme, že rytieri sú teraz rozsadení pri stoloch A a B tak, že každý sedí pri rovnakom stole s najviac jedným nepriateľom. Označme r_A počet rytierov pri stole A a r_B počet rytierov pri stole B. Platí

$$r_A + r_B = 28. \tag{1}$$

Každý z rytierov pri stole A má pri stole B aspoň dvoch nepriateľov a každý z rytierov pri stole B je nepriateľom najviac troch rytierov od stola A, preto pre počet p tých nepriateľských dvojíc, ktoré sedia pri rôznych stoloch, platí

$$2r_A \leqq p \quad \text{a} \quad p \leqq 3r_B, \quad \text{takže } 2r_A \leqq 3r_B.$$

Keď dosadíme do tejto nerovnice z (1) $r_B = 28 - r_A$, dostaneme po úprave $5r_A \leqq 84$. Vzhľadom na to, že r_A je celé nezáporné číslo, musí platiť $r_A \leqq 16$. Vzhľadom na symetriu situácie platí analogicky $r_B \leqq 16$. Tým sme splnili časť b).

V časti b) môžeme postupovať aj sporom. Keby pri stole A sedelo aspoň 17 rytierov, mali by spolu pri stole B aspoň $17 \cdot 2 = 34$ nepriateľov, pritom každý rytier-nepriateľ je v tomto čísle započítaný najviac trikrát. Pretože $3 \cdot 11 < 34$, sedí pri stole B aspoň 12 rytierov, spolu pri oboch stoloch A a B je potom aspoň $17 + 12 = 29$ rytierov, čo odporuje zadaniu.

C – S – 1

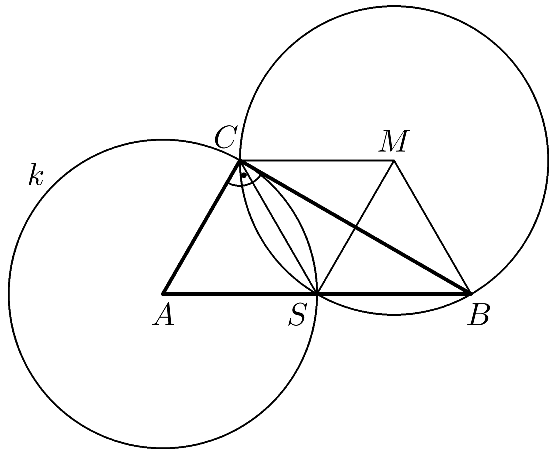
Uvažujme chlapca H. Šesť jeho spoluhráčov z prvej schôdzky je na druhej schôdzke rozdelených do troch družstiev. Potom sú buď traja z nich v jednom družstve, alebo sú v týchto troch družstvách rozdelení po dvoch. Chlapec H je však tiež členom niektorého z týchto družstiev, a teda v tomto družstve sa opäť nachádza trojica spoluhráčov z prvej schôdzky.

Iné riešenie. Označme A, B, C družstvá zostavené na prvej schôdzke, D, E, F družstvá zostavené na druhej schôdzke. Podľa zaradenia do družstiev sú jednotliví chlapci najviac deviatich rôznych typov AD, AE, AF, BD, BE, BF, CD, CE, CF. Keby každého typu boli najviac dvaja chlapci, bolo by na schôdzkach najviac $2 \cdot 9 = 18$

chlapcov, čo je spor s tým, že ich na krúžok chodí 21. Preto aspoň jedného typu sú aspoň traja chlapci, a to je hľadaná trojica chlapcov.

C – S – 2

Stred prepony S pravouhlého trojuholníka ABC je podľa Tálesovej vety stredom kružnice opísanej tomuto trojuholníku, platí teda $|CS| = |AS| = |BS|$ (obr. 3). Nakoľko body C a S ležia na kružnici k, platí $|AS| = |AC|$, preto trojuholník ASC je rovnostranný a veľkosť uhla CSB je rovná 120°.



Obr. 3

Ak M je stred kružnice opísanej trojuholníku BCS, platí $|CM| = |SM| = |BM|$, a pretože $|CS| = |BS|$, sú CMS a SMB zhodné rovnoramenné trojuholníky so základňami CS a BS. Veľkosť uhla CSB je súčtom veľkostí zhodných uhlov CSM a MSB, preto veľkosť uhla MSB je rovná $120°/2 = 60°$. Trojuholník MSB je teda rovnostranný a platí $|MS| = |BS|$.

Polomer kružnice opísanej trojuholníku CSB je rovný $|MS| = |BS| = |AS|$, čo je polomer kružnice k. Kružnica opísaná trojuholníku BCS a kružnica k majú rovnaké polomery, sú teda zhodné. Tým je dôkaz ukončený.

Poznámka: Po zistení, že ASC je rovnostranný trojuholník, je možné dokončiť riešenie aj takto: Ak je D bod súmerne združený s bodom A podľa stredu C, je trojuholník ABC „polovicou“ rovnostranného trojuholníka ABD, takže stred M jeho strany BD má od bodov B, S, C rovnakú vzdialenosť rovnú $|AB|/2$.

C – S – 3

Číslo 1 má práve jedného deliteľa 1. Určme ďalej všetky prirodzené čísla $a \neq 1$, ktoré majú najviac štyroch deliteľov. Také číslo a má dva triviálne delitele 1 a a, preto môže mať najviac ďalšie dva netriviálne delitele, takže je deliteľné najviac dvoma prvočíslami. Ak je číslo a deliteľné dvoma rôznymi prvočíslami p_1 a p_2, je deliteľné aj ich súčinom p_1p_2, vzhľadom na usporiadanie deliteľov čísla a musí teda platiť $a = p_1p_2$. Ak je číslo a deliteľné práve jedným prvočíslom p_1, platí $a = p_1^k$, kde k

je prirodzené číslo. Jeho netriviálnymi deliteľmi sú čísla $p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{k-1}$, preto $k \leqq$ $\leqq 3$.

Najviac štyri delitele teda majú iba číslo 1 a čísla tvaru p_1, p_1^2, p_1^3 a $p_1 p_2$, kde p_1 a p_2 sú rôzne prvočísla.

Nech $p > q$ sú prvočísla a číslo $a = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ má najviac štyri delitele. Potom platí $1 \leqq p - q < p + q \leqq a$. Rozlíšime nasledujúce prípady:

1. $p-q = 1$. Rozdiel prvočísiel p, q je nepárne číslo, preto jedno z nich je párne a druhé sa líši o 1. Teda $p = 3$, $q = 2$ a číslo $a = 3^2 - 2^2 = 5$ má dva delitele 1 a 5.
2. $p - q > 1$. Číslo a má práve štyri rôzne delitele 1, $p - q$, $p + q$, a, preto vzhľadom na úvodnú úvahu môžu nastať dve možnosti:
   a) $p-q$ je prvočíslo p_1 a $p+q$ je p_1^2. Potom však p_1 delí $p_1^2 + p_1 = p + q + (p-q) = 2p$, pritom p je prvočíslo, takže $p_1 = p$ alebo $p_1 = 2$. Rovnosťou $p - q = p_1$ je však možnosť $p_1 = p$ vylúčená, preto musí platiť $p_1 = 2$. Zo sústavy $p-q = 2$, $p+q = 4$ však vyplýva $q = 1$, čo nie je prvočíslo.
   b) $p - q$ je prvočíslo p_1 a $p + q$ je prvočíslo p_2. Pretože $p_2 > p_1$, je prvočíslo p_2 nepárne. Odtiaľ vyplýva $q = 2$, inak by číslo p_2 bolo súčtom dvoch nepárnych prvočísiel p a q, teda číslo párne. Tri prvočísla $p_1 = p - 2$, p a $p_2 = p + 2$ dávajú rôzne zvyšky pri delení tromi, takže jedno z nich je rovné 3. Z $p = 3$ však vyplýva $p_1 = 1$, z $p_2 = 3$ zasa $p = 1$, ostáva preto možnosť $p_1 = 3$, teda $p = 5$. Číslo $a = 5^2 - 2^2 = 21$ má práve štyri delitele 1, 3, 7, 21.

Všetky dvojice prvočísiel (p, q) vyhovujúce zadaniu úlohy sú dvojice $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

Iné riešenie. Vysvetlíme najskôr, prečo $q = 2$. Pripustime naopak, že $q > 2$. Potom obe prvočísla p a q sú nepárne, takže $(p - q)$ a $(p + q)$ sú dve rôzne párne čísla, takže ich súčin $p^2 - q^2$ je číslo tvaru $4k$, kde $k \geqq 2$. Také číslo ale má štyri delitele 1, 2, 4 a $4k$, preto sa jeho deliteľ $2k$ musí rovnať číslu 4. Platí teda $(p - q)(p + q) = 8$, odkiaľ $p - q = 2$ a $p + q = 4$, takže $q = 1$, a to je spor. Rovnosť $q = 2$ je dokázaná.

Hľadáme teda všetky prvočísla $p > 2$, pre ktoré má číslo $p^2 - 4$ najviac štyri delitele. Ľahko sa presvedčíme, že vyhovuje $p = 3$ aj $p = 5$. V prípade $p \geqq 7$ je však jedno z čísel $p + 2$, $p - 2$ deliteľné tromi (podľa toho, či prvočíslo p dáva pri delení tromi zvyšok 1 alebo 2), takže číslo $p^2 - 4$ má päť rôznych deliteľov 1, 3, $p - 2$, $p + 2$ a $p^2 - 4$.

Úlohe teda vyhovujú dve dvojice prvočísiel (p, q), a to $(3, 2)$ a $(5, 2)$.

C – II – 1

Najprv spočítame, koľko je všetkých dvojíc čísel takých, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a potom od tohto počtu odpočítame počet tých dvojíc, pre ktoré súčin ab nie je tromi deliteľný.

Označme C množinu všetkých prirodzených čísel najviac rovných 86,

$$C = \{1, 2, \ldots, 86\}.$$

Množina C má celkom 86 prvkov. Číslo a z nej môžeme vybrať 86 spôsobmi a ku každému takto vybranému číslu a existuje 85 čísel $b \in C$ rôznych od a. Preto počet všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) prirodzených čísel $(1 \leqq a \neq b \leqq 86)$ je rovný $86 \cdot$ $\cdot 85$. Túto množinu môžeme rozdeliť na páry usporiadaných dvojíc (a, b) a (b, a), preto práve pre polovicu dvojíc platí $a < b$ (druhú polovicu tvoria dvojice, v ktorých $a > b$). Počet všetkých dvojíc (a, b) prirodzených čísel takých, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, je teda rovný $(86 \cdot 85)/2 = 3\,655$. (Je to zároveň počet všetkých neusporiadaných dvojíc prirodzených čísel z množiny C, čo je kombinačné číslo $\binom{86}{2} = 3\,655$.)

Súčin ab je deliteľný tromi práve vtedy, keď je aspoň jeden z činiteľov a, b deliteľný tromi. Pretože medzi číslami z množiny C je práve 28 čísel deliteľných tromi, je v C práve $86 - 28 = 58$ čísel, ktoré nie sú deliteľné tromi. Celkom teda môžeme zostaviť $(58 \cdot 57)/2 = 1\,653$ dvojíc rôznych prirodzených čísel (a, b) takých, že $1 \leqq a < b \leqq 86$, a pritom súčin ab nie je deliteľný tromi.

Počet všetkých dvojíc (a, b) prirodzených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi, je rovný $3\,655 - 1\,653 = 2\,002$.

Iné riešenie. Označme A, resp. B, množinu všetkých tých dvojíc (a, b) $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, v ktorých je číslo a, resp. b deliteľné tromi. Medzi číslami v množine $C = \{1, 2, \dots, 86\}$ existuje 28 čísel deliteľných tromi (sú to čísla $3, 6, 9, \dots, 84$). Ku každému číslu $a \in C$ existuje $86 - a$ čísel $b \in C$ takých, že $a < b$. Preto počet všetkých prvkov množiny A je rovný

$$
\begin{aligned}
&(86 - 3) + (86 - 6) + (86 - 9) + \cdots + (86 - 84) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 28) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2}\big((1 + 28) + (2 + 27) + (3 + 26) + \cdots + (28 + 1)\big) = \\
&\quad = 28 \cdot 86 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 28 = 2\,408 - 1\,218 = 1\,190.
\end{aligned}
$$

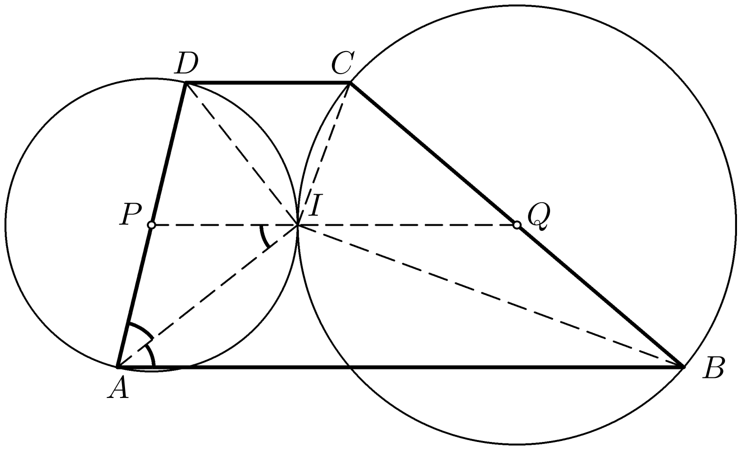
Ku každému číslu $b \in C$ existuje $b - 1$ čísel $a \in C$ takých, že $a < b$. Preto počet všetkých prvkov množiny B je rovný

$$
\begin{aligned}
&(3 - 1) + (6 - 1) + (9 - 1) + \cdots + (84 - 1) = \\
&\qquad = 3 \cdot (1 + 2 + \cdots + 28) - 28 = 1\,218 - 28 = 1\,190.
\end{aligned}
$$

Prienik množín A a B obsahuje také dvojice čísel (a, b), v ktorých sú obe zložky a aj b deliteľné tromi, pričom $a < b$. Týchto dvojíc je podľa úvahy z úvodného riešenia $(28 \cdot 27)/2 = 378$. Počet prvkov zjednotenia množín A a B, t. j. počet všetkých dvojíc (a, b) prirodzených čísel $(1 \leqq a < b \leqq 86)$, pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi, je rovný súčtu prvkov množín A a B zmenšený o počet prvkov ich prieniku, t. j. $1\,190 + 1\,190 - 378 = 2\,002$.

C – II – 2

Nech $ABCD$ je lichobežník so základňami AB a CD spĺňajúci predpoklady zadania (obr. 4). Označme P stred ramena AD, Q stred ramena BC a I dotykový bod kružníc



Obr. 4

zostrojených nad ramenami ako priemermi. Bod P je stredom kružnice zostrojenej nad ramenom AD, preto sú úsečky PA a PI zhodné a API je rovnoramenný trojuholník so základňou AI. Odtiaľ vyplýva, že uhly PAI a AIP sú zhodné. Pretože bod dotyku dvoch kružníc leží na spojnici ich stredov, je I bodom strednej priečky PQ lichobežníka $ABCD$, ktorá je rovnobežná s jeho základňami. Uhly PIA a IAB sú striedavé a majú preto rovnakú veľkosť. Teda uhly PAI a IAB sú zhodné a AI je osou uhla DAB. Bod I leží na osi tohto uhla, preto má rovnakú vzdialenosť od jeho ramien AD a AB. Podobne sa ukáže, že IB je osou uhla ABC a bod I má rovnakú vzdialenosť od priamok AB a BC. Odtiaľ už vyplýva, že bod I má rovnakú vzdialenosť od ramien AD a BC, a leží preto na osi uhla, ktorý tieto ramená zvierajú.

C – II – 3

Obe čísla 3 a 7 sú nepárne, preto pre ľubovoľné celé číslo x majú čísla $x - 3$ a $x - 7$ (a teda aj čísla $(x - 3)^2$ a $(x - 7)^2$) rovnakú paritu. Čísla -2 a 1 majú rôznu paritu, preto čísla $(x - 3)^2 - 2$, $(x - 7)^2 + 1$ majú rôznu paritu, jedno z nich je teda párne. Pretože jediné párne prvočíslo je číslo 2, je jedno z čísel $(x-3)^2-2$, $(x-7)^2+1$ rovné 2.

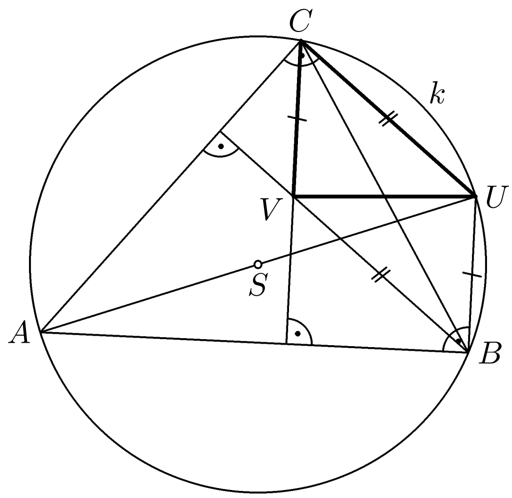
a) Nech $(x - 3)^2 - 2 = 2$. Potom $(x - 3)^2 = 4$, t. j. $x = 5$ alebo $x = 1$. Pre $x = 5$ je hodnota výrazu $(x - 7)^2 + 1$ rovná 5, čo je prvočíslo, pre $x = 1$ je hodnota tohto výrazu rovná 37, čo je tiež prvočíslo.

b) Nech $(x - 7)^2 + 1 = 2$. Potom $(x - 7)^2 = 1$, t. j. $x = 8$ alebo $x = 6$. Pre $x = 8$ je hodnota výrazu $(x - 3)^2 - 2$ rovná 23, čo je prvočíslo, pre $x = 6$ je hodnota tohto výrazu rovná 7, čo je tiež prvočíslo.

Hľadanými celými číslami x sú všetky prvky množiny $\{1, 5, 6, 8\}$.

C – II – 4

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, S stred kružnice k jemu opísanej a V priesečník jeho výšok (obr. 5). Nech U je bod súmerne združený s bodom A podľa S. Bod U leží na



Obr. 5

kružnici k vnútri toho oblúka BC, ktorý neobsahuje bod A. Úsečka AU je priemerom kružnice k, preto podľa Tálesovej vety sú uhly UCA a UBA pravé. Nakoľko výška BV je kolmá na stranu AC trojuholníka ABC, sú úsečky BV a UC rovnobežné. Z podobného dôvodu sú rovnobežné aj úsečky CV a UB, takže $BUCV$ je rovnobežník. Úsečky BC a UV majú teda spoločný stred.

Odtiaľ už vyplýva konštrukcia. Zostrojíme bod B súmerne združený s bodom C podľa stredu úsečky UV. Bod A potom určíme ako priesečník kolmice na priamku BU prechádzajúcej bodom B a kolmice na priamku CU prechádzajúcej bodom C.

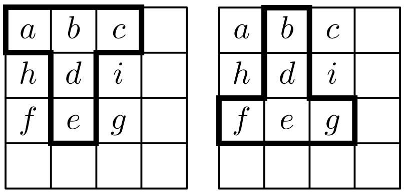
Ukážme teraz, že takto zostrojený trojuholník ABC má všetky požadované vlastnosti. Bod B je zostrojený tak, že platí $BV \parallel UC$ a $CV \parallel UB$. Bod A je zostrojený tak, že platí $AB \perp UB$ a $AC \perp UC$, čo znamená, že body B a C ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom AU. Body A a U sú teda súmerne združené podľa stredu tejto kružnice, ktorá je opísaná trojuholníku ABC. Zo vzťahov $AC \perp UC$ a $BV \parallel UC$ vyplýva $BV \perp$ $\perp AC$, takže bod V leží na výške z vrcholu B na stranu AC zostrojeného trojuholníka. Podobne zo vzťahov $AB \perp UB$ a $CV \parallel UB$ vyplýva, že bod V leží na výške z vrcholu C na stranu AB. Bod V je teda priesečník výšok trojuholníka ABC.

Úloha má za daných podmienok práve jedno riešenie.

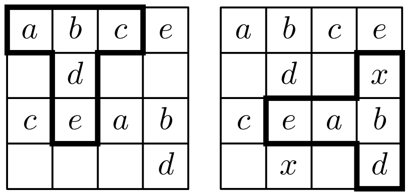
KATEGÓRIA B

B – I – 1

Označme a, b, c, d, e, f, g, h, i čísla vpísané do ľavého horného štvorca 3×3 tabuľky (obr. 6). Keď porovnáme súčiny pre pätice tvaru a umiestnené v tejto časti tabuľky, musí platiť $abcde = bdefg$, čiže $ac = fg$. Analogicky pre pätice a nám vyjde $ahfdi = cigdh$, čiže $af = cg$. Pretože všetky čísla sú kladné, vyplýva z oboch rovností $f = c$ a $g = a$. Zároveň si uvedomme, že túto vlastnosť (t. j. rovnosť čísel v protiľahlých rohoch štvorca 3×3) musí mať každý zo štyroch takých štvorcov, ktoré v tabuľke existujú. To využijeme pri ďalšom dopĺňaní danej tabuľky.

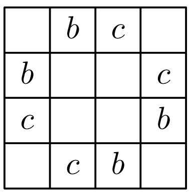


Obr. 6

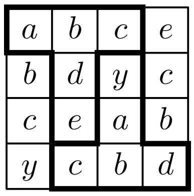


Obr. 7

Uvažujme opäť umiestnenie v ľavom hornom rohu danej tabuľky s vpísanými číslami a, b, c, d, e, doplňme ďalšie čísla podľa práve dokázanej vlastnosti a označme x chýbajúce číslo v pätici (obr. 7). Porovnaním oboch zhodných súčinov dostávame $abcde = abdex$, čiže $x = c$. Keby sme rovnakú úvahu urobili pre pätice polí a , ktoré dostaneme z uvažovaných pätíc preklopením podľa zvislej osi danej tabuľky, vyjde nám analogická rovnosť aj pre ďalšie dve dvojice polí tabuľky (obr. 8).



Obr. 8



Obr. 9

Teraz už máme tabuľku vyplnenú celú až na dve políčka, do ktorých vpíšeme číslo y (obr. 9). Porovnaním súčinov v oboch vyznačených päticiach dostávame $abcde = abcdy$, čiže $y = e$. Analogická rovnosť musí však platiť aj pre druhé dve centrálne polia tabuľky ležiace na druhej uhlopriečke, t. j. $d = a$. Stačí, aby sme celú úvahu zopakovali pre pätice polí, ktoré vzniknú z uvažovaných pätíc preklopením podľa zvislej osi danej tabuľky.

Všimnime si teraz vo vyplnenej tabuľke pätice polí vyznačených na obr. 10. Zrejme musí platiť $a^2bce = abce^2$, čiže $a = e$. Vidíme, že tabuľka obsahuje najviac tri rôzne čísla a, b, c (obr. 11), pričom $a^3bc = 1$. Teraz zostáva overiť, že rovnaký súčin a^3bc má každá pätica polí tvaru , ktorú možno do tabuľky umiestniť. Pretože vyplnená tabuľka je osovo súmerná podľa oboch uhlopriečok, a teda aj stredovo súmerná, stačí to overiť len pre štyri možné polohy rovnako orientovaných pätíc (napr. vo zvyčajnej polohe písmena T).

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

a	b	c	e
b	a	e	c
c	e	a	b
e	c	b	a

Obr. 10

a	b	c	a
b	a	a	c
c	a	a	b
a	c	b	a

Obr. 11

Odpoveď. V tabuľke sú zapísané najviac tri rôzne kladné čísla a, b, c, pričom $a^3bc = 1$.

B – I – 2

Uvažujme množinu M, ktorá spĺňa podmienky zo zadania. Pretože M obsahuje číslo 75 600, musí byť aspoň jednoprvková. Ďalej si všimnime, že pokiaľ z množiny M odstránime nejaké číslo $a \neq 75\,600$, dostaneme množinu $M' \subset M$, ktorá rovnako spĺňa dané podmienky. Overme to. Množina M' aj naďalej obsahuje číslo 75 600. Ak sú x, y ľubovoľné dve čísla z množiny M', platí pre ne automaticky, že $x \mid y$ alebo $y \mid x$, pretože to pre ne platí ako pre prvky množiny M.

Tým sme vlastne dokázali, že pokiaľ nájdeme množinu, ktorá má m prvkov a spĺňa podmienky zadania, tak existuje k-prvková množina požadovaných vlastností pre ľubovoľné k, $1 \leqq k \leqq m$. Stačí teda nájsť vyhovujúcu množinu, ktorá má maximálny možný počet prvkov

Ak je a ľubovoľný prvok množiny M, je predovšetkým $a \leqq 75\,600$. Pokiaľ $a < 75\,600$, musí podľa zadania platiť, že $a \mid 75\,600$. Množina M teda obsahuje len delitele čísla 75 600.

Prvočíselný rozklad čísla 75 600 je $75\,600 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Každý deliteľ čísla 75 600 má teda tvar $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$, kde $0 \leqq \alpha \leqq 4$, $0 \leqq \beta \leqq 3$, $0 \leqq \gamma \leqq 2$, $0 \leqq \delta \leqq 1$. Každý prvok M je preto charakterizovaný usporiadanou štvoricou $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ odpovedajúcich exponentov v uvedenom rozklade na prvočísla. Ak sú p a p' dva rôzne prvky M a platí napríklad $p < p'$, tak podľa zadania musí súčasne platiť $\alpha \leqq \alpha'$, $\beta \leqq \beta'$, $\gamma \leqq \gamma'$, $\delta \leqq \delta'$, pričom aspoň jedna nerovnosť musí byť ostrá (inak by platilo $p = p'$), odkiaľ vyplýva nerovnosť $\alpha+\beta+\gamma+\delta < \alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'$. Pretože v našom prípade $0 \leqq \alpha+\beta+\gamma+\delta \leqq 10$, môže množina M obsahovať najviac 11 prvkov. Takou je napr. množina

$$D = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^4 \cdot 3, 2^4 \cdot 3^2, 2^4 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7\}.$$

Tým sme dokázali, že z danej množiny môžeme (vrátane čísla 75 600) vybrať požadovaným spôsobom $1, 2, \dots, 11$ prvkov.

B – I – 3

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že dĺžka strany štvorca $ABCD$ je 1. Označme M stred strany AB a U priesečník priamok t_1, t_2 (obr. 12). Ďalej označme l kružnicu vpísanú trojuholníku CDP, S jej stred a r polomer. Ďalej nech Q a R sú postupne dotykové body priamky t_1 s kružnicou l a polkružnicou k. Položme $x = |AP|$. V riešení využijeme známy fakt, že vzdialenosti oboch dotykových bodov od priesečníkov dotyčníc sú zhodné. Takto napríklad dostávame

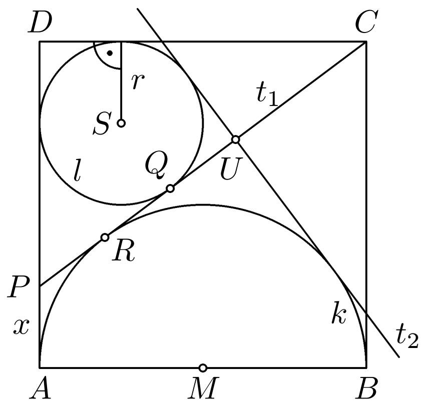
$$|CP| = |CR| + |RP| = |CB| + |AP| = 1 + x. \tag{1}$$

Riešenie urobíme v troch krokoch, pritom každý z nich urobíme viacerými spôsobmi:

1. krok. Výpočet dĺžky x.

2. krok. Výpočet polomeru r.

3. krok. Dôkaz kolmosti priamok t_1 a t_2.



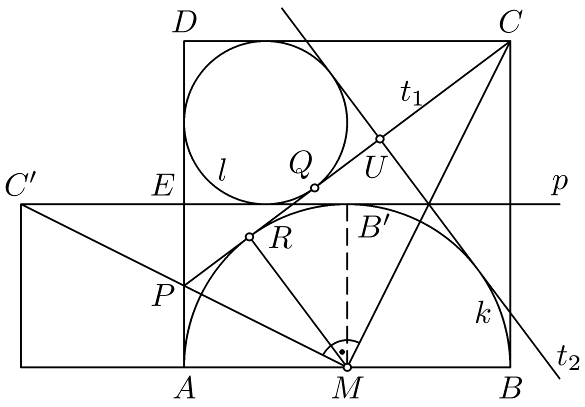
Obr. 12

1. krok, 1. spôsob.

Uvažujme pravouhlý trojuholník CDP. Dĺžka jeho prepony sa podľa (1) rovná $1+x$ a dĺžky odvesien sú 1 a $1-x$ Z Pytagorovej vety teda dostávame

$$(1+x)^2 = 1^2 + (1-x)^2.$$

Riešením tejto (po úprave lineárnej) rovnice je $x = 1/4$.



Obr. 13

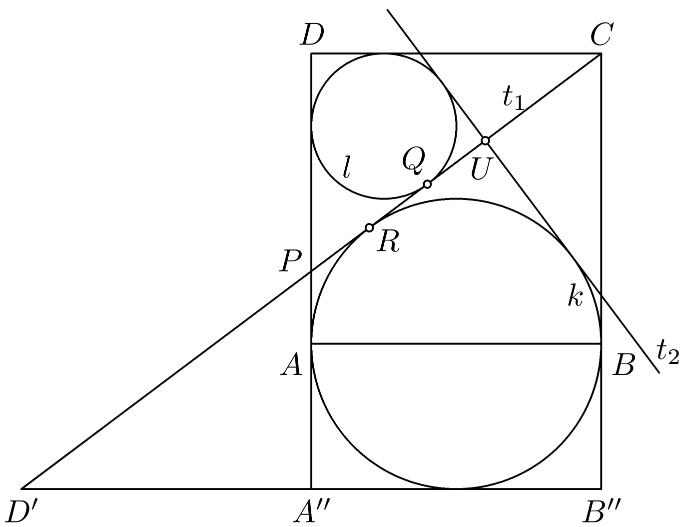
1. krok, 2. spôsob.

Označme C' bod, ktorý vznikne otočením bodu C okolo stredu M o $90°$ v kladnom smere. Potom bod C' leží na priamke p, ktorá je obrazom priamky BC v uvedenom otočení (obr. 13), pričom rovnobežné úsečky $C'E$ a AM majú rovnakú dĺžku $1/2$. Pretože priamka MP je osou uhla AMR a priamka MC osou uhla BMR, sú priamky MP a MC navzájom kolmé, takže bod C' leží na priamke MP. Trojuholníky PAM' a PEC' sú teda súmerne združené podľa stredu P, a preto $x = |AP| = |AE|/2 = 1/4$.

2. krok, 1. spôsob.

Ak je ϱ polomer kružnice vpísanej trojuholníku so stranami a, b, c, je jeho obsah rovný $(a+b+c)\varrho/2$. Pre pravouhlý trojuholník CDP, v ktorom poznáme dĺžky všetkých strán, tak dostávame (pripomeňme, že $|PC| = 1 + x = 5/4$)

$$r = \frac{\frac{1}{2}|CD| \cdot |DP|}{\frac{1}{2}(|CD| + |DP| + |PC|)} = \frac{1}{4}.$$



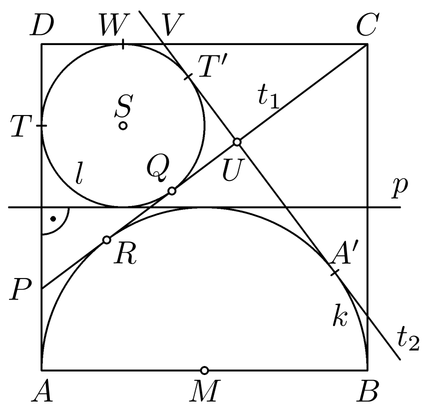
Obr. 14

2. krok, 2. spôsob.

Nech $A''B''$ je obraz úsečky AB v posunutí v smere polpriamky CB o dĺžku $1/2$ (obr. 14). Označme D' priesečník priamok $A''B''$ a t_1. Potom kružnica, ktorej časťou je polkružnica k, je vpísaná trojuholníku $D'B''C$ a naviac sú trojuholníky $D'B''C$ a CDP podobné. Pomer polomerov ich vpísaných kružníc je teda rovný pomeru ich kratších odvesien. To znamená, že $(1/2) : r = (3/2) : (3/4)$, čiže $r = 1/4$.

3. krok, 1. spôsob.

Podľa druhého kroku vieme, že priemer kružnice l je rovný polomeru polkružnice k. Preto priamka p (os úsečky AD) je spoločnou vnútornou dotyčnicou polkružnice k a kružnice l (obr. 15). Pritom priamka p je kolmá na priamku AD, ktorá je ich vonkajšou spoločnou dotyčnicou. V osovej súmernosti podľa spojnice stredov SM oboch kružníc je obrazom vonkajšej dotyčnice AD vonkajšia dotyčnica t_2 a obrazom vnútornej dotyčnice p vnútorná dotyčnica t_1. Preto sú navzájom kolmé aj dotyčnice t_1 a t_2.



Obr. 15

3. krok, 2. spôsob.

Označme V priesečník priamky t_2 so stranou CD. Pretože dĺžky oboch spoločných vonkajších dotyčníc (pokiaľ ich berieme ako úsečky, ktorých krajnými bodmi sú dotykové body) polkružnice k a kružnice l sú zhodné, t. j. $|AT| = |A'T'|$, dostávame na základe zhodnosti dĺžok dotyčníc z bodu P ku kružnici l a zhodnosti dĺžok dotyčníc z bodu U k polkružnici k

$$|AT| = |AP| + |PT| = |AP| + |PQ| = 2|AP| + |RQ|,$$
$$|A'T'| = |A'U| + |UT'| = |RU| + |UQ| = |RQ| + 2|UQ|,$$

čo znamená, že $|UQ| = |AP| = 1/4$. Ďalej z rovnosti dĺžok dotyčníc z bodu C k polkružnici k a kružnici l dostávame $|RQ| = |CR| - |CQ| = |CB| - |CW| = 1 - 3/4 = 1/4$. To znamená, že $|PU| = 3/4 = |PD|$, takže štvoruholník $PUVD$ je deltoid, a teda $|\sphericalangle PUV| = |\sphericalangle PDV| = 90°$, t. j. priamky t_1 a t_2 sú navzájom kolmé.

Tým je dôkaz hotový.

B – I – 4

Rozoberme najprv prípad a), teda $n = 2\,000$. Vyberme tisíc čísel a urobme s nimi danú operáciu. Potom vezmime zvyšných tisíc čísel a rovnako s nimi urobme danú operáciu. Dostaneme tisíc čísel rovných a a tisíc čísel rovných b. Pokiaľ $a = b$, je úloha vyriešená. Pokiaľ $a \neq b$, tak postupne vyberajme číslo rovné a a číslo rovné b a nahraďme ich priemerom $(a + b)/2$. Takto môžeme vybrať $1\,000$ dvojíc a všetky čísla nahradiť číslom $(a + b)/2$. Teda pre $n = 2\,000$ existuje postupnosť krokov, ktorá prevedie ľubovoľných $2\,000$ čísel na rovnaké čísla.

Prípad $n = 35$ budeme riešiť podobne. Vyberme 7 disjunktných pätíc a v každej z nich urobme operáciu popísanú vyššie, pričom v každej dostaneme rovnaké čísla. Z každej nanovo vytvorenej pätice vyberieme teraz jedno číslo. Dostaneme 7 čísel, s ktorými opäť urobíme danú operáciu. Podobným spôsobom vyberme ďalšie sedmice a vytvorme odpovedajúce priemery. Všetky sedmice budú rovnaké, lebo v každej pätici máme rovnaké čísla. Všetky čísla budú teda rovnaké. Aj v tomto prípade existuje postupnosť krokov, ktorá prevedie ľubovoľných 35 čísel na rovnaké čísla.

Uvažujme $n = 3$. Uvažujme trojicu čísel $(1, 1, 2)$. Robiť danú operáciu s dvoma jednotkami nemá zmysel, takže po prvom kroku, ktorý zmení našu trojicu, dostaneme čísla $(1, 3/2, 3/2)$. Znovu sme dostali dve čísla rovnaké, ktoré sa neoplatí „priemerovať“. Teda ďalší krok, ktorý zmení našu trojicu, ju nechá v tvare $(5/4, 5/4, 3/2)$. Všimnime si, že po každom kroku je súčet čísel rovnaký. Dokážeme to aj vo všeobecnom prípade. Označme $a_1, a_2, \dots, a_n$ dané čísla. Bez ujmy na všeobecnosti urobme krok s prvými m $(m < n)$ číslami. Dostaneme čísla

$$\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m}}_{m\text{-krát}}, a_{m+1}, \dots, a_n.$$

Ich súčet je $m \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)/m + a_{m+1} + \ldots + a_n = a_1 + \ldots + a_n$. Tým je uvedené tvrdenie dokázané.

Ak teda máme dostať z čísel $(1, 1, 2)$ všetky čísla rovnaké, na konci úprav musíme dostať všetky čísla rovné $(2+1+1)/3 = 4/3$. Všimnime si, že pri postupných krokoch sa v menovateli čísel objavujú len mocniny čísla 2. Dokážeme to matematickou indukciou.

V prvom kroku to zrejme platí. Po k krokoch máme tri čísla, ktoré majú v menovateli len mocniny čísla 2. V ďalšom kroku môžeme vybrať buď jedno číslo, ktoré nám trojicu nezmení, alebo dve čísla. Ak ich nahradíme ich priemerom, budeme zrejme deliť číslom 2. A znovu dostaneme v menovateli len mocninu dvojky. V každom kroku dostaneme teda do menovateľa iba mocniny dvojky, ale na konci úprav tam máme mať číslo 3, čo je spor. Zistili sme, že pre $n = 3$ neexistuje pre každú trojicu čísel postupnosť krokov, ktorá zmení všetky čísla na rovnaké.

Prípad $n = 17$ dokážeme podobne ako prípad $n = 3$. Ukázali sme skôr (pre všeobecné n), že v každom kroku zostáva zachovaný súčet čísel. Vezmime teda nejakú 17-ticu prirodzených čísel, ktorých súčet nie je deliteľný 17. Na konci máme dostať 17-ticu rovnakých čísel rovných $(a_1+a_2+\ldots+a_{17})/17$, pričom tento zlomok je v základnom tvare. V žiadnom kroku však nedostaneme do menovateľa číslo deliteľné 17. Toto tvrdenie znovu dokážeme indukciou. Prvý krok je zrejmý. Po k krokoch dostaneme 17-ticu čísel, v ktorých menovateľoch nie je číslo deliteľné 17. Z týchto čísel vezmime $m < < 17$ a sčítajme ich. Podľa indukčného predpokladu dostaneme v menovateli najmenší spoločný násobok menovateľov vybraných čísel. Ten podľa indukčného predpokladu nebude deliteľný 17. Pokiaľ teraz tento súčet vydelíme číslom $m < 17$, nedostaneme v menovateli číslo deliteľné 17. Preto ani po $k + 1$ krokoch nedostaneme v menovateli číslo deliteľné 17. Pretože na konci musíme dostať čísla, ktoré majú v menovateli 17, dostávame spor. Pre niektoré 17-tice prirodzených čísel teda nedokážeme nájsť postupnosť krokov, ktorá z nich vytvorí rovnaké čísla.

B – I – 5

Pokiaľ vynásobíme prvú rovnicu neznámou y a druhú neznámou x, dostaneme na ľavej strane oboch rovníc $x^2y^2 - 2xy$. Porovnaním pravých strán máme

$$py = p(2 - p)x. \tag{1}$$

Pokiaľ $p = 0$, má daná sústava tvar

$$x^2y - 2x = 0,$$
$$y^2x - 2y = 0,$$

pričom po jednoduchej úprave

$$x(xy - 2) = 0,$$
$$y(xy - 2) = 0.$$

Vidíme, že sústava má nekonečne veľa riešení. Je ním každá dvojica (x, y) reálnych čísel taká, že $xy = 2$. (Okrem týchto dvojíc je riešením iba dvojica $x = y = 0$.)

Pokiaľ $p = 2$, dostaneme sústavu

$$x(xy - 2) = 2,$$
$$y(xy - 2) = 0,$$

ktorá má jediné riešenie $y = 0$, $x = -1$.

Vráťme sa teraz k rovnici (1), pričom budeme ďalej predpokladať, že $p \notin \{0, 2\}$. Rovnicu vydelíme číslom p. Dostaneme

$$y = (2 - p)x. \tag{2}$$

Dosadením tohto vzťahu do prvej z daných rovníc dostávame ($p \neq 2$) kubickú rovnicu

$$(2 - p)x^3 - 2x - p = 0. \tag{3}$$

Riešenie kubickej rovnice vo všeobecnosti nie je také jednoduché ako riešenie kvadratickej rovnice. V našom prípade však môžeme uhádnuť jeden jej koreň $x = -1$. Potom môžeme polynóm $(2-p)x^3-2x-p$ bezo zvyšku vydeliť koreňovým činiteľom $x+1$. Vydelením dostávame

$$(2-p)x^3-2x-p=(x+1)\big((2-p)x^2+(p-2)x-p\big).$$

Stačí teda vyriešiť kvadratickú rovnicu

$$(2-p)x^2+(p-2)x-p=0. \tag{4}$$

Uvedomme si, že neznáma y je jednoznačne určená neznámou x pomocou vzťahu (2). Ak má teda mať daná sústava práve tri riešenia, musí mať rovnica (3) tri navzájom rôzne riešenia. To znamená, že rovnica (4) musí mať dve rôzne riešenia, ktoré sa naviac nerovnajú -1. Budeme skúmať, kedy je diskriminant D rovnice (4) kladný. Jednoduchým výpočtom dostávame

$$D=(p-2)^2-4(2-p)(-p)=(2-p)(3p+2).$$

Odtiaľ vidíme, že $D>0$ práve vtedy, keď $p\in(-2/3,2)$. Dosadením $x=-1$ ľahko vidíme, že rovnica (4) má koreň -1 len pre $p=4/3$. Rovnica (3) má preto tri rôzne riešenia práve vtedy, keď $p\in(-2/3,0)\cup(0,4/3)\cup(4/3,2)$.

Obrátene, ak má rovnica (3) tri rôzne riešenia, má tri rôzne riešenia aj sústava (2), (3), ktorá je však pre $p\neq 0$ a $p\neq 2$ ekvivalentná s danou sústavou.

Odpoveď. Daná sústava má v obore reálnych čísel práve tri riešenia práve vtedy, keď $p\in(-2/3,0)\cup(0,4/3)\cup(4/3,2)$.

Poznámka. Úlohu možno riešiť viacerými spôsobmi – napríklad z prvej rovnice vyjadriť neznámu y pomocou x a to dosadiť do druhej rovnice, alebo prvú rovnicu vydeliť x a druhú y a získané rovnice odčítať. Oba tieto spôsoby opäť vedú ku kubickej rovnici (3).

B – I – 6

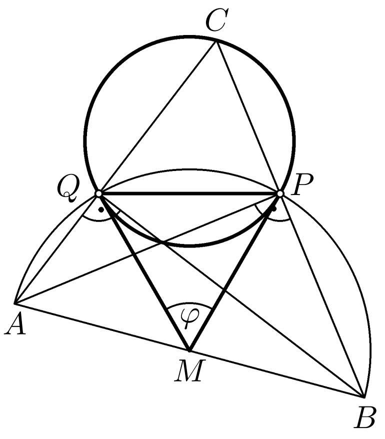
Uvažujme trochu všeobecnejšiu úlohu. Predpokladajme len, že trojuholník MPQ je rovnoramenný so základňou PQ, pričom $|\sphericalangle PMQ|=\varphi$. Označme štandardne α, β, γ vnútorné uhly trojuholníka ABC. Body P, Q sú päty výšok z bodov A, B, takže body A, B, P, Q ležia na kružnici so stredom M (ide o Tálesovu kružnicu nad priemerom AB). To znamená, že $|MA|=|MB|=|MP|=|MQ|$, a teda trojuholník AMQ (pokiaľ $A\neq Q$) je rovnoramenný; analogicky trojuholník BMP. Potom platí

$$\begin{gathered}|\sphericalangle AMQ|=180^\circ-2|\sphericalangle MAQ|,\\ |\sphericalangle BMP|=180^\circ-2|\sphericalangle MBP|,\qquad |\sphericalangle PCQ|=\gamma.\end{gathered}\tag{1}$$

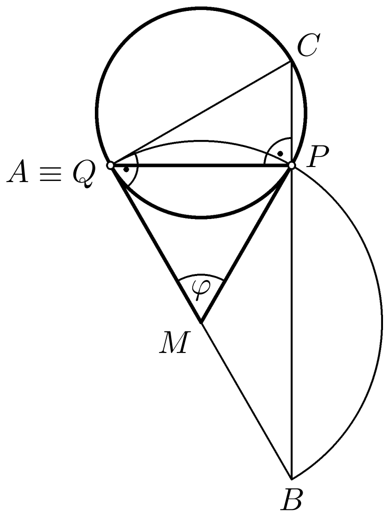
Ďalej rozoberme niekoľko prípadov podľa toho, či má byť trojuholník ABC ostrouhlý, pravouhlý, alebo tupouhlý.

Prípad 1. Trojuholník ABC je ostrouhlý (obr. 16). Zrejme body M a C ležia v opačných polrovinách určených priamkou PQ. Naviac platí $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + \varphi + |\sphericalangle BMP| = 180°$, odkiaľ po dosadení (1) dostávame $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° - \varphi/2$.

Prípad 2. Trojuholník ABC má pri vrchole A pravý uhol (obr. 17). Zrejme body M a C ležia v opačných polrovinách určených priamkou PQ. Ďalej $A \equiv Q$ a $|\sphericalangle BMP| = 180° - \varphi$. Z (1) potom vyplýva $\beta = |\sphericalangle MBP| = \varphi/2$, a teda $\gamma = 90° - \varphi/2$. Pokiaľ je pravý uhol pri vrchole B, analogicky dostaneme $\gamma = 90° - \varphi/2$.

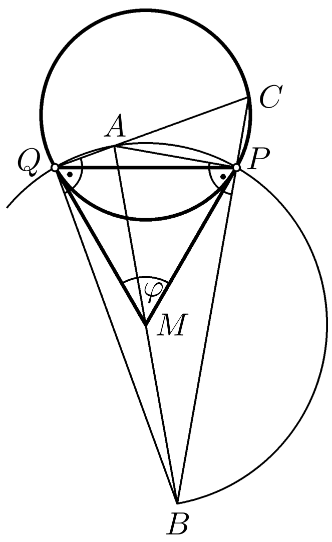


Obr. 16

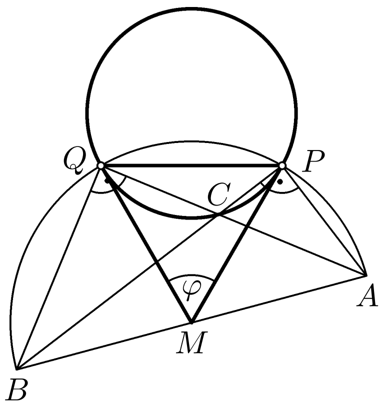


Obr. 17

Prípad 3. Trojuholník ABC má pri vrchole A tupý uhol (obr. 18). Zrejme body M a C ležia v opačných polrovinách určených priamkou PQ. Pritom $|\sphericalangle MAQ| = 180° - \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $\varphi - |\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180°$, odkiaľ po dosadení (1) dostávame $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 90° - \varphi/2$. Ak je tupý uhol pri vrchole B, analogicky dostaneme $\gamma = 90° - \varphi/2$.



Obr. 18



Obr. 19

Prípad 4. Trojuholník ABC má pri vrchole C tupý uhol (obr. 19). Zrejme body M a C ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou PQ. Ďalej z pravouhlých trojuholníkov ABQ a ABP dostávame $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180° + \varphi$. Z (1) potom vyplýva $\gamma = 90° + \varphi/2$.

Zrejme trojuholník ABC nemôže mať pri vrchole C pravý uhol, inak by body C, P, Q boli totožné. Celkovo sme teda dostali, že pokiaľ bod C leží v polorovine opačnej k polrovine PQM, platí $|\sphericalangle PCQ| = 90° - \varphi/2$, a ak bod C leží v polorovine PQM, platí $|\sphericalangle PCQ| = 90° + \varphi/2$. Množinou všetkých takých bodov C je teda kružnica, označme ju k, nad tetivou PQ s výnimkou bodov P, Q (kde väčší oblúk kružnice k je časťou množiny všetkých bodov X takých, že $|\sphericalangle PXQ| = 90° - \varphi/2$).

Naopak, nech $C \in k \setminus \{P, Q\}$ a MPQ je rovnoramenný trojuholník so základňou PQ. Potom si ľahko uvedomíme, ako by sme zostrojili body A, B. Bod A leží na priamke CQ a na priamke, ktorá je kolmá na CP a prechádza bodom P. Analogicky dostaneme bod B. V takomto trojuholníku ABC budú body P, Q pätami výšok z vrcholov A, B. Stačí teda dokázať, že M je stred AB. Označme N stred strany AB. Dokážeme, že $M \equiv N$. Označme $\psi = |\sphericalangle PNQ|$. Zrejme bod N leží v polrovine PQM a je stredom kružnice, na ktorej ležia body A, B, P, Q, takže trojuholník NPQ je rovnoramenný so základňou PQ. Pritom z vyššie uvedených úvah vyplýva, že pokiaľ bod C leží v polrovine opačnej k polrovine PQM, platí $\gamma = 90° - \psi/2$, a pokiaľ bod C leží v polrovine PQM, platí $\gamma = 90° + \psi/2$. To znamená, že $\psi = \varphi$. Naviac oba body M a N ležia na osi úsečky PQ. Takže nutne $M \equiv N$, a teda M je naozaj stred strany AB.

Odpoveď. Hľadanou množinou všetkých vrcholov C je kružnica k s výnimkou bodov P, Q. Špeciálne pre $\varphi = 60°$ je k kružnica súmerne združená s kružnicou opísanou trojuholníku MPQ podľa priamky PQ.

Iné riešenie. Uvažujme znovu všeobecnejšiu úlohu ako v predchádzajúcom riešení. Opäť si uvedomme, že body A, B, P, Q ležia na kružnici so stredom M. Vzhľadom na to, že M je stred úsečky AB, leží aspoň jeden z bodov A, B nutne v polrovine PQM. Bez ujmy na všeobecnosti nech je to bod B. Potom z vety o obvodových uhloch vyplýva, že $|\sphericalangle QBP| = \varphi/2$. Ďalej

$$|\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - |\sphericalangle QBC| = 90^\circ - |\sphericalangle QBP| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Pokiaľ $\gamma < 90^\circ$, leží bod C v polrovine opačnej k polrovine PQM a platí $\gamma = |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - \varphi/2$. Pokiaľ $\gamma > 90^\circ$, leží bod C v polrovine PQM a platí $\gamma = 180^\circ - |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ + \varphi/2$.

Ďalší postup je už analogický ako v prvom riešení.

Diskusiu prípadov v oboch riešeniach môžeme čiastočne obísť. Stačí si uvedomiť niekoľko faktov. Ak V je priesečníkom výšok v trojuholníku ABC, je bod C priesečníkom výšok v trojuholníku ABV. Preto trojuholník ABC má vlastnosť zo zadania úlohy práve vtedy, keď ju má trojuholník ABC', kde $C' = V$. Znamená to, že množina vrcholov C všetkých vyhovujúcich trojuholníkov je totožná s množinou ich priesečníkov výšok V. Pretože body C, V ležia vždy v opačných polrovinách určených priamkou PQ a platí $|\sphericalangle PVQ| + |\sphericalangle PCQ| = 180^\circ$, stačí nájsť množinu vrcholov C len v jednej zo spomenutých polrovín (ako už vieme, je ňou kružnicový oblúk), v druhej polrovine touto množinou potom musí byť doplnok toho oblúka na celú kružnicu.

B – S – 1

Pre korene x_1, x_2 danej kvadratickej rovnice (pokiaľ existujú) platí podľa Viètových vzťahov rovnosti

$$x_1 + x_2 = -4p \quad \text{a} \quad x_1x_2 = 5p^2 + 6p - 16,$$

z ktorých vypočítame skúmaný súčet

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-4p)^2 - 2(5p^2+6p-16) = \\ &= 6p^2 - 12p + 32 = 6(p-1)^2 + 26. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $x_1^2 + x_2^2 \geqq 26$, pritom rovnosť môže nastať, len keď $p = 1$. Zistíme preto, či pre $p = 1$ má daná rovnica skutočne dve rôzne riešenia. Ide o rovnicu $x^2 + 4x - 5 = 0$ s koreňmi $x_1 = -5$ a $x_2 = 1$. Tým je úloha vyriešená.

Dodajme, že väčšina riešiteľov pravdepodobne najprv zistí, pre ktoré p má daná rovnica dva rôzne korene. Pretože pre jej diskriminant D platí

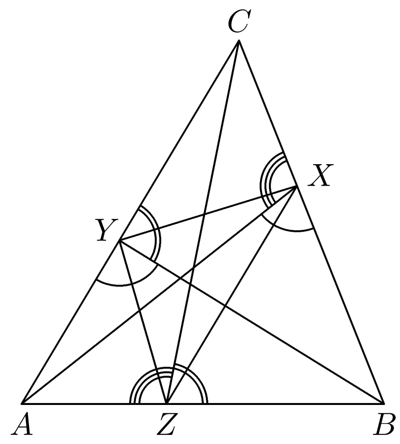
$$D = (4p)^2 - 4(5p^2 + 6p - 16) = -4p^2 - 24p + 64 = -4(p+8)(p-2),$$

sú také p práve čísla z intervalu $(-8, 2)$.

Odpoveď: Maximálna hodnota súčtu $x_1^2 + x_2^2$ (rovná 26) zodpovedá jedinému číslu $p = 1$.

B – S – 2

V tetivovom štvoruholníku $ABXY$ označme $\varphi = |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB|$ veľkosť oboch zhodných obvodových uhlov nad spoločnou tetivou AB (obr. 20). Podobne označme



Obr. 20

$\psi = |\sphericalangle BZC| = |\sphericalangle BYC|$ a $\omega = |\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle CZA|$ veľkosti zhodných obvodových uhlov nad tetivami BC a CA v tetivových štvoruholníkoch $BCYZ$ a $CAZX$. Keď zapíšeme postupne rovnosti pre každú z troch dvojíc vyznačených susedných uhlov pri vrcholoch X, Y a Z, dostaneme pre neznáme veľkosti φ, ψ a ω sústavu troch lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \pi, \\ \psi + \omega &= \pi, \\ \omega + \varphi &= \pi, \end{aligned}$$

ktorá má jediné riešenie $\varphi = \psi = \omega = \pi/2$, čo jednoducho zistíme napr. odčítaním ľubovoľných dvoch rovníc a dosadením. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Poznámka. Ak sú naopak body X, Y a Z päty výšok trojuholníka ABC, sú štvoruholníky $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ tetivové podľa Tálesovej vety.

B – S – 3

Pretože pre zvolené číslo k vždy platí $18 \leqq k+17 \leqq 34$ a medzi číslami $18, 19, \ldots, 34$ má každé z čísel $12, 13, \ldots, 17$ iba jeden násobok (konkrétne dvojnásobok), ľubovoľné číslo $m \in \{12, 13, \ldots, 17\}$ zotrieme iba pri voľbe jediného čísla k (pri ktorom $k + 17 = 2m$). Napríklad číslo 15 zotrieme iba voľbou $k = 13$, číslo 13 iba voľbou $k = 9$. Na zotretie oboch čísel 15 a 13 teda musíme niekedy vybrať $k = 13$ a niekedy neskôr $k = 9$. Potom ale v okamihu výberu čísla $k = 9$ je už zotreté ako číslo 10 (zotreli sme ho najneskôr pri výbere $k = 13$), tak číslo 1 (to sme zotreli hneď pri prvom výbere). Číslo $k + 17$

je deliteľné deviatimi iba pri výberoch $k = 1$ a $k = 10$, pri žiadnom ďalšom výbere už preto nezotrieme číslo 9. Dokázali sme, že opakovaním danej procedúry nemožno zotrieť všetky tri čísla 15, 13 a 9, tým skôr nemožno zotrieť všetky čísla od 1 do 17.

Iné riešenie. Pripustime, že všetky čísla možno zotrieť po n výberoch čísla k (spojených so zotieraním všetkých deliteľov čísla $k+17$) a že každým výberom sa niečo zotrie (inak je taký výber zbytočný). Posledné o. i. znamená, že každé číslo je vybrané najviac raz. Zrejme $n > 1$ a pre posledné vybrané číslo k_n musí platiť $k_n|(k_n + 17)$, t. j. $k_n = 17$ (možnosť $k_n = 1$ je vylúčená tým, že číslo 1 je zotreté hneď pri prvom výbere). Pred posledným výberom sú na tabuli len delitele čísla 34, teda okrem čísla 17 prípadne číslo 2. Keby tam číslo 2 nebolo, muselo by opäť platiť $k_{n-1} \mid (k_{n-1} + 17)$, čo už možné nie je. Preto nutne $k_{n-1} = 2$. Taká voľba je ale zbytočná, pretože číslo $2 + 17$ je prvočíslo.

B – II – 1

Pretože číslo $4n+3$ je nepárne, musí byť nepárne aj číslo $7n+5$, takže číslo n musí byť párne, t. j. $n = 2k$ pre vhodné celé k.

Požadovanú vlastnosť možno vyjadriť aj tak, že rozdiel $D = (7n + 5)^2 - (4n + 3)^2$ musí byť deliteľný číslom 100. S využitím rozkladu

$$D = \big((7n+5) - (4n+3)\big)\big((7n+5) + (4n+3)\big) = (3n+2)(11n+8)$$

po dosadení $n = 2k$ dostaneme vyjadrenie $D = 4(3k + 1)(11k + 4)$. Zaujíma nás teda, kedy je súčin $(3k+1)(11k+4)$ deliteľný číslom 25. Oba činitele $3k+1$ a $11k+4$ nemôžu byť násobky piatich súčasne, pretože pre ich najväčší spoločný deliteľ vychádza

$$\text{nsd}(11k + 4, 3k + 1) = \text{nsd}(3k + 1, 2k + 1) = \text{nsd}(2k + 1, k) = \text{nsd}(k, 1) = 1.$$

Zistíme preto, kedy $25 \mid 3k + 1$ a kedy $25 \mid 11k + 4$. Z vyjadrenia

$$3k + 1 = 3(k - 8) + 25 \quad \text{a} \quad 11k + 4 = 11(k - 11) + 125$$

vidíme, že $25 \mid 3k+1$ práve vtedy, keď $k = 25t+8$, zatiaľ čo $25 \mid 11k+4$, práve vtedy, keď $k = 25t + 11$ (písmeno t označuje v oboch prípadoch celé číslo). Hľadané čísla $n = 2k$ sú preto čísla tvarov $n = 50t + 16$ a $n = 50t + 22$ v rozmedzí od 1 do 99, sú to teda práve čísla 16, 22, 66 a 72.

Iné riešenie. Najprv zistíme, aká je posledná číslica čísel $(7n + 5)^2$ a $(4n + 3)^2$ v závislosti na poslednej číslici čísla n.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7n+5$	5	2	9	6	3	0	7	4	1	8
$(7n+5)^2$	5	4	**1**	6	9	0	**9**	6	1	4
$4n+3$	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9
$(4n+3)^2$	9	9	**1**	5	1	9	**9**	1	5	1

(Výpočet celej tabuľky sa skráti na polovicu, keď si dopredu ako v predchádzajúcom riešení uvedomíme, že n musí byť párne.) Vidíme, že čísla $(7n+5)^2$ a $(4n+3)^2$ končia rovnakou číslicou práve vtedy, keď číslo n končí číslicou 2 alebo 6. Každé hľadané $n < 100$ je teda buď tvaru $n = 10a+2$, alebo tvaru $n = 10a+6$, kde a je neznáma číslica. Aj keď by stačilo otestovať všetkých $2 \cdot 10 = 20$ takých čísel n, zvolíme iný postup.

(i) Pre $n = 10a + 2$ platí

$$(7n+5)^2 = (70a+19)^2 = 4\,900a^2 + 2\,660a + 361,$$
$$(4n+3)^2 = (40a+11)^2 = 1\,600a^2 + 880a + 121.$$

Vidíme, že číslo $(7n+5)^2$ má na mieste desiatok rovnakú číslicu, akú má číslo $6a+6$ na mieste jednotiek; číslo $(4n+3)^2$ zasa má na mieste desiatok rovnakú číslicu, akú má číslo $8a+2$ na mieste jednotiek. Hľadáme teda číslice a, pre ktoré rozdiel $(8a+2) - (6a+6) = 2(a-2)$ končí číslicou nula; zrejme to platí iba pre $a = 2$ a $a = 7$, ktorým zodpovedajú riešenia $n = 22$ a $n = 72$.

(ii) Pre $n = 10a + 6$ platí

$$(7n+5)^2 = (70a+47)^2 = 4\,900a^2 + 6\,580a + 2\,209$$
$$(4n+3)^2 = (40a+27)^2 = 1\,600a^2 + 2\,160a + 729.$$

Teraz sú počty desiatok v týchto číslach rovnaké ako počty jednotiek v číslach $8a$ a $6a+2$. Rozdiel $8a - (6a+2) = 2(a-1)$ končí číslicou nula len pre $a = 1$ a $a = 6$. Zodpovedajúce riešenia sú $n = 16$ a $n = 66$.

B – II – 2

Pretože pre ľubovoľné reálne čísla x, y sú obe čísla (x^2+1) a (y^2+1) nenulové (kladné), môžeme prejsť k novým neznámym

$$u = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{a} \quad v = \frac{y}{y^2+1},$$

v ktorých má zrejme pôvodná sústava rovníc tvar

$$1 + 24uv = 0 \quad \text{a} \quad 12u + 12v + 1 = 0.$$

Odtiaľ napríklad pre neznámu u jednoducho dostaneme kvadratickú rovnicu

$$24u^2 + 2u - 1 = 0$$

s koreňmi $u_1 = 1/6$ a $u_2 = -1/4$, ktorým „symetricky“ zodpovedajú hodnoty $v_1 = -1/4$ a $v_2 = 1/6$. Pretože (kvadratické) rovnice

$$\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{6} \quad \text{a} \quad \frac{t}{t^2+1} = -\frac{1}{4}$$

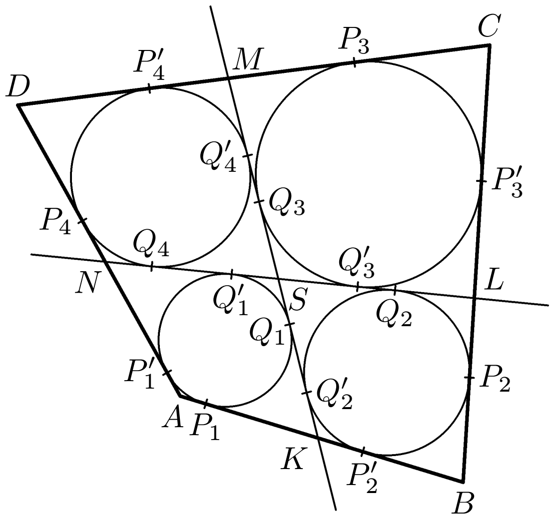
majú riešenie

$$s_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8} \quad \text{a} \quad t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3},$$

má pôvodná sústava práve osem riešení, a to dvojice tvaru $(x, y) = \bigl(3 \pm \sqrt{8}, -2 \pm \sqrt{3}\bigr)$ a $(x, y) = \bigl(-2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{8}\bigr)$, kde znamienka sú kombinované ľubovoľne.

B – II – 3

Predpokladajme, že uvedeným štyrom štvoruholníkom možno vpísať kružnice. Body dotykov týchto kružníc s príslušnými stranami štvoruholníkov označme ako na obr. 21.



Obr. 21

Zo súmernosti dotyčníc zostrojených z jedného bodu k rovnakej kružnici vyplývajú rovnosti

$$|AP_1| = |AP_1'|,\ |BP_2| = |BP_2'|,\ |CP_3| = |CP_3'|,\ |DP_4| = |DP_4'| \tag{1}$$

a

$$|SQ_1| = |SQ_1'|,\ |SQ_2| = |SQ_2'|,\ |SQ_3| = |SQ_3'|,\ |SQ_4| = |SQ_4'|. \tag{2}$$

Zo súmernosti spoločných vonkajších dotyčníc dvoch kružníc zasa vyplývajú rovnosti

$$\begin{aligned} |P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2|,\ |P_2P_3'| = |Q_2'Q_3|, \\ |P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4|,\ |P_4P_1'| = |Q_4'Q_1|. \end{aligned} \tag{3}$$

Podľa známeho tvrdenia možno konvexnému štvoruholníku $ABCD$ vpísať kružnicu práve vtedy, keď dĺžky jeho strán spĺňajú podmienku

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|,$$

ktorú možno vzhľadom na (1) upraviť na tvar

$$|P_1P_2'| + |P_3P_4'| = |P_2P_3'| + |P_4P_1'|. \tag{4}$$

Všimnime si, že podľa (2) a (3) platia rovnosti

$$\begin{aligned}
|P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2| = |Q_1'S| + |SQ_2| = |SQ_1| + |SQ_2|,\\
|P_2P_3'| &= |Q_2'Q_3| = |Q_2'S| + |SQ_3| = |SQ_2| + |SQ_3|,\\
|P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4| = |Q_3'S| + |SQ_4| = |SQ_3| + |SQ_4|,\\
|P_4P_1'| &= |Q_4'Q_1| = |Q_4'S| + |SQ_1| = |SQ_4| + |SQ_1|.
\end{aligned}$$

Obe strany (4) sa teda rovnajú súčtu $|SQ_1|+|SQ_2|+|SQ_3|+|SQ_4|$ a dôkaz je hotový.

B – II – 4

Poznamenajme najskôr, že popísanú operáciu nemá zmysel robiť s dvojicou čísel (a, b) obsahujúcou číslo nula, lebo taká dvojica sa operáciou nezmení.

(i) Predpokladajme najskôr, že daná skupina n nezáporných čísel sa dá rozdeliť na dve podskupiny A a B s rovnakým súčtom čísel. Ukážme, že v takom prípade možno opakovaním operácie zmeniť všetky čísla oboch skupín A a B na nuly. Ak obsahuje niektorá zo skupín A, B aspoň jedno kladné číslo (inak sme hotoví), vyplýva z rovnosti súčtu čísel v oboch skupinách, že kladné číslo existuje v oboch z nich. Vyberme teda kladné číslo $a \in A$ a kladné číslo $b \in B$ a urobme operáciu práve s týmito dvoma číslami. Ak napríklad $a \leqq b$ (v prípade $a \geqq b$ je úvaha podobná), zmení sa číslo a v skupine A na nulu a číslo b v skupine B na číslo $b - a$, takže sa celkový súčet čísel v skupine A zmenší o a, rovnako ako celkový súčet čísel v skupine B. Preto budú po urobenej operácii súčty čísel v skupinách A a B opäť rovnaké, pritom sa celkový počet núl v $A \cup B$ zväčší o 1 (pokiaľ bolo $a \neq b$) alebo o 2 (pokiaľ bolo $a = b$). Opakovaním popísaného postupu s kladnými číslami $a \in A$ a $b \in B$ sa preto po konečnom počte krokov dostaneme do situácie, keď v žiadnej zo skupín A, B už nebude kladné číslo.

(ii) Predpokladajme teraz, že z danej n-tice nezáporných čísel sme dostali vhodným opakovaním operácie n-ticu zloženú zo samých núl. Dokážme indukciou, že pred urobením každej jednotlivej operácie bolo možné aktuálnu n-ticu čísel rozdeliť na dve podskupiny A a B s rovnakým súčtom. Pred prevedením poslednej operácie musela mať aktuálna n-tica čísel tvar $\{a, a, 0, 0, \dots, 0\}$, takže vhodné rozdelenie bolo $A = \{a\}$ a $B = \{a, 0, 0, \dots, 0\}$. Predpokladajme teraz, že po urobení niektorej operácie s číslami (a, b), $a \leqq b$, existovalo rozdelenie čísel do podskupín A a B s rovnakým súčtom a ukážme, že aj pred urobením tejto operácie také rozdelenie existovalo. Určite môžeme predpokladať, že nové čísla 0 a $b - a$ nepatria do rovnakej z oboch podskupín A a B (inak prehodíme číslo 0 do druhej podskupiny, čo nezmení súčty čísel v podskupinách), nech teda napríklad $0 \in A$ a $b - a \in B$. Potom číslo 0 v A zameníme číslom a a číslo $b - a$ v B zameníme číslom b; dostaneme tak vhodné rozdelenie aktuálnych čísel pred uvažovanou operáciou.

Kategória A

A – I – 1

Vyjadrenie obsahu S všeobecného trojuholníka z dĺžok jeho strán a, b, c je dané Herónovým vzorcom

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bez označenia s pre polovičný obvod je zápis Herónovho vzorca o niečo dlhší, presnejšie

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Urobme malú odbočku a všimnime si, ako Herónov vzorec nepriamo „testuje“ známe nerovnosti, ktoré zaručujú existenciu trojuholníka. Čísla a, b, c sú dĺžkami strán niektorého trojuholníka práve vtedy, keď všetky činitele pod odmocninou vo vzťahu (1) sú kladné. Podľa vzťahu (1) je obsah T trojuholníka so stranami $a+b$, $b+c$, $c+a$ rovný

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+2b+2c)(2c)(2a)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazovanú nerovnosť $T \geqq 4S$ teda rozpíšeme ako

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geqq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

V ekvivalentnej nerovnosti medzi odmocňovanými výrazmi skrátime činiteľ $(a+b+c)$ a dostaneme tak nerovnosť

$$abc \geqq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \tag{2}$$

ktorú teraz (pre strany a, b, c všeobecného trojuholníka) niekoľkými spôsobmi dokážeme.

Pri prvom z nich využijeme zrejmé nerovnosti

$$\begin{aligned} a^2 &\geqq a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c),\\ b^2 &\geqq b^2-(c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a),\\ c^2 &\geqq c^2-(a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b). \end{aligned} \tag{3}$$

Pretože ide o tri nerovnosti medzi kladnými výrazmi, súčin ich ľavých strán nie je menší ako súčin ich pravých strán, t. j.

$$a^2b^2c^2 \geqq (b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2,$$

odkiaľ po odmocnení dostaneme nerovnosť (2). Tým je nerovnosť $T \geqq 4S$ dokázaná. Z nášho postupu tiež vyplýva, že rovnosť $T = 4S$ nastane práve vtedy, keď budú splnené súčasne tri rovnosti

$$a^2 = a^2 - (b-c)^2,\ b^2 = b^2 - (c-a)^2,\ c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

t. j. práve vtedy, keď bude platiť $a = b = c$ (prípad rovnostranného trojuholníka).

Poznamenajme, že dôkaz nerovnosti (2) sme dosiahli vynásobením troch analogických nerovností (3). Prvá z nich po odmocnení oboch strán nadobudne tvar nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (kladných) čísel $u = a + b - c$ a $v = a - b + c$, t. j.

$$a = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} \geqq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)},$$

Využiť takú AG-nerovnosť nás napadne, keď dokazovanú nerovnosť (2) prepíšeme z pôvodných premenných a, b, c do nových premenných

$$u = a + b - c > 0,\ v = a - b + c > 0,\ w = -a + b + c > 0.$$

Pretože $a = (u+v)/2$, $b = (u+w)/2$ a $z = (v+w)/2$, prejde nerovnosť (2) na nerovnosť

$$(u+v)(u+w)(v+w) \geqq 8uvw \tag{2'}$$

a súvislosť s AG-nerovnosťami

$$\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv},\ \frac{u+w}{2} \geqq \sqrt{uw},\ \frac{v+w}{2} \geqq \sqrt{vw}$$

už vidno. Dokázať transformovanú nerovnosť (2′) môžeme však aj použitím jedinej AG-nerovnosti. Po roznásobení ľavej strany (2′) a zrejmej úprave dostaneme

$$\frac{u^2v + u^2w + v^2u + v^2w + w^2u + w^2v}{6} \geqq uvw,$$

čo je AG-nerovnosť pre skupinu šiestich členov

$$u^2v,\ u^2w,\ v^2u,\ v^2w,\ w^2u,\ w^2v,$$

pretože ich geometrický priemer je rovný

$$\sqrt[6]{u^2v \cdot u^2w \cdot v^2u \cdot v^2w \cdot w^2u \cdot w^2v} = uvw.$$

Na záver uveďme ešte jeden algebraický dôkaz nerovnosti (2). Vzhľadom na symetriu predpokladajme, že $a \leqq \min\{b, c\}$, položme $x = b - a \geqq 0$, $y = c - a \geqq 0$ a prepíšme nerovnosť (2) ako nerovnosť pre mnohočlen premennej a s koeficientami závislými na x a y. Dostávame

$$\begin{aligned}
&abc - (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = \\
&\quad = a(a+x)(a+y) - (a+x+y)(a+y-x)(a+x-y) = \\
&\quad = a[a^2 + a(x+y) + xy] - [a + (x+y)][a^2 - (x-y)^2] = \\
&\quad = [a^3 + a^2(x+y) + axy] - \\
&\qquad - [a^3 + a^2(x+y) - a(x-y)^2 - (x+y)(x-y)^2] = \\
&\quad = a[xy + (x-y)^2] + (x+y)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Posledný výraz je (vzhľadom na to, že $a > 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$) zrejme nezáporný, pričom nule sa rovná práve vtedy, keď platí $xy = 0$ a $x - y = 0$, čiže $x = y = 0$.

A – I – 2

Nech dvojica celých čísel x, y vyhovuje danej rovnici. Pretože súčet $(x_5)^2 + (y^4)_5$ je deliteľný piatimi, dáva číslo $2xy^2$ pri delení piatimi zvyšok 4, t. j. $5 \mid (2xy^2 - 4)$. Číslo y preto nie je deliteľné piatimi, takže platí buď $y = 5k \pm 1$, alebo $y = 5k \pm 2$, kde $5k = y_5$. Obe možnosti teraz preberieme oddelene.

Prípad $y = 5k \pm 1$. Pretože $y^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, platí $5 \mid (y^2 - 1)$, a preto z podmienky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ vyplýva $5 \mid (2x - 4) = 2(x-2)$, teda $x = 5n + 2$, kde $5n = x_5$. Z podmienky $5 \mid (y^2 - 1)$ vyplýva tiež $5 \mid (y^4 - 1)$, čiže $(y^4)_5 = y^4 - 1$, teda daná rovnica získava tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n + 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
(y^4 - 10ny^2 + 25n^2) - 4y^2 &= 52, \\
(y^2 - 5n)^2 - 4y^2 &= 52, \\
(y^2 - 5n - 2y)(y^2 - 5n + 2y) &= 52. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Na ľavej strane poslednej rovnice je súčin dvoch celých čísel líšiacich sa o $4y$, teda o násobok štyroch; pretože $52 = 2^2 \cdot 13$, máme na ľavej strane (1) súčin čísel 2 a 26 alebo súčin čísel -2 a -26. Tak či onak platí $|4y| = 26 - 2 = 24$, odkiaľ $y = \pm 6$, takže menší z oboch činiteľov v (1) je rovný $6^2 - 5n - 12 = 24 - 5n$. Zatiaľ čo rovnica $24 - 5n = 2$ žiadne celočíselné riešenie n nemá, rovnica $24 - 5n = -26$ má riešenie $n = 10$, ktorému zodpovedá $x = 5 \cdot 10 + 2 = 52$. Podmienku $y = 5k \pm 1$ teda spĺňajú práve dve riešenia danej rovnice, a síce $(x, y) = (52, 6)$ a $(x, y) = (52, -6)$.

Prípad $y = 5k \pm 2$. Pretože $y^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, platí $5 \mid (y^2 + 1)$, a preto z podmienky $5 \mid (2xy^2 - 4)$ vyplýva $5 \mid (-2x - 4) = -2(x + 2)$, teda $x = 5n - 2$, kde $5n = x_5$. Z podmienky $5 \mid (y^2 + 1)$ vyplýva rovnako $5 \mid (y^4 - 1)$, čiže $(y^4)_5 = y^4 - 1$, teda daná rovnica získava tvar

$$(5n)^2 + (y^4 - 1) = 2 \cdot (5n - 2) \cdot y^2 + 51.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}(y^4 - 10ny^2 + 25n^2) + 4y^2 &= 52,\\ (y^2 - 5n)^2 + 4y^2 &= 52. \qquad (2)\end{aligned}$$

Oba sčítance na ľavej strane poslednej rovnice sú nezáporné, takže neprevyšujú číslo 52 z pravej strany. Z nerovnosti $4y^2 \leqq 52$ vyplýva $y^2 \leqq 13$, čo vzhľadom na podmienku $y = 5k \pm 2$ znamená, že buď $y = \pm 2$, alebo $y = \pm 3$. Ak $y = \pm 2$, je rovnica (2) splnená práve vtedy, keď $(4-5n)^2 = 36$, čo nastane pre jediné celé číslo $n = 2$, ktorému zodpovedá $x = 5 \cdot 2 - 2 = 8$. Ak $y = \pm 3$, prejde (2) na rovnicu $(9-5n)^2 = 16$ s jediným celočíselným koreňom $n = 1$, ktorému zodpovedá $x = 5 \cdot 1 - 2 = 3$. Podmienku $y = 5k \pm \pm 2$ teda spĺňajú práve štyri riešenia (x, y) danej rovnice, a síce dvojice $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$.

Odpoveď. Daná rovnica má v obore celých čísel celkom šesť riešení (x, y), konkrétne dvojice $(52, 6)$, $(52, -6)$, $(8, 2)$, $(8, -2)$, $(3, 3)$ a $(3, -3)$. (Odporúčame urobiť skúšku, aj keď nie je nutnou súčasťou takto podaného riešenia.)

Poznámka. Pre každé celé z je číslo z_5 rovné jednému z čísel $z-2$, $z-1$, z, $z+1$ alebo $z+2$ (tomu z nich, ktoré je násobkom piatich). Danú úlohu by bolo možné preto riešiť tak, že by sme danú rovnicu riešili v jednotlivých prípadoch $x = 5n + r$ a $y = 5k + q$, kde čísla r a q prebiehajú (navzájom nezávisle) množinu $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Taká diskusia by však bola zdĺhavá, uvedené riešenie je jej premysleným skrátením.

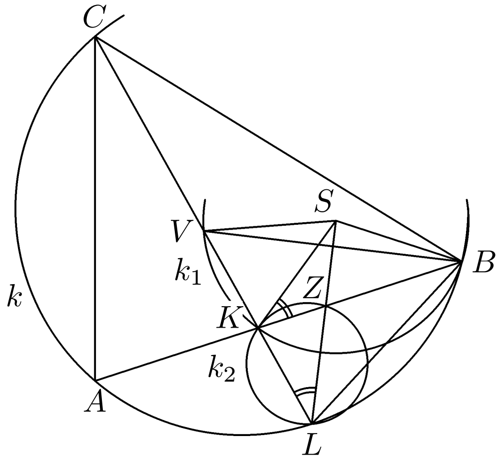
Uvedomme si, že pri našom postupe sme najskôr vylúčili prípad $q = 0$ a potom sme už rozlíšili len prípady $q = \pm 1$ a $q = \pm 2$. Bolo to umožnené tým, že číslo y^2 má pri delení piatimi zvyšok nezávislý na znamienku čísla q a že podľa tohto zvyšku možno z danej rovnice jednoznačne určiť obdobný zvyšok čísla x, teda hodnotu r.

Posledný „trik“, ktorý sme pri riešení urobili, spočíval v tom, že sme do danej rovnice nedosadzovali vyjadrenie $y = 5k \pm 1$, resp. $y = 5k \pm 2$, čím sa nám o niečo zjednodušil zápis príslušných rovníc (1) a (2). Dodajme ešte, že algebraické úpravy danej rovnice vedúce k rovniciam (1) a (2) patria pri riešení rovníc v obore celých čísel k tým najbežnejším postupom.

A – I – 3

Kružnice opísané trojuholníkom ABC, KBV a KLZ označme po rade k, k_1 a k_2 (obr. 22). Našou úlohou je dokázať, že priamka SK je dotyčnicou kružnice k_2; k tomu stačí vysvetliť, prečo sú zhodné uhly SKZ a KLZ, vyznačené na obr. 22 oblúčikmi. Okrem toho však musíme zdôvodniť, prečo body L a S vždy ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB (ako je to aj na našom obrázku).

Stred V kružnice vpísanej je vždy vnútorným bodom trojuholníka ABC, lebo je priesečníkom osí jeho vnútorných uhlov. Preto je bod V vnútorným bodom úsečky CK, zatiaľ čo bod L leží na jej predĺžení za bod K. Body V a L preto ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB. Keď označíme ako zvyčajne α, β, γ veľkosti



Obr. 22

vnútorných uhlov trojuholníka ABC, má trojuholník BCV pri vrcholoch B a C vnútorné uhly veľkostí $\beta/2$ a $\gamma/2$, takže pre jeho vonkajší uhol pri vrchole V platí

$$|\sphericalangle BVK| = \frac{\beta+\gamma}{2} < 90^\circ.$$

Uhol BVK je teda ostrý, a preto stred S kružnice k_1 leží v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou BK ako bod V, čo spolu s predchádzajúcim tvrdením o polohe bodov V a L znamená, že body L a S naozaj ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou AB, čo sme potrebovali overiť. Podľa vety o obvodových a stredových uhloch v kružnici k_1 platí

$$|\sphericalangle BSK| = 2|\sphericalangle BVK| = \beta+\gamma,$$

z rovnoramenného trojuholníka BKS teda vyplýva

$$|\sphericalangle SKZ| = |\sphericalangle SKB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle BSK|) = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Zostáva nám preto dokázať, že aj uhol KLZ má veľkosť $\alpha/2$. Urobíme to dvoma nezávislými spôsobmi.

Pri prvom z nich najskôr určíme veľkosť uhla LBV. Pretože $|\sphericalangle LBA| = |\sphericalangle LCA| = \gamma/2$ (obvodové uhly v kružnici k) a $|\sphericalangle ABV| = \beta/2$, vzhľadom na vzájomnú polohu úsečiek LV a AB môžeme písať

$$|\sphericalangle LBV| = |\sphericalangle LBA| + |\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}(\beta+\gamma).$$

Už skôr sme zistili, že takú veľkosť má aj uhol BVK (čiže uhol BVL), a tak je trojuholník BVL rovnoramenný s ramenami BL a VL. Súčasne však platí $|BS| = |VS|$, takže oba body L a S ležia na osi úsečky BV (štvoruholník $BLVS$ je teda deltoid, prípadne kosoštvorec alebo štvorec). Odtiaľ vyplýva, že úsečky BV a SL sú navzájom kolmé, uhol KLZ je preto doplnkový k uhlu BVK, t. j.

$$|\sphericalangle KLZ| = 90^\circ - |\sphericalangle BVK| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Pri druhom spôsobe určenia veľkosti uhla KLZ si najskôr všimneme, že platí $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (obvodové uhly v kružnici k), čo spolu so skôr odvodenou rovnosťou $|\sphericalangle BSK| = \beta + \gamma$ znamená, že v štvoruholníku $BLKS$ je súčet vnútorných uhlov pri protiľahlých vrcholoch L a S rovný 180°, jedná sa preto o štvoruholník, ktorému sa dá opísať kružnica. V nej sú KBS a KLS zhodné obvodové uhly nad tetivou KS, a preto platí

$$|\sphericalangle KLZ| = |\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle KBS| = \tfrac{1}{2}\alpha$$

(pripomíname, že BKS je rovnoramenný trojuholník s uhlami $\alpha/2$ pri základni BK).

A – I – 4

Pretože daná sústava je veľmi zložitá a zrejme neexistuje postup, ako v konečnom algebraickom tvare vyjadriť všetky jej riešenia, budeme jednak premýšľať o podmienkach riešiteľnosti tejto sústavy, jednak hľadať niektoré jej špeciálne riešenia.

Všimnime si najskôr, že daná sústava nemá žiadne riešenie pre hodnotu $p = 0$, pretože hodnoty ľavých strán rovníc sú kladné čísla. Tiež druhé zistenie, ktoré teraz uvedieme, je zrejmé: n-tica čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je riešením danej sústavy s hodnotou parametra p práve vtedy, keď n-tica opačných čísel $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ je riešením danej sústavy s opačnou hodnotou parametra $-p$. Hodnoty ľavých aj pravých strán všetkých rovníc sústavy sa totiž pri zmene všetkých hodnôt $x_i \mapsto -x_i$ a $p \mapsto -p$ nezmenia, pretože pre ľubovoľné $x \neq 0$ a p platí

$$(-x)^4 + \frac{2}{(-x)^2} = x^4 + \frac{2}{x^2} \quad \text{a} \quad (-p)(-x) = px.$$

Daná sústava s hodnotou parametra p má teda práve toľko riešení, koľko ich má daná sústava s hodnotou parametra $-p$. Budeme preto hľadať iba všetky kladné čísla p, pre ktoré má daná sústava aspoň dve riešenia (a v odpovedi k nim pripojíme všetky opačné čísla $-p$.)

Až po záver riešenia budeme teda uvažovať iba kladné hodnoty parametra p danej sústavy. Z kladnosti jej ľavých strán vyplýva, že aj všetky pravé strany px_i musia byť kladné, a preto (vzhľadom na predpoklad $p > 0$) musí platiť $x_i > 0$ pre každé i. Ľubovoľné riešenie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ danej sústavy je teda zostavené z n kladných čísel.

Predpokladajme teraz, že pre dané $p > 0$ nejaké riešenie $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ danej sústavy existuje a všetkých n rovníc medzi sebou vynásobme. Pre kladné čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tak dostaneme rovnosť

$$\left(x_1^4 + \frac{2}{x_1^2}\right)\left(x_2^4 + \frac{2}{x_2^2}\right)\ldots\left(x_n^4 + \frac{2}{x_n^2}\right) = p^n x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{1}$$

Každý činiteľ na ľavej strane odhadneme zdola podľa známej nerovnosti

$$u + v \geqq 2\sqrt{uv},$$

ktorá platí pre ľubovoľné kladné čísla u a v, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $u = v$ (je to v podstate nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom čísel u a v, vyplývajúca jednoducho zo zrejmej nerovnosti $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geqq 0$). Preto pre každý index i platí

$$x_i^4 + \frac{2}{x_i^2} \geqq 2\sqrt{x_i^4 \cdot \frac{2}{x_i^2}} = |x_i| \cdot 2\sqrt{2} = x_i \cdot 2\sqrt{2}. \tag{2}$$

Dôsledkom rovnosti (1) je teda nerovnosť

$$\bigl(x_1 2\sqrt{2}\bigr)\bigl(x_2 2\sqrt{2}\bigr) \ldots \bigl(x_n 2\sqrt{2}\bigr) \leqq p^n x_1 x_2 \ldots x_n, \tag{3}$$

z ktorej po krátení (kladným) súčinom $x_1 x_2 \ldots x_n$ dostaneme podmienku na číslo p v tvare

$$p^n \geqq (2\sqrt{2})^n, \quad \text{čiže} \quad p \geqq 2\sqrt{2}.$$

Sformulujme, čo sme práve zistili. Ak má daná sústava pre pevné $p > 0$ aspoň jedno riešenie, tak pre toto číslo p platí odhad $p \geqq 2\sqrt{2}$.

Pre „krajnú“ hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ teraz danú sústavu úplne vyriešime, t. j. nájdeme všetky jej riešenia. Ak $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je ľubovoľné riešenie danej sústavy s hodnotou $p = 2\sqrt{2}$, tak podľa úvah z predchádzajúceho odstavca nastane v nerovnosti (3) rovnosť, čo je možné jedine tak, že rovnosti nastanú vo všetkých násobených nerovnostiach (2). Preto vtedy pre každý index i platí

$$x_i^4 = \frac{2}{x_i^2}, \quad \text{neboli} \quad x_i^6 = 2, \quad \text{t. j.} \quad x_i = \sqrt[6]{2}.$$

Pre hodnotu $p = 2\sqrt{2}$ má teda daná sústava jediné (!) riešenie

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigl(\sqrt[6]{2}, \sqrt[6]{2}, \ldots, \sqrt[6]{2}\bigr).$$

Z výsledkov predchádzajúcich dvoch odstavcov vyplýva, že ak má daná sústava pre pevné $p > 0$ aspoň dve riešenia, tak pre toto číslo p platí ostrá nerovnosť $p > 2\sqrt{2}$. Ak teda nájdeme dve riešenia danej sústavy s ľubovoľnou hodnotou parametra $p > 2\sqrt{2}$, budeme poznať odpoveď na otázku zo zadania úlohy. Spomenuté dve riešenia budeme hľadať medzi n-ticami $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zloženými z n rovnakých čísel; taká n-tica $(x, x, \ldots, x)$ je zrejme riešením danej sústavy práve vtedy, keď je číslo x riešením (jedinej) rovnice

$$x^4 + \frac{2}{x^2} = px, \quad \text{čiže} \quad x^6 - px^3 + 2 = 0.$$

Posledná rovnica je kvadratická vzhľadom na neznámu $y = x^3$ a má v obore reálnych čísel y dve rôzne riešenia

$$y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 8}}{2}$$

pre každú z nami uvažovaných hodnôt $p > 2\sqrt{2}$, lebo pre ne platí $p^2 - 8 > 0$. Pre každé také p má teda pôvodná sústava dve riešenia

$$(x_1, \dots, x_n) = (\sqrt[3]{y_1}, \dots, \sqrt[3]{y_1}) \quad \text{a} \quad (x_1, \dots, x_n) = (\sqrt[3]{y_2}, \dots, \sqrt[3]{y_2}).$$

(Nevylučujeme, že okrem týchto riešení vtedy existujú aj riešenia iné, totiž také, že $x_i \neq x_j$ pre niektoré $i \neq j$.)

Odpoveď. Všetky hľadané hodnoty p tvoria množinu $\bigl(-\infty; -2\sqrt{2}\bigr) \cup \bigl(2\sqrt{2}; \infty\bigr)$.

A – I – 5

Dvoma odlišnými spôsobmi ukážeme, že vyhovujúce mnohočleny sú práve mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a a d sú ľubovoľné reálne čísla. Pri prvom spôsobe použijeme metódu, ktorá je užitočná aj pri riešení mnohých iných úloh o mnohočlenoch; nazýva sa „metóda neurčitých koeficientov". Ako zvyčajne budeme členy mnohočlenov zapisovať v zostupnom poradí podľa mocnín premennej x; pomocou prvých koeficientov hľadaného mnohočlena

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots \tag{1}$$

vyjadríme prvé koeficienty oboch strán danej rovnice a potom ich porovnáme. Zápisom (1) sme naznačili, že budeme skutočne počítať s prvými štyrmi koeficientami mnohočlena $P(x)$. Ukáže sa totiž, že výpočty s menším počtom koeficientov k vyriešeniu úlohy nestačia. Aby sme pre mnohočleny stupňa najviac 3 nemuseli robiť ďalšie samostatné výpočty, nebudeme zatiaľ predpokladať, že koeficient a pri mocnine x^n v zápise (1) je nenulový.

Nájdeme najskôr prvé členy mnohočlena $P(x-1)$.

$$\begin{aligned} P(x-1) &= a(x-1)^n + b(x-1)^{n-1} + c(x-1)^{n-2} + d(x-1)^{n-3} + \dots = \\ &= a\bigl(x^n - \tbinom{n}{1}x^{n-1} + \tbinom{n}{2}x^{n-2} - \tbinom{n}{3}x^{n-3} + \dots\bigr) + \\ &\quad + b\bigl(x^{n-1} - \tbinom{n-1}{1}x^{n-2} + \tbinom{n-1}{2}x^{n-3} - \dots\bigr) + \\ &\quad + c\bigl(x^{n-2} - \tbinom{n-2}{1}x^{n-3} + \dots\bigr) + d\bigl(x^{n-3} - \dots\bigr) + \dots = \\ &= ax^n + \bigl[-\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a - \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\ &\quad + \bigl[-\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b - \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Podobným výpočtom zistíme, že

$$\begin{aligned} P(x+1) = ax^n &+ \bigl[\tbinom{n}{1}a + b\bigr]x^{n-1} + \bigl[\tbinom{n}{2}a + \tbinom{n-1}{1}b + c\bigr]x^{n-2} + \\ &+ \bigl[\tbinom{n}{3}a + \tbinom{n-1}{2}b + \tbinom{n-2}{1}c + d\bigr]x^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Teraz môžeme určiť prvé členy mnohočlena $(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1)$, totiž členy s mocninami x^{n+1}, x^n, x^{n-1} a x^{n-2} (vypísali sme ich dopredu, aby sme pri nasledujúcom výpočte zbytočne nevypisovali členy s nižšími mocninami x).

$$\begin{aligned}
&(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1)= \\
&= xP(x-1)+P(x-1)+xP(x+1)-P(x+1)= \\
&= ax^{n+1}+\left[-\tbinom{n}{1}a+b\right]x^n+\left[\tbinom{n}{2}a-\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-1}+ \\
&\quad+\left[-\tbinom{n}{3}a+\tbinom{n-1}{2}b-\tbinom{n-2}{1}c+d\right]x^{n-2}+\ldots+ \\
&\quad+ax^n+\left[-\tbinom{n}{1}a+b\right]x^{n-1}+\left[\tbinom{n}{2}a-\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-2}+\ldots+ \\
&\quad+ax^{n+1}+\left[\tbinom{n}{1}a+b\right]x^n+\left[\tbinom{n}{2}a+\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-1}+ \\
&\quad+\left[\tbinom{n}{3}a+\tbinom{n-1}{2}b+\tbinom{n-2}{1}c+d\right]x^{n-2}+\ldots- \\
&\quad-ax^n-\left[\tbinom{n}{1}a+b\right]x^{n-1}-\left[\tbinom{n}{2}a+\tbinom{n-1}{1}b+c\right]x^{n-2}-\ldots= \\
&= 2ax^{n+1}+2bx^n+\left[2\tbinom{n}{2}a-2\tbinom{n}{1}a+2c\right]x^{n-1}+ \\
&\quad+\left[2\tbinom{n-1}{2}b-2\tbinom{n-1}{1}b+2d\right]x^{n-2}+\ldots
\end{aligned}$$

Našli sme prvé členy ľavej strany danej rovnice. Vypísať prvé členy jej pravej strany je ľahké.

$$2xP(x)=2ax^{n+1}+2bx^n+2cx^{n-1}+2dx^{n-2}+\ldots.$$

Vidíme, že prvé dva členy ľavej strany sa zhodujú s prvými dvoma členmi pravej strany, nech je mnohočlen $P(x)$ vybraný akokoľvek. Tretie a štvrté členy sa už vo všeobecnosti nezhodujú a ich rovnosti sú vyjadrené podmienkami

$$2\binom{n}{2}a-2\binom{n}{1}a+2c=2c \quad \text{a} \quad 2\binom{n-1}{2}b-2\binom{n-1}{1}b+2d=2d,$$

z ktorých po rozpísaní kombinačných čísel dostaneme rovnice tvaru $n(n-3)a=0$ a $(n-1)(n-4)b=0$. (Všimnime si, že rovnica pre koeficient b sa líši od rovnice pre koeficient a iba tým, že je v nej číslo n nahradené číslom $n-1$. Koeficient b totiž prevezme rolu „vedúceho“ koeficientu a, keď v zápise (1) vynecháme prvý člen súčtu (čím znížime stupeň n o jedna)). V prípade $n>3$ teda musí platiť $a=0$, čo znamená, že sa môžeme obmedziť len na prípad $n=3$. Vtedy je prvá rovnica splnená pre každé $a\in\mathbb{R}$, zatiaľ čo z druhej rovnice vyplýva $b=0$. Hľadaný mnohočlen $P(x)$ má preto nutne tvar

$$P(x)=ax^3+cx+d \tag{2}$$

a po dosadení ľubovoľného takého mnohočlena do oboch strán danej rovnice dostaneme dva mnohočleny, ktoré sa zhodujú v prvých členoch s mocninami x^4, x^3, x^2 a x^1. Zostáva teda porovnať posledné (absolútne) členy oboch mnohočlenov

$$(x+1)P(x-1)+(x-1)P(x+1) \quad \text{a} \quad 2xP(x).$$

Namiesto algebraického výpočtu využijeme zvyčajný postup, ktorý je založený na tomto zrejmom tvrdení: Absolútny člen mnohočlena p je jeho hodnota $p(0)$ v bode 0. V našom prípade preto zistíme, kedy platí rovnosť $P(-1)-P(1)=0\cdot P(0)$, teda podľa (2)

$$(-a-c+d)-(a+c+d)=0.$$

Je to zrejme práve vtedy, keď $c = -a$. Preto sú riešeniami úlohy práve mnohočleny tvaru $P(x) = ax^3 - ax + d$, kde a, d sú ľubovoľné reálne čísla.

Iné riešenie. Využijeme postup, ktorý sa používa pri riešení funkcionálnych rovníc. Získavame pri ňom významné informácie o neznámych funkciách tak, že do rovníc, ktoré hľadané funkcie spĺňajú, opakovane dosadzujeme vhodne vybrané hodnoty premenných. (To sme vlastne urobili aj v závere „algebraického“ riešenia, keď na určenie absolútneho člena sme do mnohočlena dosadili hodnotu $x = 0$.) Nech je teda P ľubovoľný mnohočlen spĺňajúci v premennej $x \in \mathbb{R}$ danú rovnicu. Keď do nej dosadíme najskôr hodnotu $x = 1$ a potom hodnotu $x = -1$, dostaneme rovnosti

$$2 \cdot P(0) + 0 \cdot P(2) = 2 \cdot P(1) \quad \text{a} \quad 0 \cdot P(-2) - 2 \cdot P(0) = -2 \cdot P(-1),$$

z ktorých vyplýva, že $P(1) = P(0) = P(-1)$. Preto ak označíme $P(0) = d$, má rovnica $P(x) = d$ korene $x = 0$, $x = 1$ a $x = -1$. Existuje teda mnohočlen $Q(x)$ taký, že $P(x) = x(x-1)(x+1)Q(x) + d$. Toto vyjadrenie dosadíme do danej rovnice, aby sme zistili, aké podmienky musí spĺňať mnohočlen $Q(x)$ a koeficient d.

$$\begin{aligned}(x+1)x(x-1)(x-2)Q(x-1) + d(x+1) &+ \\ +(x-1)(x+1)x(x+2)Q(x+1) + d(x-1) &= \\ = 2x^2(x-1)(x+1)Q(x) + 2dx&.\end{aligned}$$

Členy s koeficientom d sa v poslednej rovnici navzájom eliminujú a zvyšné členy možno vykrátiť spoločným činiteľom $x(x-1)(x+1)$. Získame tak rovnicu

$$(x-2)Q(x-1) + (x+2)Q(x+1) = 2xQ(x) \tag{3}$$

pre neznámy mnohočlen $Q(x)$. Zo spôsobu odvodenia vyplýva, že rovnica (3) platí pre každé $x \in \mathbb{R}$, ktoré sú rôzne od 0, 1 a -1; pretože však obe strany (3) sú mnohočleny premennej x, ktoré majú rovnakú hodnotu pre nekonečne veľa čísel x, musia to byť mnohočleny totožné, a preto rovnosť (3) platí aj pre $x \in \{0, 1, -1\}$.

Pretože $a(x-2) + a(x+2) = 2ax$, rovnicu (3) spĺňa každý konštantný mnohočlen $Q(x) = a$. Pôvodnej rovnici preto vyhovuje každý mnohočlen

$$P(x) = x(x-1)(x+1)a + d = ax^3 - ax + d \quad (a, d \in \mathbb{R}).$$

Iné vyhovujúce mnohočleny $P(x)$ neexistujú, ak ukážeme, že každý mnohočlen $Q(x)$ spĺňajúci rovnicu (3) je konštantný. Nech je teda $Q(x)$ ľubovoľný taký mnohočlen; označme $Q(2) = a$ a dosaďme do rovnice (3) hodnotu $x = 2$. Dostaneme

$$0 \cdot Q(1) + 4Q(3) = 4Q(2), \quad \text{odkiaľ} \quad Q(3) = Q(2) = a.$$

Teraz voľbou $x = 3$ v rovnici (3) získame rovnosť

$$Q(2) + 5Q(4) = 6Q(3), \quad \text{odkiaľ} \quad Q(4) = \frac{6Q(3) - Q(2)}{5} = \frac{6a - a}{5} = a.$$

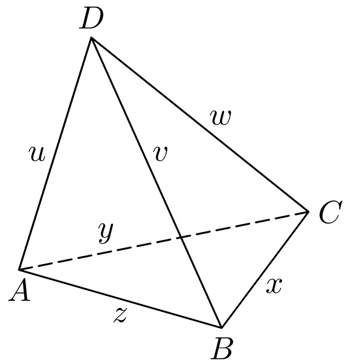
Ďalej voľbou $x = 4$ zistíme, že $Q(5) = a$, atď. Dokážme preto indukciou, že $Q(n) = a$ pre každé celé $n \geqq 2$. Ak pre nejaké n platia rovnosti $Q(n) = Q(n+1) = a$ (tak ako pre $n = 2$), tak voľbou $x = n+1$ v rovnici (3) dostaneme

$$Q(n+2) = \frac{2(n+1)Q(n+1) - (n-1)Q(n)}{n+3} = \\ = \frac{2(n+1)a - (n-1)a}{n+3} = a.$$

Dôkaz indukciou je hotový. Zistili sme, že rovnosť $Q(x) = a$ platí pre nekonečne veľa čísel x, čo je možné jedine vtedy, keď $Q(x) = a$ pre každé x (keby bol Q mnohočlen nejakého stupňa $N > 0$, mala by rovnica $Q(x) = a$ najviac N koreňov). Celé riešenie je tým ukončené.

A – I – 6

V prvej (podstatnejšej) časti riešenia nájdeme všetky štvorsteny, ktoré majú sieť tvaru deltoidu; potom už pomerne jednoducho zistíme, ktoré z nájdených štvorstenov majú práve štyri zhodné hrany.

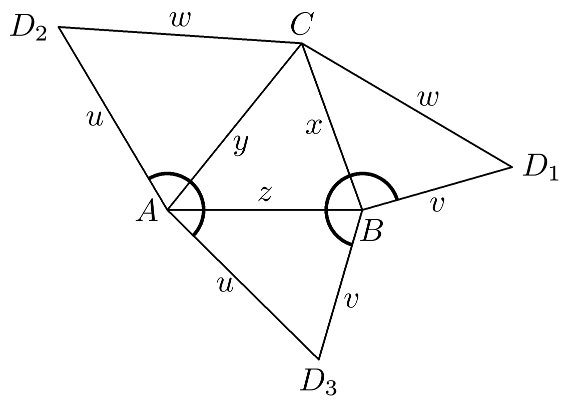


Obr. 23

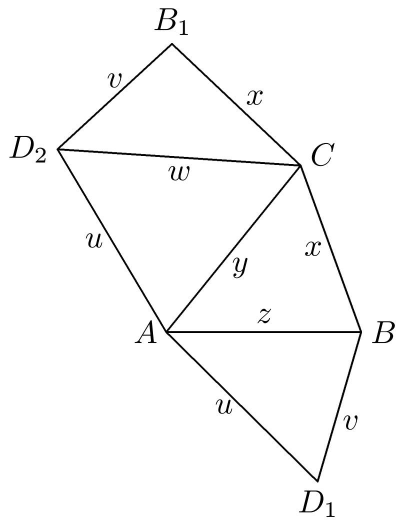
Uvažujme preto ľubovoľný štvorsten $ABCD$ a označme dĺžky jeho hrán písmenami x, y, z, u, v, w podľa obr. 23. Všetky siete štvorstenu $ABCD$ rozdelíme do dvoch skupín. Do prvej z nich zaradíme tie siete, v ktorých niektorá stena štvorstena susedí s tromi ostatnými stenami; do druhej skupiny budú patriť ostatné siete, v ktorých každá stena susedí najviac s dvoma stenami. Pretože sme označenie vrcholov štvorstenu dopredu nijak neupresnili, budeme ďalej uvažovať len po jednej sieti z každej z oboch skupín, teda siete znázornené na obr. 24 a 25. Zaoberajme sa každou z nich samostatne.

Sieť na obr. 24 je (vo všeobecnosti) šesťuholníkom $AD_3BD_1CD_2$, štvoruholník to bude len vtedy, keď dva z jeho uhlov pri vrcholoch A, B, C budú priame (t. j. budú mať veľkosť 180°). Je totiž jasné, že priamy uhol nemôže byť pri žiadnom z vrcholov D_1, D_2, D_3. Vzhľadom na už spomenutú všeobecnosť označenia predpokladajme, že priame sú uhly D_2AD_3 a D_3BD_1 (vyznačené na obr. 24). Naša sieť je teda štvoruholníkom $D_2D_3D_1C$, ktorého strany majú (v poradí, v akom za sebou cyklicky nasledujú) dĺžky $2u$, $2v$, w a w. Ak je tento štvoruholník deltoid (a nie kosoštvorec), musí zrejme platiť $u = v$ a $2u \neq w$ (obr. 26a). Z osovej súmernosti podľa priamky D_3C potom zisťujeme, že platí $y = x$; štvorsten s „deltoidnou“ sieťou z obr. 26a vidno na obr. 26b. Je to štvorsten súmerný podľa roviny súmernosti hrany AB. Dodajme, že okrem nerovnosti $2u \neq w$ musí platiť rovnako nerovnosť $z < w$, ktorá vyplýva z vlastnosti strednej priečky AB trojuholníka $D_1D_2D_3$ a trojuholníkovej nerovnosti pre rovnoramenný trojuholník CD_1D_2:

$$2z = 2|AB| = |D_1D_2| < |D_1C| + |D_2C| = 2w.$$



Obr. 24



Obr. 25

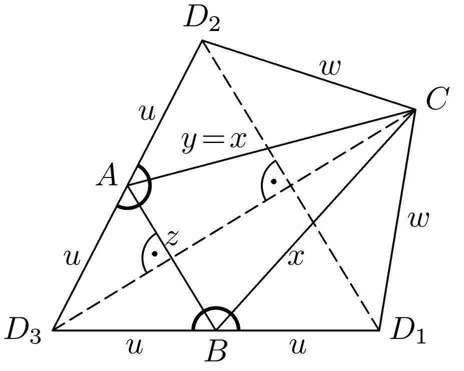
Sieť z obr. 25 je (vo všeobecnosti) šesťuholníkom $AD_1BCB_1D_2$, štvoruholníkom bude len v tých prípadoch, keď práve dva z jeho uhlov pri vrcholoch A, B, C, D_2 budú priame (také totiž nemôžu byť uhly pri vrcholoch D_1 a B_1). Vzhľadom na všeobecnosť označenia stačí uvažovať len tri nasledujúce prípady.

a) *Priame uhly pri vrcholoch A a D_2.* Sieť je štvoruholník B_1D_1BC, ktorého strany majú v poradí dĺžky $2u + v$, v, x, x. Zrejme sa nejedná o deltoid, lebo $2u + v \neq v$.

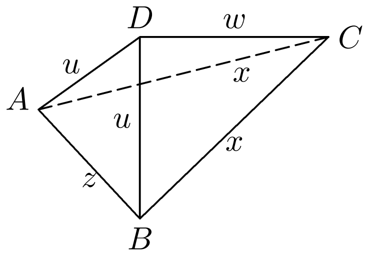
b) *Priame uhly pri vrcholoch A a C.* Sieť je štvoruholník $D_2D_1BB_1$, ktorého strany majú v poradí dĺžky $2u$, v, $2x$, v. Pretože dvojica protiľahlých strán má rovnakú dĺžku v, nejedná sa o deltoid.

c) *Priame uhly pri vrcholoch A a B.* Sieť je štvoruholník $D_2D_1CB_1$, ktorého strany majú v poradí dĺžky $2u$, $x + v$, x, v. Ak je to deltoid, vzhľadom na nerovnosť $x + v > x$ musí platiť $2u = x + v$ a $x = v$, teda $x = u = v$. V trojuholníku D_2D_1C je úsečka AB strednou priečkou (obr. 27a), takže platí $w = |D_2C| = 2|AB| = 2z$. Príslušný štvorsten vidno na obr. 27b.

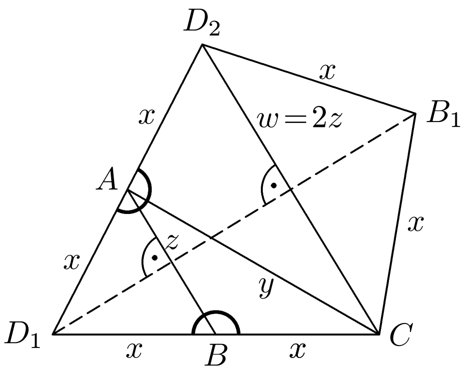
Zhrňme výsledky našich doterajších úvah. Iba dva typy štvorstenov (obr. 26b a 27b) majú sieť tvaru deltoidu. Našou úlohou je teraz zistiť, kedy tieto štvorsteny majú práve štyri zhodné hrany (danej dĺžky a). Zaoberajme sa najskôr štvorstenom z obr. 26b, ktorého hrany majú dĺžky x, x, z, u, u, w. Predpokladajme teda, že práve štyri z nich



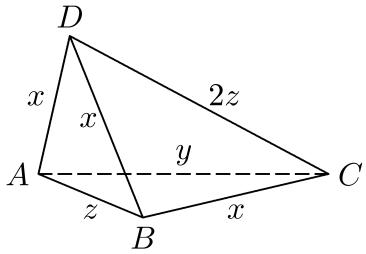
Obr. 26a



Obr. 26b



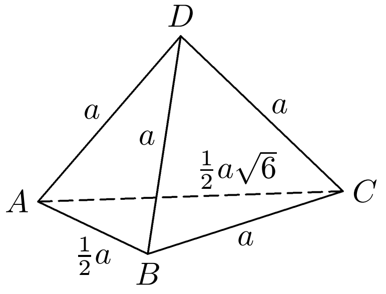
Obr. 27a



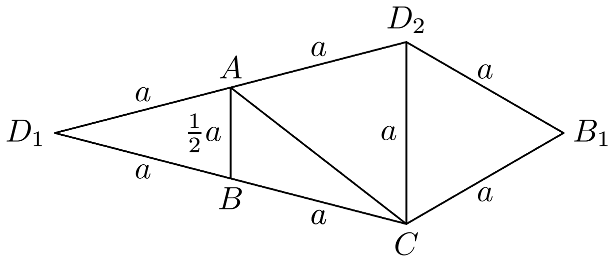
Obr. 27b

sú rovné a. Ktoré to sú? Určite $x = a$, inak by muselo platiť $a = z = u = w$, čo je ale v spore s nerovnosťou $z < w$, ktorú sme odvodili skôr. Pretože sú vylúčené aj rovnosti $z = u$ a $u = w$ (v oboch prípadoch by dĺžku a malo päť hrán štvorstena $ABCD$), musí platiť $u = a$. V prípade $x = u$ je však štvoruholník AD_3BC kosoštvorec; z rovnobežnosti priamok AC a D_3B vyplýva rovnosť súhlasných uhlov CAD_2 a BD_3A. Rovnoramenné trojuholníky CAD_2 a BD_3A sú vtedy zhodné podľa vety sus, takže $|D_2C| = |AB|$, čiže $z = w$, čo je opäť spor. (V prípade $w = z$ má „deltoidná“ sieť z obr. 26a priamy uhol pri vrchole C, takže sa nejedná o deltoid, ale o trojuholník.) Žiadny štvorsten z obr. 26b preto nie je riešením našej úlohy. Prejdime teraz k druhému typu štvorstenov a predpokladajme, že práve štyri z hrán niektorého štvorstena $ABCD$ z obr. 27b majú dĺžku a. Pretože tri jeho hrany majú dĺžku x, musí platiť $x = a$. Ktorá (jediná) z ostatných dĺžok y, z, $2z$ je rovná a? V sieti na obr. 27a z trojuholníka B_1CD_2 vyplýva $x + x > 2z$, teda $x > z$. V rovnakej sieti má trojuholník ABC tupý vnútorný uhol pri vrchole B, lebo jeho vonkajší uhol ABD_1 je vnútorným uhlom pri základni AB rovnoramenného trojuholníka ABD_1, takže je nutne ostrý. Preto je najdlhšou stranou trojuholníka ABC strana AC, čo zapíšeme $y > \max\{x, z\}$. Spolu dostávame $y > x > > z$, s ohľadom na rovnosť $x = a$ preto zostáva iba možnosť $2z = a$. Nájdenými podmienkami je už štvorsten $ABCD$ jednoznačne (až na zhodnosť) určený. Dĺžku y

poslednej hrany AC vypočítame ako ťažnicu na stranu D_1D_2 trojuholníka CD_1D_2 so stranami $2a$, $2a$, a. Vyjde nám $y = a\sqrt{6}/2$. Riešením našej úlohy je jediný štvorsten z obr. 28a, jeho sieť tvaru deltoidu je na obr. 28b.



Obr. 28a



Obr. 28b

Odpoveď. Hľadaný štvorsten je jediný. Jeho tri hrany dĺžky a vychádzajú z jedného vrcholu, hrany protiľahlej steny majú dĺžky a, $a/2$, $a\sqrt{6}/2$. Jedna zo sietí tohto štvorstenu má tvar deltoidu so stranami a, a, $2a$, $2a$.

A – S – 1

Podľa zvyšku po delení čísla x číslom 5 môžeme rozlíšiť päť prípadov: (i) $x = 5k$, (ii) $x = 5k + 1$, (iii) $x = 5k + 2$, (iv) $x = 5k + 3$ a (v) $x = 5k + 4$ (k je ľubovoľné celé číslo). Pretože ale ľavá strana rovnice je zrejme násobkom piatich pre každé celé x, musí byť násobkom piatich aspoň jeden z činiteľov $3x - 2$, $x + 2$ pravej strany. Číslo $3x - 2$ je deliteľné piatimi iba pre $x = 5k + 4$, číslo $x + 2$ iba pre $x = 5k + 3$. Preto stačí rozobrať prípady (iv) a (v) (L označuje ľavú a P pravú stranu danej rovnice).

(iv) Pre $x = 5k+3$ platí $x^2 = 25k^2 + 30k + 9$, $(x^2)_5 = 25k^2 + 30k + 10$, $3x = 15k+9$, $(3x)_5 = 15k+10$, $L = 75k^2 + 105k + 40$ a $P = 75k^2 + 110k + 35$, takže z $L = P$ vychádza $k = 1$, čomu odpovedá $x = 5 + 3 = 8$.

(v) Pre $x = 5k+4$ platí $x^2 = 25k^2 + 40k + 16$, $(x^2)_5 = 25k^2 + 40k + 15$, $3x = 15k+12$, $(3x)_5 = 15k+10$, $L = 75k^2 + 135k + 55$ a $P = 75k^2 + 140k + 60$, takže z $L = P$ vychádza $k = -1$, čomu odpovedá $x = -5 + 4 = -1$.

Odpoveď. Daná rovnica má práve dve celočíselné riešenia, a to $x = -1$ a $x = 8$.

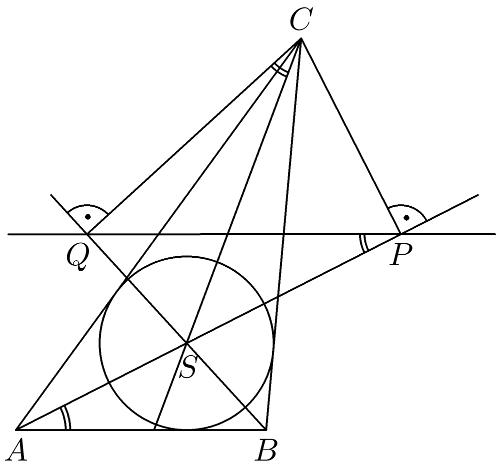
A – S – 2

Označme ako obyčajne α, β, γ vnútorné uhly trojuholníka ABC. Pretože platí (obr. 29)

$$|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle SCA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

je uhol ASC tupý, takže bod P leží na polpriamke opačnej k polpriamke SA. Podobne zdôvodníme, že bod Q leží na polpriamke opačnej k polpriamke SB. Priamky AB a PQ

sú rovnobežné práve vtedy, keď striedavé uhly BAP a APQ sú zhodné. Vzhľadom na



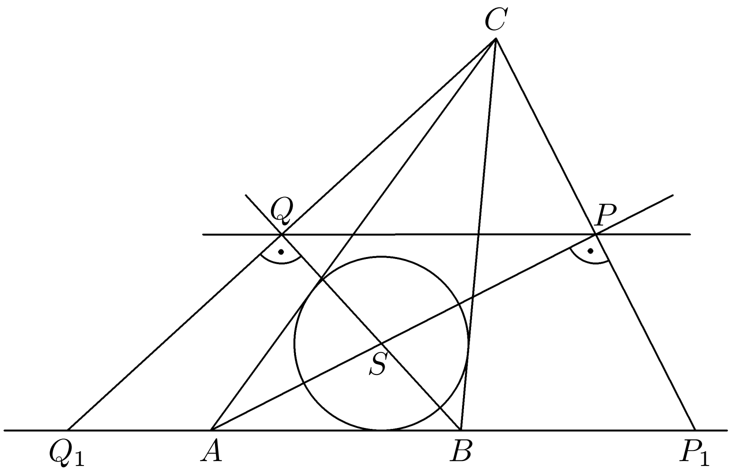
Obr. 29

to, že $|\sphericalangle BAP| = \alpha/2$ a $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle SPQ|$, stačí ukázať, že $|\sphericalangle SPQ| = \alpha/2$. Pretože body P a Q ležia na Tálesovej kružnici nad priemerom CS, je uhol SPQ zhodný s uhlom SCQ (obvodové uhly nad tetivou SQ spomenutej kružnice). Veľkosť uhla SCQ ľahko vyjadríme z trojuholníkov BCS a BCQ.

$$|\sphericalangle SCQ| = |\sphericalangle BCQ| - |\sphericalangle BCS| = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

čo sme potrebovali ukázať.

Iné riešenie. Označme P_1, Q_1 zodpovedajúce priesečníky polpriamok CP a CQ s priamkou AB (obr. 30, poradie bodov A, S, P a bodov B, S, Q na oboch osiach bolo vysvetlené v prvom riešení). Výška AP trojuholníka P_1CA leží na osi AS jeho vnútorného uhla P_1AC, takže ide o rovnoramenný trojuholník, ktorý má základňu P_1C so stredom P. Podobne pomocou rovnoramenného trojuholníka Q_1CB zdôvodníme, že bod Q je stredom úsečky Q_1C. Úsečka PQ je teda strednou priečkou trojuholníka P_1Q_1C, takže je rovnobežná s priamkou AB.



Obr. 30

A – S – 3

Všimnime si, že rovnice danej sústavy sa medzi sebou líšia len cyklickou zámenou neznámych x, y a z. Ak je teda riešením sústavy trojica čísel $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0)$, sú riešením aj trojice $(x,y,z) = (y_0, z_0, x_0)$ a $(x,y,z) = (z_0, x_0, y_0)$. Ak je riešenie sústavy (pri pevnom p) jediné, musia byť uvedené trojice zhodné, musí teda platiť $x_0 = y_0 = z_0$. Trojica (x_0, x_0, x_0) je zrejme riešením danej sústavy práve vtedy, keď je číslo $x = x_0$ riešením rovnice $x^2 + 1 = 2px$. Pre každé hľadané p preto musí mať ostatná rovnica jediné riešenie, takže jej diskriminant $D = 4p^2 - 4$ musí byť nulový. Odtiaľ máme nutne $p = \pm 1$.

Teraz ukážeme, že pre $p = 1$ je $x = y = z = 1$ skutočne jediné riešenie pôvodnej sústavy troch rovníc a že to isté platí aj v prípade $p = -1$ o jej riešení $x = y = z = -1$. Keď porovnáme súčet ľavých strán so súčtom pravých strán sústavy, zistíme, že jej ľubovoľné riešenie (x,y,z) spĺňa aj rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 2p(x + y + z),$$

z ktorej úpravou dostaneme

$$(x-p)^2 + (y-p)^2 + (z-p)^2 = 3(p^2 - 1). \tag{1}$$

Pre obe hodnoty $p = \pm 1$ však platí $p^2 - 1 = 0$, takže vtedy sa súčet nezáporných čísel $(x-p)^2$, $(y-p)^2$ a $(z-p)^2$ rovná nule. To je možné len vtedy, keď $x = y = z = p$.

Odpoveď. Hľadané hodnoty p sú dve, $p = 1$ a $p = -1$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení získame sčítaním troch daných rovníc rovnicu (1). Z nej vyplýva tento záver: Ak má sústava pri danom p aspoň jedno riešenie (x, y, z) v obore reálnych čísel, tak platí nerovnosť $p^2 \geqq 1$, čiže $|p| \geqq 1$. Ak ale $|p| > 1$, môžeme ľahko vypísať dve rôzne riešenia skúmanej sústavy, totiž trojice (x_1, x_1, x_1) a (x_2, x_2, x_2), kde $x_{1,2}$ sú korene rovnice $x^2 + 1 = 2px$ (ktorej diskriminant je vďaka predpokladu $|p| > 1$ kladný). Preto nám zostáva posúdiť iba hodnoty $p = \pm 1$, pre ktoré však z rovnice (1) okamžite vyplýva, že ak má pôvodná sústava vôbec nejaké riešenie, je ním trojica $(x, y, z) = (p, p, p)$. Triviálna skúška dosadením ukazuje, že je to naozaj riešenie (pre $p = 1$ aj pre $p = -1$).

A – II – 1

Pretože pre ľubovoľné $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2)$ platí

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \leqq \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}, \tag{1}$$

stačí namiesto nerovnosti zo zadania úlohy dokázať nerovnosť

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}. \tag{2}$$

To je ale jednoduché, lebo po prevedení odmocniny z pravej strany na ľavú dostaneme po úprave „na štvorec“ zrejmú nerovnosť

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\cos\beta}}\right)^2 \geqq 0. \tag{2'}$$

Tým je celý dôkaz hotový. Dodajme, že nerovnosť (2) tiež vyplýva z nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (kladných) čísel $1/\cos\alpha$ a $1/\cos\beta$.

Rovnosť v dokázanej nerovnosti nastane práve vtedy, keď nastanú rovnosti v oboch nerovnostiach (1) a (2'). To možno zrejme vyjadriť podmienkami

$$\sin(\alpha+\beta) = 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\beta},$$

ktoré sú pre nejaké $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2)$ splnené práve vtedy, keď $\alpha + \beta = \pi/2$ a $\alpha = \beta$, čiže $\alpha = \beta = \pi/4$.

A – II – 2

Pretože číslo x je deliteľom oboch čísel $n(x, y)$ a x^2, vyplýva z danej rovnice, že číslo x delí aj číslo $4y$. Číslo $4y$ je teda spoločný násobok čísel x a y, takže ich najmenší spoločný násobok $n(x, y)$ je deliteľom čísla $4y$ (a zároveň násobkom čísla y). Číslo $n(x, y)$ je teda rovné jednému z čísel y, $2y$ alebo $4y$. Tieto tri prípady, ktoré sa pre prirodzené y navzájom vylučujú, teraz posúdime oddelene.

(i) $n(x,y) = y$. Platí $y = kx$ pre vhodné prirodzené k. Dosadením do rovnice dostaneme $x^2 = 4kx + 3kx$, odkiaľ $x = 7k$, a preto $y = 7k^2$. Pretože $n(7k, 7k^2) = 7k^2$ pre každé k, je zodpovedajúca dvojica $(x,y) = (7k, 7k^2)$ skutočne riešenie.

(ii) $n(x,y) = 2y$. Platí $2y = kx$ pre vhodné nepárne k (pre k párne dostaneme, že x delí y, čo je prípad (i)). Dosadením do rovnice dostaneme $x^2 = 2kx + 3kx$, odkiaľ $x = 5k$, a preto $2y = 5k^2$. To je spor s tým, že k je nepárne.

(iii) $n(x,y) = 4y$. Platí $4y = kx$ pre vhodné nepárne k (pre k párne dostaneme, že x delí y alebo $2y$, čo vedie na prípad (i) alebo (ii)). Dosadením do rovnice dostaneme $x^2 = kx + 3kx$, odkiaľ $x = 4k$, a preto $y = k^2$. Pretože $n(4k, k^2) = 4k^2$ pre každé nepárne k, je zodpovedajúca dvojica $(x,y) = (4k, k^2)$ skutočne riešenie.

Odpoveď. Hľadaných dvojíc (x,y) je nekonečne veľa; sú to jednak dvojice $(7k, 7k^2)$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo, jednak dvojice $(4k, k^2)$, kde k je ľubovoľné nepárne prirodzené číslo.

Iné riešenie. Označme d najväčší spoločný deliteľ hľadaných čísel x a y. Potom $x = dx_1$ a $y = dy_1$, kde x_1 a y_1 sú nesúdeliteľné prirodzené čísla, a $n(x,y) = dx_1y_1$. Po dosadení do danej rovnice dostaneme $d^2x_1^2 = 4dy_1 + 3dx_1y_1$, čo po krátení číslom d prepíšeme do tvaru

$$x_1(dx_1 - 3y_1) = 4y_1. \qquad (1)$$

Prirodzené číslo $4y_1$ je teda násobkom čísla x_1. Čísla x_1 a y_1 sú ale nesúdeliteľné, teda číslo x_1 je deliteľom čísla 4, a preto $x_1 \in \{1, 2, 4\}$.

Ak $x_1 = 1$, tak z (1) vychádza $d = 7y_1$, takže $x = dx_1 = 7y_1$ a $y = dy_1 = 7y_1^2$. Dvojica čísel $x = 7k$ a $y = 7k^2$ je riešením pôvodnej rovnice pre každé k.

Ak $x_1 = 2$, tak podľa (1) platí $2d = 5y_1$, takže číslo y_1 je párne rovnako ako číslo x_1, čo odporuje ich predpokladanej nesúdeliteľnosti.

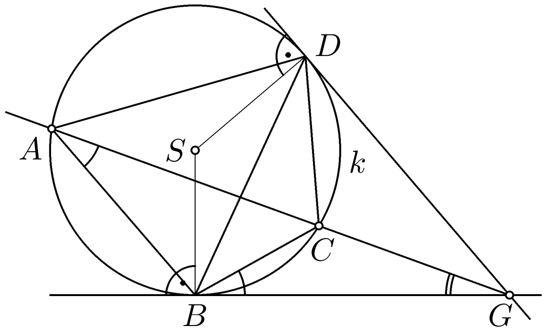
Ak $x_1 = 4$, tak z (1) vychádza $d = y_1$, takže $x = dx_1 = 4d$ a $y = dy_1 = d^2$. Čísla $x_1 = 4$ a $y_1 = d$ sú však nesúdeliteľné iba vtedy, keď je d nepárne číslo. Pre každé také d je dvojica $x = 4d$ a $y = d^2$ riešením pôvodnej rovnice.

A – II – 3

Pretože úsečka BD nie je priemerom kružnice k, jej dotyčnice v bodoch B a D nie sú rovnobežné, takže sa pretínajú v bode, ktorý označíme G.

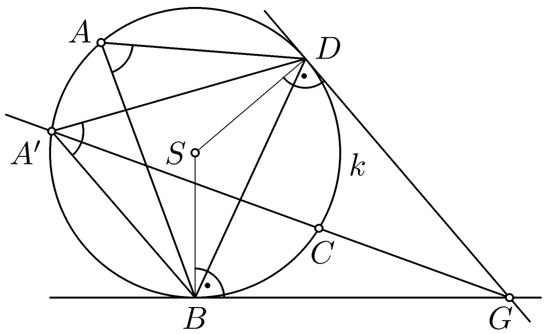
(i) Predpokladajme, že bod G leží na priamke AC, napríklad na polpriamke opačnej k CA (obr. 31). (Ak leží bod G na polpriamke opačnej k AC, vymeníme označenie vrcholov A a C, ktoré nič nemení na rovnosti, ktorú máme dokázať.) Trojuholníky ABG a BCG sa zhodujú ako vo vnútorných uhloch pri spoločnom vrchole G, tak vo vnútorných uhloch BAG a CBG (podľa vety o obvodovom a úsekovom uhle pre tetivu BC kružnice k). Preto sú tieto trojuholníky podobné, teda platí $|AB| : |BC| = |GB| : |GC|$. Analogický pomer $|AD| : |CD| = |GD| : |GC|$ vyplýva z podobných trojuholníkov ADG a DCG. Keď porovnáme oba pomery a prihliadneme na rovnosť

$|GB| = |GD|$ (úseky dotyčníc z bodu G ku kružnici k), zistíme, že platí $|AB| : |BC| = |AD| : |CD|$, odkiaľ už vyplýva rovnosť $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.



Obr. 31

(ii) Predpokladajme teraz, že platí rovnosť $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ a že bod G leží v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou BD ako bod C (inak opäť vymeníme označenie bodov A a C, ktoré priamka BD oddeľuje.) Potom polpriamka GC pretína kružnicu k v dvoch bodoch, v bode C a v bode, ktorý označíme A' (obr. 32). Pre štvoruholník $A'BCD$ môžeme použiť tvrdenie dokázané v časti (i), dostaneme tak



Obr. 32

rovnosť $|A'B| \cdot |CD| = |A'D| \cdot |BC|$. Porovnaním s rovnosťou $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ zistíme, že platí $|A'B| : |AB| = |A'D| : |AD|$. Tento pomer spolu so zhodnosťou uhlov $BA'D$ a BAD (obvodové uhly nad tetivou BD kružnice k) znamená, že trojuholníky $BA'D$ a BAD sú podobné podľa vety *sus*. Pretože však strane BD zodpovedá strana BD, ide o zhodné trojuholníky (ležiace v rovnakej polrovine s hraničnou priamkou BD), teda body A a A' sú totožné. Bod G preto leží na priamke AC.

A – II – 4

Odčítaním prvých dvoch rovníc sústavy dostaneme

$$x^2 - y^2 = p(y - x), \quad \text{čiže} \quad (x - y)(x + y + p) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva, že aspoň jeden z činiteľov $(x-y)$ a $(x+y+p)$ je rovný nule, takže číslo y je rovné x alebo $-p-x$. Podobne odčítaním prvej a tretej rovnice sústavy zistíme, že $z \in \{x, -p-x\}$. Spolu to znamená, že každé riešenie (x, y, z) danej sústavy je (až na poradie) trojica tvaru (u, u, u) alebo $(u, u, -p-u)$.

(i) Trojica (u, u, u) je riešením práve vtedy, keď číslo u spĺňa rovnicu $u^2 - 1 = 2pu$. Jej úpravou dostaneme $(u-p)^2 = p^2 + 1$, odkiaľ vidno, že pre každé reálne p existujú dve rôzne čísla u a sú rovné $p \pm \sqrt{p^2+1}$. Im zodpovedajú prvé dve riešenia pôvodnej sústavy

$$x_1 = y_1 = z_1 = p + \sqrt{p^2+1} \quad \text{a} \quad x_2 = y_2 = z_2 = p - \sqrt{p^2+1}. \tag{1}$$

(ii) Hľadajme teraz všetky riešenia sústavy tvaru $(u, u, -p-u)$. Ľahko si uvedomíme, že trojica čísel $(u, u, -p-u)$ (v akomkoľvek poradí) je riešením pôvodnej sústavy práve vtedy, keď číslo u súčasne vyhovuje dvom rovniciam

$$u^2 - 1 = p(u - p - u) \quad \text{a} \quad (-p-u)^2 - 1 = p(u+u).$$

Je zrejmé, že každá z týchto rovníc je ekvivalentná s rovnicou $u^2 = 1 - p^2$. Vidíme, že v prípade $|p| > 1$ číslo u neexistuje, v prípade $|p| = 1$ platí $u = 0$ a v prípade $|p| < 1$ existujú dve čísla u a sú rovné $\pm\sqrt{1-p^2}$. Zodpovedajúce riešenia pôvodnej sústavy sú dve trojice čísel

$$\begin{aligned} x_3 = y_3 &= \sqrt{1-p^2} \quad \text{a} \quad z_3 = -p - \sqrt{1-p^2}, \\ x_4 = y_4 &= -\sqrt{1-p^2} \quad \text{a} \quad z_4 = -p + \sqrt{1-p^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

a ďalej všetky ich permutácie

$$\begin{aligned} (x_5, y_5, z_5) &= (x_3, z_3, x_3), \quad (x_6, y_6, z_6) = (x_4, z_4, x_4), \\ (x_7, y_7, z_7) &= (z_3, x_3, x_3), \quad (x_8, y_8, z_8) = (z_4, x_4, x_4). \end{aligned} \tag{3}$$

(Vzťahy (2) a (3) môžeme použiť aj v prípade $|p| = 1$, musíme však mať na pamäti, že poskytujú len tri rôzne riešenia, lebo tretie riešenie je totožné so štvrtým, piate so šiestym a siedme s ôsmym.)

Teraz ešte posúdime, kedy sú niektoré riešenia uvedené v (2) a (3) totožné s riešeniami uvedenými v (1). Taká situácia nastane, pokiaľ platí $|p| \leqq 1$ a je splnená niektorá z rovníc

$$\sqrt{1-p^2} = -p - \sqrt{1-p^2} \quad \text{resp.} \quad -\sqrt{1-p^2} = -p + \sqrt{1-p^2}.$$

Jednoduchým výpočtom zistíme, že prvá rovnica má jediné riešenie $p = -2/\sqrt{5}$ (pre také p tretie, piate a siedme riešenie sú totožné s prvým riešením) a že druhá rovnica má jediné riešenie $p = 2/\sqrt{5}$ (pre také p štvrté, šieste a ôsme riešenie sú totožné s druhým riešením).

Odpoveď. Všetky riešenia (x_i, y_i, z_i) danej sústavy rovníc sú popísané vzorcami (1), (2) a (3). Ak $|p| > 1$, existujú práve dve rôzne riešenia (s indexmi $i = 1, 2$). Ak $|p| < 1$ a $|p| \neq 2/\sqrt{5}$, existuje práve osem rôznych riešení (s indexmi $i = 1, 2, \dots, 8$). Ak $|p| = 1$ alebo $|p| = 2/\sqrt{5}$, existuje práve päť rôznych riešení (s indexmi $i = 1, 2, 3, 5, 7$ pre hodnoty $p = 1$, $p = -1$, $p = 2/\sqrt{5}$ a s indexmi $i = 1, 2, 4, 6, 8$ pre $p = -2/\sqrt{5}$).

A – III – 1

Z prvej rovnice danej sústavy vyplýva, že číslo $7y - 14 = 7(y - 2)$ je deliteľné piatimi, takže $y = 5s + 2$ pre vhodné celé s. Potom platí $2y = 10s + 4$, a preto $(2y)_5 = 10s + 5$. Po dosadení do sústavy dostaneme dvojicu rovníc $(4x)_5 + 35s = 0$ a $10s - (3x)_7 = 69$. Keď odčítame od dvojnásobku prvej rovnice sedemnásobok druhej rovnice, vylúčime neznámu s a pre neznámu x dostaneme rovnicu $2(4x)_5 + 7(3x)_7 = -483$. Pretože funkcia $F(t) = 2(4t)_5 + 7(3t)_7$ je v celočíselnej premennej t neklesajúca a platí $F(-18) = -532$, $F(-17) = -483$ a $F(-16) = -473$, má naša rovnica $F(x) = -483$ jediné riešenie $x = -17$. Z rovnice $(4x)_5 + 35s = 0$ potom vyplýva $s = 2$, takže $y = 12$. Skúšku pre dvojicu $(x, y) = (-17, 12)$ urobíme ľahko dosadením.

Daná sústava má jediné riešenie $(x, y) = (-17, 12)$.

Iné riešenie. Pre každé celé číslo t zrejme platia nerovnosti $t - 2 \leqq (t)_5 \leqq t + 2$ a $t - 3 \leqq (t)_7 \leqq t + 3$. Podľa nich dostaneme z danej sústavy rovníc sústavu nerovníc

$$\begin{aligned} 12 \leqq 4x + 7y \leqq 16, \\ 69 \leqq 2y - 3x \leqq 79. \end{aligned}$$

Z tejto sústavy vylúčime napríklad neznámu x. Pre výraz $3(4x+7y)+4(2y-3x)$, ktorý sa rovná $29y$, tak dostaneme odhady

$$29y \leqq 3 \cdot 16 + 4 \cdot 79 = 364 \quad \text{a} \quad 29y \geqq 3 \cdot 12 + 4 \cdot 69 = 312.$$

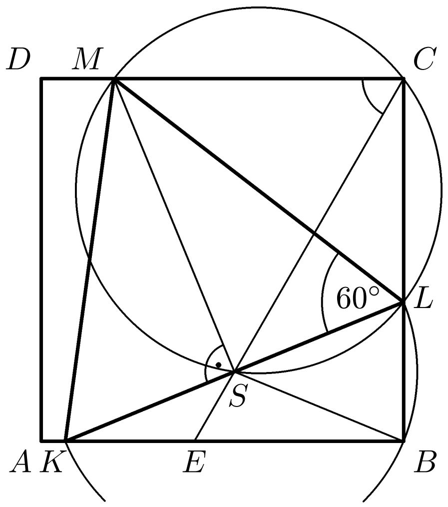
Z nerovností $312 \leqq 29y \leqq 364$ však vyplýva $y \in \{11, 12\}$. Z prvej rovnice pôvodnej sústavy pre $y = 11$ vychádza $(4x)_5 = -63$, čo nie je násobok piatich, zatiaľ čo pre $y = 12$ vychádza $(4x)_5 = -70$, odkiaľ $-72 \leqq 4x \leqq -68$, takže $x \in \{-18, -17\}$. Nutne teda platí $y = 12$; po dosadení do druhej rovnice sústavy zistíme, že táto rovnica je splnená pre $x = -17$, nie však pre $x = -18$. Jediným riešením je teda dvojica $(x, y) = (-17, 12)$.

A – III – 2

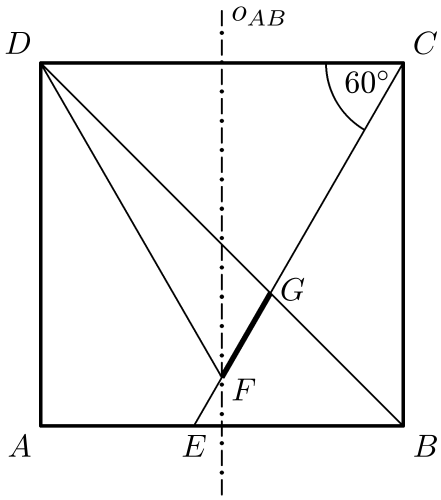
Označme S stred strany KL ľubovoľného z uvažovaných trojuholníkov KLM (obr. 33). Pretože oba uhly LCM a LSM sú pravé, je štvoruholník $CMSL$ tetivový, a preto $|\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle MLS| = 60°$. Bod S teda leží na pevnej úsečke CE, ktorej krajný bod $E \in AB$ je daný rovnosťou $|\sphericalangle ECD| = 60°$. Ukážeme, že hľadanou množinou všetkých stredov S je istá úsečka medzi bodmi C a E, ktorá je určená podmienkami $S \in CE$,

$$\text{(i)} \quad |AS| \geqq |BS| \quad \text{a} \quad \text{(ii)} \quad |\sphericalangle CBS| \geqq 45°.$$

Z týchto podmienok zrejme vyplýva, že sa jedná o úsečku FG, kde F je vrchol rovnostranného trojuholníka CDF a G je ten bod strany CF, ktorý leží na uhlopriečke BD, obr. 34. Z bodov úsečky CE totiž podmienku (i) spĺňajú práve body úsečky CF, podmienku (ii) práve body úsečky EG.



Obr. 33



Obr. 34

Spomenuté tvrdenie dokážeme tak, že vnútri úsečky CE zvolíme ľubovoľný bod S a pokúsime sa rekonštruovať vyhovujúci trojuholník KLM, ktorého strana KL má stred vo zvolenom bode S. Zistíme, že taký trojuholník KLM existuje práve vtedy, keď bod S spĺňa obe podmienky (i) a (ii). Vráťme sa znova k obr. 33. Pretože uhol KBL je pravý, sú podľa Tálesovej vety všetky tri úsečky SK, SB a SL zhodné. Preto možno body K, L určiť ako priesečníky úsečiek AB, BC s kružnicou so stredom S a polomerom $|SB|$. Taký priesečník K ($K \neq B$) existuje práve vtedy, keď platí podmienka (i), priesečník L ($L \neq B$) existuje práve vtedy, keď platí nerovnosť $|BS| \leqq |CS|$, čiže $|\sphericalangle BCS| \leqq |\sphericalangle CBS|$. Pretože však $|\sphericalangle BCS| = 30°$, je posledná nerovnosť zaručená silnejšou podmienkou (ii), ktorej nutnosť sa ukáže za chvíľu. Ak už poznáme body K a L, môžeme určiť bod M ako priesečník strany CD s osou úsečky KL. Predpokladajme, že taký priesečník M existuje; zostrojený rovnoramenný trojuholník KLM je potom naozaj rovnostranný, lebo štvoruholník $CMSL$ je tetivový (uhly pri vrcholoch C a S sú pravé), a preto platí $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle MCS| = 60°$. Zostáva preto posúdiť, kedy existuje priesečník úsečky CD s osou úsečky KL, teda kedy body C, D ležia v opačných polrovinách určených spomenutou osou, ktoré sú popísané nerovnicami $|KX| \leqq |LX|$ a $|KX| \geqq |LX|$. Pretože platí $|KC| \geqq |BC|$ a $|BC| \geqq |LC|$, teda $|KC| \geqq |LC|$, je našou úlohou zistiť, kedy je splnená nerovnosť $|KD| \leqq |LD|$. Z pravouhlých trojuholníkov KDA a LDC usúdime, že posledná nerovnosť platí práve vtedy, keď $|AK| \leqq |LC|$, čiže $|KB| \geqq |LB|$, čiže $|\sphericalangle BLK| \geqq 45°$. Uhol BLK je ale zhodný s uhlom CBS (vieme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostávame podmienku (ii). Dôkaz je hotový.

A – III – 3

(i) Predpokladajme najskôr, že $A = d^2$ pre niektoré prirodzené d. Potom pre každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$(A+j)^2 - A = (d^2+j)^2 - d^2 = (d^2-d+j)(d^2+d+j);$$

pretože jedno z n po sebe idúcich čísel (d^2-d+j), kde $j = 1, 2, \dots, n$, je deliteľné číslom n, je číslom n deliteľné aj príslušné číslo $(A+j)^2 - A$.

(ii) Predpokladajme teraz, že číslo A nie je druhou mocninou žiadneho prirodzeného čísla. V rozklade čísla A na prvočísla sa potom niektoré prvočíslo p vyskytuje v nepárnym exponentom, teda $p^{2k-1} \mid A$ a $p^{2k} \nmid A$ pre vhodné prirodzené k. Ukážme, že napríklad číslo $n = p^{2k}$ nemá vlastnosť z textu úlohy. Pripustime naopak, že pre niektoré $j = 1, 2, \dots, p^{2k}$ je rozdiel $(A+j)^2 - A$ deliteľný číslom p^{2k}. Čísla $(A+j)^2$ a A potom dávajú rovnaké zvyšky pri delení číslom p^{2k}, a teda aj pri delení číslom p^{2k-1}. Pretože číslo A je deliteľné číslom p^{2k-1}, nie však číslom p^{2k}, platí to isté aj o čísle $(A+j)^2$. To je ale spor, lebo $(A+j)^2$ je druhá mocnina prirodzeného čísla.

A – III – 4

Po vynásobení oboch strán rovnice výrazom $x^2 - 1$ (ktorý je rovný nule práve vtedy, keď $x \in \{-1, 1\}$) a po prevedení všetkých členov na jednu stranu dostaneme kubickú rovnicu

$$x^3 - ax^2 + 23x - b = 0. \tag{1}$$

Ako dobre vieme, každá kubická rovnica s reálnymi koeficientami má v obore reálnych čísel buď jeden, alebo tri korene (ak ich počítame aj s ich násobnosťou). Pretože obe riešenia pôvodnej rovnice sú korene rovnice (1), musí mať táto rovnica tri reálne korene. Pre tieto čísla x_1, x_2, x_3 a pre koeficienty rovnice (1) platia známe Viètove vzťahy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a,\\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 23,\\ x_1x_2x_3 &= b. \end{aligned} \tag{2}$$

Aby sme sa ďalej vyhli niektorým skúškam, pripomeňme známy fakt, že každé riešenie sústavy rovníc (2) je tvorené trojicou koreňov rovnice (1), všetky riešenia (2) sú teda permutácie tej istej trojice čísel.

Predpoklad o dvoch riešeniach pôvodnej rovnice znamená, že buď práve jeden z koreňov x_1, x_2, x_3 patrí do množiny $\{-1, 1\}$ a ostatné dva korene sú rôzne, alebo je jeden z koreňov x_1, x_2, x_3 dvojnásobný a žiadny z nich do množiny $\{-1, 1\}$ nepatrí. Riešenie pôvodnej rovnice možno preto označiť s a $12 - s$ tak, že nastane jedna z nasledujúcich možností: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12-s)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12-s)$, alebo $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12-s)$; vždy pritom platí $s \notin \{-1, 1, 6, 11, 13\}$. Vymenované možnosti teraz jednotlivo posúdime.

(i) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, s, 12 - s)$. Sústava (2) má po dosadení a úprave tvar

$$a = 11, \quad s^2 - 12s - 35 = 0, \quad b = -s(12 - s).$$

Druhá rovnica má dva korene $s = 5$ a $s = 7$, ktorým podľa tretej rovnice zodpovedá rovnaká hodnota $b = -35$. Dvojica $(a, b) = (11, -35)$ je riešením úlohy.

(ii) $(x_1, x_2, x_3) = (1, s, 12 - s)$. Sústava (2) má po dosadení a úprave tvar

$$a = 13, \quad s^2 - 12s + 11 = 0, \quad b = s(12 - s).$$

Druhá rovnica má korene $s = 1$ a $s = 11$, ktoré však patria k neprípustným hodnotám s (ako sme ukázali vyššie).

(iii) $(x_1, x_2, x_3) = (s, s, 12 - s)$. Sústava (2) má po dosadení a úprave tvar

$$a = s + 12, \quad s^2 - 24s + 23 = 0, \quad b = s^2(12 - s).$$

Druhá rovnica má korene $s = 1$ a $s = 23$. Hodnota $s = 1$ je neprípustná, hodnote $s = 23$ podľa prvej a tretej rovnice zodpovedajú hodnoty $a = 35$ a $b = -11 \cdot 23^2 = -5\,819$. Dvojica $(a, b) = (35, -5\,819)$ je riešením úlohy.

Hľadané dvojice (a, b) sú dvojice $(11, -35)$ a $(35, -5\,819)$.

A – III – 5

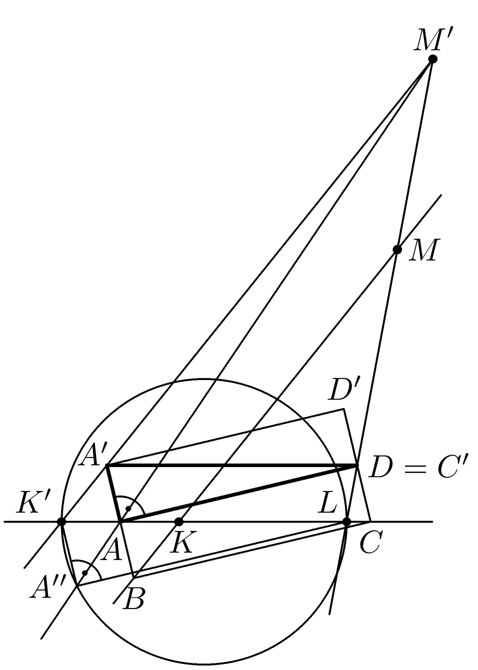
Predpokladajme, že $ABCD$ je hľadaný pravouholník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\overrightarrow{BA}$ (obr. 35, $B' = A$). Bod A' leží na priamke súmerne združenej s priamkou KM podľa stredu A – odpovedajúce priesečníky tejto priamky s priamkami LK a LM označme K' a M'. Pretože uhlopriečka AC hľadaného pravouholníka leží na priamke KL, je uhlopriečka $A'C'$ posunutého obdĺžnika $A'B'C'D'$ s KL rovnobežná. V rovnoľahlosti so stredom M', ktorá zobrazuje bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L), zodpovedá pravouhlému trojuholníku $A'AC'$ trojuholník $K'A''L$. Bod A'' už dokážeme zostrojiť, pretože leží na Tálesovej kružnici nad priemerom $K'L$ a na priamke $M'A$. Teraz už ľahko zostrojíme hľadaný pravouholník $ABCD$. Najskôr určíme body A' a $C' = D$, ktoré sú obrazmi bodov K' a L v rovnoľahlosti so stredom M', ktorá zobrazuje bod A'' do bodu A a k nim doplníme vrcholy B a C ako obrazy bodov $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AB}$.

Pretože bod A leží vnútri úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, pretína priamka $M'A$ Tálesovu kružnicu nad priemerom $K'L$ vždy v dvoch bodoch. Ak je A'' jeden z priesečníkov uvedenej Tálesovej kružnice s priamkou $M'A$ a $M' \neq A''$, určujú body A, A'' hľadanú rovnoľahlosť so stredom M'. Pokiaľ teda bod M'' neleží na kružnici s priemerom $K'L$, má úloha dve rôzne riešenia $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 36). V opačnom prípade má úloha iba jedno riešenie.

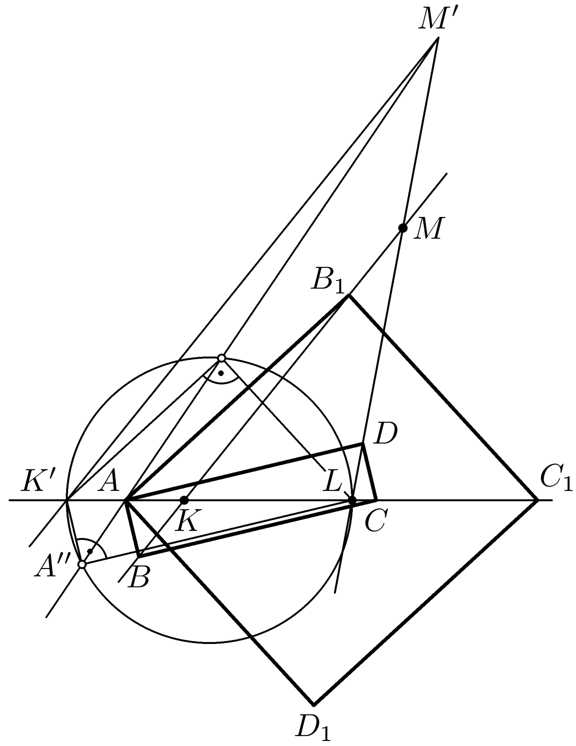
A – III – 6

Keď dosadíme do danej rovnice za x hodnotu $f(x)$, dostaneme rovnicu

$$f\bigl(f(x)f(y)\bigr) = f\bigl(f(x)y\bigr) + f(x),$$



Obr. 35



Obr. 36

z ktorej vyjadríme $f\big(f(x)y\big) = f\big(f(x)f(y)\big) - f(x)$. Iné vyjadrenie rovnakého výrazu $f\big(f(x)y\big)$ dostaneme, keď v pôvodnej rovnici vymeníme navzájom hodnoty x a y; vyjde nám $f\big(f(x)y\big) = f(yx) + y$. Porovnaním oboch vyjadrení tak dostaneme rovnicu

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(yx) + y + f(x),$$

ktorej ľavá strana sa nezmení, keď vymeníme navzájom hodnoty x a y. Rovnakú vlastnosť musí preto mať aj pravá strana tejto rovnice, takže musí platiť

$$f(yx) + y + f(x) = f(xy) + x + f(y), \quad \text{čiže} \quad y + f(x) = x + f(y).$$

Ďalšou zrejmou úpravou dostávame rovnicu $f(x) - x = f(y) - y$, ktorá musí byť splnená pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$. Znamená to, že funkcia $x \mapsto f(x) - x$ je na množine $\mathbb{R}^+$ konštantná, teda hľadaná funkcia f musí mať tvar $f(x) = x + c$ pre vhodné číslo c. Po dosadení tohto predpisu do oboch strán pôvodnej rovnice máme

$$f\big(xf(y)\big) = xf(y) + c = x(y + c) + c = xy + cx + c,$$
$$f(xy) + x = (xy + c) + x = xy + x + c.$$

Zisťujeme, že vyhovuje jedine $c = 1$. Hľadaná funkcia f je teda jediná a je určená vzťahom $f(x) = x + 1$.

Prípravné sústredenia pred IMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí jedného náhradníka.

Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 9 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 21. – 27. 4. 2002 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Vladimír Marko, úlohy 1 – 4,
Tomáš Jurík, úlohy 5 – 8,
Martin Potočný, úlohy 9 – 12,
František Kardoš, úlohy 13 – 16,
Juraj Földes, úlohy 17 – 20.

Každý deň študenti riešili sériu štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO a iné výsledky (predchádzajúca účasť na IMO, výsledky korešpondenčného seminára SK MO) bolo vybrané šesťčlenné družstvo pre účasť na IMO.

Výsledky sústredenia:

Katarína Quittnerová	40,5
Radovan Bauer	38
Peter Bella	33
Andrej Osuský	33
Marek Tesař	30
Ján Mazák	29
Jakub Závodný	22,5
Michal Burger	22
Tomáš Váňa	19

Poradie po zohľadnení výsledkov CK MO:

1.	*Katarína Quittnerová*	82,5
2.	*Andrej Osuský*	70
3.	*Peter Bella*	68
4.	*Radovan Bauer*	64
5.	*Marek Tesař*	55
6.–7.	*Michal Burger*	50
6.–7.	*Ján Mazák*	50
8.	*Jaub Závodný*	38,5
9.	*Tomáš Váňa*	36

Pre SK MO tak vznikla neľahká situácia rozhodnúť, kto bude šiestym členom reprezentačného družstva. Pri takej vyrovnanosti výkonov je zrejmé, že pri akomkoľvek rozhodnutí jeden sa bude radovať a druhý bude smútiť. Po konzultáciách niekoľkých členov predsedníctva SK MO však vzniklo jednomyseľné rozhodnutie zaradiť do družstva Michala Burgera. Považujeme za potrebné naše rozhodnutie zdôvodniť. V prospech Michala Burgera hovorilo to, že bol žiakom druhého ročníka, kým Ján Mazák bol žiakom štvrtého ročníka. Býva zvykom v prípadoch rovnosti výkonov dať prednosť mladšiemu. V prospech Michala Burgera však oveľa viac zaváži̇l ďalší fakt. V priebehu výberového sústredenia musel vyhľadať lekársku pomoc, čím stratil 1, 5 bodu. Na druhý deň stratil ďalších osem bodov. Zvyšné dva dni však vypočítal úlohy lepšie od svojho „súpera" a skóre vyrovnal. Predsedníctvo SK MO považuje za veľmi pravdepodobné, že nebyť toho zdravotného handicapu 1,5 + 8 bodov, nebolo by došlo k remíze.

Na druhej strane predsedníctvo SK MO vyjadruje ľútosť nad tým, že Ján Mazák sa už do reprezentačného družstva dostal len ako náhradník, lebo, ako neskôr ukázali výsledky našich na IMO, všetci získali medailu. Takže Janko Mazák by ju asi bol získal tiež. Škoda.

Druhé sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva. Miesto a čas druhého sústredenia boli zvolené tak, aby družstvo mohlo ihneď po ňom odcestovať na trojstretnutie do Zwardoňa, teda v dňoch 9. – 16. 6. 2002 v Žiline. Lektormi boli študenti FMFI UK Bratislava:

Juraj Földes, (Postupnosti a funkcionálne rovnice),
Vladimír Marko, (Nerovnosti),
Peter Novotný, (Teória čísel),
Martin Potočný, (Kombinatorika),
František Kardoš, (Geometria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred MMO

1. Množinu troch nezáporných celých čísel $\{x, y, z\}$, $x < y < z$, nazývame *historickou*, ak $\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$. Ukážte, že množinu nezáporných celých čísel môžeme napísať ako zjednotenie po dvoch disjunktných historických množín.

2. Pre bod M vnútri trojuholníka ABC označme A', B' a C' po rade päty kolmíc spustených z bodu M na priamky BC, CA a AB. Definujme

$$p(M) = \frac{|MA'|}{|MA|} \cdot \frac{|MB'|}{|MB|} \cdot \frac{|MC'|}{|MC|}.$$

Nájdite bod M, pre ktorý je $p(M)$ maximálne. Označme $\mu(ABC)$ toto maximum. Pre ktoré trojuholníky ABC je hodnota $\mu(ABC)$ najväčšia?

3. Nech $p \geqq 5$ je prvočíslo. Dokážte, že existuje prirodzené číslo a, $1 \leqq a \leqq p - 2$, také, že čísla $a^{p-1} - 1$ a $(a+1)^{p-1} - 1$ nie sú deliteľné číslom p.

4. Nájdite všetky postupnosti prirodzených čísel $a_1, \dots, a_n$, pre ktoré

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

kde $a_0 = 1$ a $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqq a_k^2(a_k - 1)$ pre $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

5. V danom trojuholníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| > |\sphericalangle BCA|$. Vo vnútri trojuholníka ABC je daný bod P tak, aby $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle BCA|$. Mimo trojuholníka ABC leží bod Q tak, aby $PQ \parallel AB$ a $BQ \parallel AC$. Nech R je bod na strane BC (R je od bodu Q oddelený priamkou AP) taký, že $|\sphericalangle PRQ| = |\sphericalangle BCA|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ABC a PQR sa navzájom dotýkajú.

6. Prirodzené čísla a, b, c spĺňajú rovnosť

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Najväčšieho spoločného deliteľa čísel a, b, c označme h. Dokážte, že čísla $habc$ aj $h(b-a)$ sú druhými mocninami prirodzených čísel.

7. Pre každé prirodzené číslo n dokážte nerovnosť

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqq (2n+1)^{n-1} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right)^2.$$

8. Dve kružnice k_1 a k_2 zo stredmi po rade v bodoch P a Q sa pretínajú v bodoch S a T. Spoločnú (vonkajšiu) dotyčnicu týchto kružníc, ktorá je bližšie k bodu S, označíme p a jej dotykové body s kružnicami k_1, k_2 po rade M a L.
(a) Druhý priesečník dotyčnice ku kružnici k_2 v bode S s kružnicou k_1 označíme K. Priesečník priamok SL a MK označíme U. Dokážte, že priamky MU a MS sú dotyčnicami kružnice opísanej trojuholníku STU.
(b) Označme R priesečník osí strán MS a SL. Bod W je druhý priesečník kružnice opísanej trojuholníku PQR s priamkou RS. Dokážte, že S je stredom úsečky RW.

9. Šachovnica $n \times n$ je pokrytá neprekrývajúcimi sa štvorcami 2×2 a 3×3. Aké môže byť n?

10. Uhlopriečky AC a BD konvexného štvoruholníka $ABCD$ sa pretínajú v bode E. Dokážte, že pre obsahy útvarov platí nerovnosť

$$\sqrt{S_{ABE}} + \sqrt{S_{CDE}} \leqq \sqrt{S_{ABCD}}.$$

Kedy nastáva rovnosť?

11. Koľko je slov dĺžky n z písmen A, B, C, ktoré spĺňajú obe nasledujúce podmienky?
(i) Začínajú a končia sa na A;
(ii) každé dve susedné písmená sú rôzne.

12. Dané sú body A_1, A_2, A_3, A_4 na sfére opísanej pravidelnému štvorstenu s hranou dĺžky 1 také, že $|A_iA_j| < 1$ pre každé $i \neq j$. Dokážte, že tieto štyri body ležia na jednej hemisfére.

13. Na ostrove žije n domorodcov. Každí dvaja z nich sú buď priatelia alebo nepriatelia. Jedného dňa náčelník rozkázal všetkým obyvateľom (vrátane seba), aby si vyrobili a nosili náhrdelník z mušličiek, pričom
• ľubovoľní dvaja priatelia musia mať vo svojich náhrdelníkoch aspoň jednu mušličku rovnakého druhu;
• ľubovoľní dvaja nepriatelia musia mať vo svojich náhrdelníkoch všetky mušličky rôzneho druhu.
(Je prípustný aj náhrdelník bez mušličiek.)
(a) Ukážte, že domorodci mohli splniť náčelníkov rozkaz.
(b) Nájdite najmenší počet druhov mušličiek potrebných na to, aby domorodci mohli určite splniť náčelníkov rozkaz.

14. Je daný trojuholník ABC, v ktorom $\beta < 45°$. Na strane BC leží bod D tak, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABD je totožný so stredom O kružnice opísanej trojuholníku ABC. Nech l je kružnica opísaná trojuholníku AOC. Označme P priesečník dotyčníc ku kružnici l v bodoch A a C, ďalej označme Q priesečník priamok AD a CO a napokon X nech je priesečník priamky PQ a dotyčnice ku l v bode O. Dokážte, že $|XO| = |XD|$.

15. Nech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je množina n navzájom rôznych celých čísel, $n \geqq 3$. Označme m a M, najmenší a najväčší prvok množiny A. Predpokladajme, že existuje taký polynóm $p(x)$ s celočíselnými koeficientami, ktorý spĺňa
(i) $\forall a \in A: \quad m < p(a) < M$;
(ii) $\forall a \in A \setminus \{m, M\}: \quad p(m) < p(a)$.
Dokážte, že potom $n \leqq 5$ a existujú celé čísla b a c také, že všetky prvky množiny A sú riešenia rovnice $p(x) + x^2 + bx + c = 0$.

16. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú ľubovoľné reálne čísla. Dokážte nerovnosť

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \ldots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\ldots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

17. Nech $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, kde n je kladné celé číslo. Podmnožinu množiny A nazveme *súvislou*, ak pozostáva z jedného prvku alebo z niekoľkých za sebou idúcich čísel. Nájdite najväčšie celé číslo k, pre ktoré A obsahuje k rôznych podmnožín $A_1, \dots A_k$ takých, že prienik ľubovoľných dvoch množín A_i a A_j je súvislá množina.

18. Označme ABC trojuholník s ťažiskom G. Nájdite, spolu s dôkazom, polohu bodu P v rovine trojuholníka ABC tak, že výraz $|AP| \cdot |AG| + |BP| \cdot |BG| + |CP| \cdot |CG|$ má minimálnu hodnotu. Vyjadrite toto minimum pomocou dĺžok strán trojuholníka ABC.

19. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spĺňajúce rovnosť

$$f(m^2 + f(n)) = f^2(m) + n$$

pre všetky celé čísla m a n.

20. Je daná rovnica

$$(p+2)x^2 - (p+1)y^2 + px + (p+2)y = 1,$$

kde p je dané prvočíslo tvaru $4k+3$. Dokážte, že platia nasledujúce tvrdenia.
(a) Ak (x_0, y_0) je riešenie rovnice, kde x_0 a y_0 sú kladné celé čísla, tak p delí x_0.
(b) Daná rovnica má nekonečne veľa riešení tvaru (x_0, y_0), kde x_0, y_0 sú kladné celé čísla.

2. česko–slovensko–poľské stretnutie

Zwardoń, 16. – 18. 6. 2002

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo už druhýkrát prípravné stretnutie medzi tímami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovala vždy šestica účastníkov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách letenky na 43. MMO do škótskeho Glasgowa.

Súťaž sa uskutočnila 17. – 18. júna 2002 v krásnom prostredí poľských Beskýd v pohraničnom horskom stredisku Zwardoń. Všetky tri reprezentačné družstvá pricestovali na miesto konania už v nedeľu 16. júna 2002. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu III. kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Úlohy pre tohtoročnú súťaž vybrali poľskí organizátori, a to predovšetkým z vlastných zdrojov. Ich koordináciu riadila medzinárodná porota, ktorú tvorili *Dr. Marcin Kuczma* a *Mgr. Andrzej Mąkowski* z Poľska, *RNDr. Oliver Ralík* a *Vladimír Marko* zo Slovenska a *RNDr. Jaroslav Švrček* a RNDr. Jaroslav Zhouf za Českú republiku. Na úspešnom priebehu celej súťaže sa ďalej významne podieľali poľskí kolegovia *Dr. Józef Kalinowski* a *Dr. Jerzy Bednarczuk*.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Katarína Quitnerová	Slovensko	7	6	7	7	7	7	41
2.	Wojciech Czerwiński	Poľsko	6	7	5	7	7	6	38
3.	Marcin Pilipczuk	Poľsko	6	7	7	7	7	1	35
4.	Josef Cibulka	Česká rep.	6	4	5	7	7	2	31
5.	Peter Bella	Slovensko	7	6	6	7	3	0	29
6.	Jaroslav Hájek	Česká rep.	6	7	5	7	3	0	28
7.-8.	Jarosław Wrona	Poľsko	6	7	7	7	0	0	27
7.-8.	Radovan Bauer	Slovensko	5	7	5	7	3	0	27
9.	Paveł Parys	Poľsko	6	7	6	7	0	0	26
10.	Marek Tesař	Slovensko	6	7	5	6	1	0	25
11.	Martin Tancer	Česká rep.	6	7	6	3	0	1	23
12.-13.	Tomáš Protivinský	Česká rep.	6	0	7	7	1	0	21
12.-13.	Roman Łomowski	Poľsko	2	0	5	7	7	0	21
14.-15.	Jan Moláček	Česká rep.	2	0	7	7	0	2	18
14.-15.	Michal Burger	Slovensko	3	0	7	7	0	1	18
16.	Michał Jóźwikowski	Poľsko	6	0	2	7	0	0	15
17.	Vítězslav Kala	Česká rep.	5	0	5	1	0	1	12
18.	Andrej Osuský	Slovensko	6	0	0	0	0	0	6

V budúcom roku sa tretie spoločné prípravné stretnutie (pred 44. MMO) uskutoční na Slovensku.

Zadania úloh 2. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Nech a, b sú rôzne reálne čísla a k, m prirodzené čísla, pre ktoré platí $k + m = n \geqq 3$, $k \leqq 2m$ a $m \leqq 2k$. Uvažujme postupnosti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ktoré vyhovujú nasledujúcim podmienkam:

k členov postupnosti sa rovná a, pritom $x_1 = a$;
m členov postupnosti sa rovná b; pritom $x_n = b$;
žiadne tri po sebe idúce členy nie sú rovnaké.

Určte všetky možné hodnoty súčtu

$$x_n x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n + x_{n-1} x_n x_1.$$

Úloha 2.
Daný je trojuholník ABC, ktorého obsah je S. Pre jeho dĺžky strán $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ platí $a \leqq b \leqq c$. Určte najväčšie reálne číslo u a najmenšie reálne číslo v tak, aby pre každý vnútorný bod P trojuholníka ABC bola splnená nerovnosť

$$u \leqq |PD| + |PE| + |PF| \leqq v,$$

kde D, E, F sú po rade priesečníky priamok AP, BP, CP s protiľahlými stranami daného trojuholníka. (Hodnoty u, v vyjadrite pomocou daných veličín a, b, c a S.)

Úloha 3.
Nech $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde n je dané prirodzené číslo. Určte počet všetkých funkcií $f : S \to S$ takých, že pre každé $x \in S$ platí $x + f^4(x) = n + 1$. (Symbol f^4 označuje štvrtú iteráciu, t. j. $f^4(x) = f(f(f(f(x))))$.)

Úloha 4.
Nech $n > 1$ je prirodzené číslo a p prvočíslo také, že n je deliteľom čísla $p - 1$ a súčasne p je deliteľom čísla $n^3 - 1$. Dokážte, že $4p - 3$ je druhou mocninou prirodzeného čísla.

Úloha 5.
Nech O označuje stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Body P, Q nech sú po rade takými bodmi jeho strán AC, BC, pre ktoré súčasne platí

$$\frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|BQ|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Dokážte, že body O, P, Q a C ležia na jednej kružnici.

Úloha 6.
Nech $n \geqq 2$ je párne prirodzené číslo. Uvažujme polynómy tvaru

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$$

s reálnymi koeficientami, ktoré majú aspoň jeden reálny koreň. Určte najmenšiu možnú hodnotu súčtu $a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2$.

Riešenia úloh 2. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Uvažujme postupnosť $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, ktorá vyhovuje podmienkam úlohy. Pre ľubovoľné jej tri po sebe idúce členy x, y, z existuje taká ich permutácia (x, y, z), pre ktorú platí buď $(x, y, z) = (a, a, b)$, alebo $(x, y, z) = (a, b, b)$. V oboch týchto prípadoch je $xyz = ab(x + y + z - a - b)$. Položme ešte $x_0 = x_n$ a $x_{n+1} = x_1$. Potom pre hľadaný súčet platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_ix_{i+1} = ab\biggl(3\sum_{i=1}^{n} x_i - n(a+b)\biggr) = \bigl((2k-m)a + (2m-k)b\bigr)ab.$$

Teraz ukážeme, že pre ľubovoľné dve prirodzené čísla k, m, ktoré vyhovujú daným podmienkam, existuje aspoň jedna postupnosť $(x_1, \dots, x_n)$ spĺňajúca požadované podmienky. Nech napr. $2m \geqq k \geqq m$ (v prípade $2k \geqq m \geqq k$ budeme postupovať analogicky) a uvažujme postupnosť $3m$ trojíc (a, a, b) napísaných v rade za sebou, t. j. postupnosť

$$(a, a, b, a, a, b, \dots, a, a, b).$$

Táto postupnosť obsahuje $2m$ čísel a a m čísel b. Ak vyškrtneme napr. v prvých $2m - k$ trojiciach (a, a, b) vždy jedno a, dostaneme postupnosť $n = k + m$ prvkov, ktorá zrejme vyhovuje podmienkam úlohy.

Záver: Pre všetky postupnosti, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy, je hodnota uvažovaného súčtu vždy $\bigl((2k-m)a + (2m-k)b\bigr)ab$.

Úloha 2.
Uvažujme ľubovoľný vnútorný bod P trojuholníka ABC a body D, E, F podľa zadania. Označme obsahy trojuholníkov PBC, PCA, PAB po rade S_a, S_b, S_c. Z podmienok úlohy vyplýva $2S_a \leqq a \cdot |PD| \leqq c \cdot |PD|$, $2S_b \leqq b \cdot |PE| \leqq c \cdot |PE|$ a $2S_c \leqq c \cdot |PF|$. Platí teda dolný odhad

$$|PD| + |PE| + |PF| \geqq \frac{2(S_a + S_b + S_c)}{c} = \frac{2S}{c} = v_c,$$

kde v_c označuje veľkosť výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC. Keď teraz uvažujeme bod P tejto výšky ľubovoľne blízko vrcholu C, vidíme, že aj hodnota súčtu $|PD| + |PE| + |PF|$ sa ľubovoľne približuje dĺžke výšky v_c. Najväčšia hodnota u, ktorá vyhovuje podmienkam úlohy, je teda $u = v_c = 2S/c$.

Teraz stanovíme horný odhad uvažovaného súčtu. Najskôr si uvedomme, že úsečka AB (dĺžky c) je najdlhšia (jedna z najdlhších) medzi všetkými úsečkami, ktorých krajnými bodmi sú niektoré dva body trojuholníka ABC (špeciálne má väčšiu dĺžku ako každá z úsečiek AD, BE, CF). Platí preto

$$\frac{S_a}{S} = \frac{|PD|}{|AD|} \geqq \frac{|PD|}{c}, \quad \text{t. j.} \quad |PD| \leqq c\,\frac{S_a}{S}.$$

Analogicky potom
$$|PE| \leqq c\,\frac{S_b}{S} \qquad \text{a} \qquad |PF| \leqq c\,\frac{S_c}{S}.$$
Súčtom všetkých troch nerovností dostaneme
$$|PD| + |PE| + |PF| \leqq c\left(\frac{S_a}{S} + \frac{S_b}{S} + \frac{S_c}{S}\right) = c.$$
Keď teraz zvolíme bod P (vnútri trojuholníka ABC) ľubovoľne blízko vrcholu A tak, aby veľkosť uhla PAB bola ľubovoľne malá, ľahko nahliadneme, že aj hodnota uvažovaného súčtu sa bude ľubovoľne blížiť dĺžke c strany AB. S ohľadom na získaný horný odhad pre súčet $|PD| + |PE| + |PF|$ je teda najmenšia hodnota v vyhovujúca podmienkam úlohy $v = c$.

Úloha 3.
Pre každé $x \in S$ označme $x^* = n+1-x$, kde pre zobrazenie $x \mapsto x^*$ platí $x^{**} = x$. Nech $f : S \to S$ je funkcia vyhovujúca podmienkam úlohy. Pretože $f^4(x) = x^*$, je $f^8(x) = x$. Z podmienok úlohy vyplýva, že funkcia f je prostá, a teda bijektívna (jedná sa teda o permutáciu na množine S). Množinu S možno preto rozložiť na *cykly*, ktorých dĺžky sú delitele čísla 8. Ak x_0 leží v cykle dĺžky 4, 2 alebo 1, tak $x_0 = f^4(x_0) = x_0^*$, preto $x_0 = (n+1)/2$. To je možné iba pre nepárne n, potom ale všetky prvky uvažovaného cyklu musia byť rovné x_0. Odtiaľ vyplýva, že S je zjednotením niekoľkých disjunktných cyklov dĺžky 8, prípadne naviac obsahuje izolovaný prvok x_0. Platí teda $n = 8m$ alebo $n = 8m + 1$, kde m je prirodzené číslo.

Uvažujme najprv $n = 8m$. Označme $A = \{1, \dots, 4m\}$ a $B = \{4m+1, \dots, 8m\}$. Uvažujme teraz určitý cyklus dĺžky 8 a označme C množinu jeho prvkov. Potom $A \cap C$ je štvorprvková množina a $B \cap C$ je jej *-obraz. Naopak, pre každú štvoricu $1 \leqq a < b < c < d \leqq 4m$ možno vytvoriť množinu $C = \{a, b, c, d, d^*, c^*, b^*, a^*\}$, ktorej prvky tvoria cyklus dĺžky 8. Ďalej určíme, koľkými spôsobmi možno vytvoriť taký cyklus dĺžky 8 na množine C. Nech $f(a) = w$, potom w môže byť ľubovoľný prvok množiny C s výnimkou prvkov a a a^* (šesť možností); ďalej nech $f(w) = z$, potom z môže byť ľubovoľný prvok C s výnimkou prvkov a, a^*, w, w^* (štyri možnosti); konečne $f(z)$ môže byť ľubovoľný prvok C s výnimkou prvkov a, a^*, w, w^*, z a z^* (dve možnosti). Zvyšok cyklu je už potom určený. Celkovo tak máme $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ možností.

Každej funkcii f daných vlastností tak možno jednoznačným spôsobom priradiť rozklad $4m$-prvkovej množiny A na m štvoríc. Spočítame, koľko takých rozkladov existuje. Množina A má $\binom{4m}{4}$ rôznych štvorprvkových podmnožín, prvú štvoricu rozkladu môžeme teda vybrať $\binom{4m}{4}$ spôsobmi, druhú $\binom{4m-4}{4}$ spôsobmi, atď. Celkom tak máme
$$\binom{4m}{4}\binom{4m-4}{4} \dots \binom{12}{4}\binom{8}{4} = \frac{(4m)!}{4!^m}$$
možností. Pretože nezáleží na poradí, v akom m štvoríc rozkladu vyberáme, je vždy $m!$ rozkladov rovnakých. Celkom teda existuje
$$\frac{(4m)!}{(4!)^m m!}$$

rôznych rozkladov množiny A na m (neusporiadaných) štvoríc. Každú takú štvoricu prvkov množiny A doplníme odpovedajúcimi *-obrazmi z množiny B. Získame tak jeden z možných cyklov dĺžky 8. Na každom takom cykle môžeme funkciu f definovať 48 spôsobmi, pre daný rozklad tak existuje celkom $48^m = (2 \cdot 4!)^m$ možností, ako definovať funkciu f. Celkový počet funkcií f vyhovujúcich podmienkam úlohy je teda

$$(2 \cdot 4!)^m \cdot \frac{(4m)!}{(4!)^m m!} = \frac{2^m (4m)!}{m!}.$$

V prípade $n = 8m+1$ je nutné uvažovať izolovane prvok $x_0 = (n+1)/2$ a na množine $S \setminus \{x_0\}$ môžeme postupovať analogicky ako v prípade $n = 8m$ (s rovnakým výsledkom). Pokiaľ $n \not\equiv 0, 1 \pmod 8$, žiadna funkcia f vyhovujúca podmienkam úlohy neexistuje.

Úloha 4.
Podľa zadania $p - 1 \geqq n$, čiže $p \geqq n + 1$. Pretože p je deliteľom čísla $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$, je nutne deliteľom $n^2 + n + 1$, t. j. $n^2 + n + 1 = mp$, kde m je prirodzené číslo. Preto $mp \equiv 1 \pmod n$ a podľa predpokladu úlohy aj $p \equiv 1 \pmod n$. Z oboch predchádzajúcich kongruencií vyplýva $m \equiv 1 \pmod n$. Platí teda $m = kn + 1$ a $p = ln + 1$, kde k a $l \geqq 1$ sú nezáporné celé čísla, takže $n^2 + n + 1 = mp = (kn+1)(ln+1)$ a po úprave $n(1 - kl) = k + l - 1 \geqq 0$. Poslednej rovnosti a nerovnosti vyhovuje iba $k = 0$. Odtiaľ vyplýva $m = 1$, $p = n^2 + n + 1$, a teda $4p - 3 = (2n + 1)^2$. Tým je dôkaz ukončený.

Úloha 5.
Uvažujme zvyčajné označenie uhlov v trojuholníku ABC. Nech platí napr. $\alpha \geqq \beta$. Uvažujme trojuholník QPD, ktorý je zvonka pripísaný strane QP štvoruholníka $ABQP$ a je podobný trojuholníku ABC. Potom platí (obr. 37)

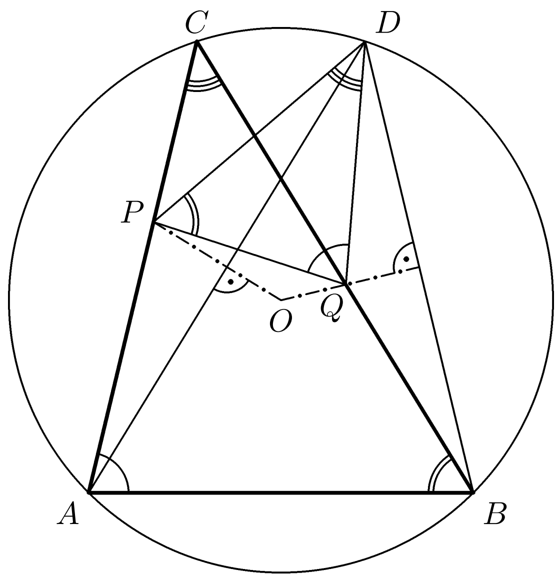
$$\frac{|PD|}{|PQ|} = \frac{|BC|}{|AB|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|QD|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}.$$

Z daných podmienok vyplýva $|PD| = |PA|$ a $|QB| = |QD|$. Na základe predpokladu $\alpha \geqq \beta$ ďalej máme

$$\frac{|AP|}{|BQ|} = \frac{|PD|}{|QD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \geqq 1, \qquad \text{t. j.} \qquad |AP| \geqq |BQ|.$$

V trojuholníku CPQ teda platí $|CP| \leqq |CQ|$ a tiež

$$|\sphericalangle CQP| \leqq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \leqq \alpha = |\sphericalangle DQP|,$$
$$|\sphericalangle CPQ| \geqq \frac{180^\circ - \gamma}{2} \geqq \beta = |\sphericalangle DPQ|.$$



Obr. 37

Z oboch posledných nerovností je zrejmé, že D je vnútorným bodom konvexného uhla BCX, kde X leží na polpriamke AC za bodom C.

Označme teraz veľkosti vnútorných uhlov pri základniach rovnoramenných trojuholníkov ADP a BDQ po rade φ a ψ. Veľkosti vnútorných uhlov v štvoruholníku $ABDP$ majú potom po rade veľkosti α, $\beta+\psi$, $\gamma+\psi$ a $180° - 2\varphi$. Pretože ich súčet je $360°$, platí $\varphi = \psi$, a teda $|\sphericalangle ADB| = \gamma$. Bod D teda leží na oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC. Vzhľadom k tomu, že oba trojuholníky ADP a BDQ sú rovnoramenné (so základňami AD a BD), sú priamky OP a OQ osi strán AD a BD trojuholníka ABD. Pretože stred O kružnice opísanej trojuholníku ABC je jeho vnútorným bodom, vyplýva odtiaľ bezprostredne

$$|\sphericalangle POQ| = 180° - |\sphericalangle ADB| = 180° - |\sphericalangle PDQ| = 180° - \gamma.$$

Platí preto $|\sphericalangle PCQ| + |\sphericalangle POQ| = 180°$, čo znamená, že body O, P, C a Q ležia na jednej kružnici.

Analogicky možno dokázať tvrdenie v prípade, keď $\alpha \leqq \beta$. Tým je úloha vyriešená.

Úloha 6.

Nech u je reálny koreň rovnice $P(x) = 0$. Jej úpravou a ďalej potom využitím Cauchyho nerovnosti dostaneme

$$(u^n + 1)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i u^i\right)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u^{2i}. \tag{1}$$

Keď položíme $n = 2m$ a $u^2 = w$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} = \sum_{i=1}^{2m-1} w^i = w^m + (w^m + 1) \sum_{i=1}^{m-1} w^i. \tag{2}$$

Z toho, že pre ľubovoľné $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ platí nerovnosť $(w^i - 1)(w^{m-i} - 1) \geqq 0$, vyplýva po jednoduchej úprave

$$w^i + w^{m-i} \leqq w^m + 1.$$

Súčtom všetkých týchto nerovností pre $1 \leqq i \leqq m-1$ dostaneme

$$2 \sum_{i=1}^{m-1} w^i \leqq (m-1)(w^m + 1).$$

Z nerovnosti $(w^m - 1)^2 \geqq 0$ ďalej vyplýva $w^m \leqq \frac{1}{4}(w^m + 1)^2$. Dosadením získaných nerovností do (2) dostaneme odhad

$$\sum_{i=1}^{n-1} u^{2i} \leqq \frac{(w^m + 1)^2}{4} + (w^m + 1) \cdot \frac{m-1}{2}(w^m + 1) = \frac{n-1}{4}(u^n + 1)^2,$$

ktorý využijeme v (1). Po úprave ihneď vyjde

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \geqq \frac{4}{n-1}.$$

Rovnosť, s ohľadom na použité nerovnosti, nastáva práve vtedy, keď $u = 1$ a $a_1 = \ldots = a_{n-1}$, t. j. práve vtedy, keď $a_i = -2/(n-1)$ pre všetky $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

43. Medzinárodná matematická olympiáda

43. ročník Medzinárodnej matematickej olympiády (IMO) sa uskutočnil v Glasgowe v dňoch 19. 7. – 30. 7. 2002.

IMO je súťažou jednotlivcov. Každá zúčastnená krajina na ňu vysiela reprezentačné družstvo zložené najviac zo šiestich súťažiacich, ktorých sprevádzajú (aspoň) dvaja vedúci. Účasť na 43. IMO bola rekordná: 479 súťažiacich z 84 štátov. Slovenské družstvo tvorili *Radovan Bauer* z Gymnázia Poštová v Košiciach, *Peter Bella* z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, *Michal Burger* z Gymnázia na Grösslingová v Bratislave, *Andrej Osuský* z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, *Katarína Quittnerová* z Gymnázia Bilíkova v Bratislave a *Marek Tesař* z Gymnázia Boženy Slančíkovej Timravy v Lučenci. Vedúcim výpravy SR a zástupcom v medzinárodnej jury bol *doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.* zo Žilinskej univerzity, pedagogickým vedúcim bol *Juraj Földes* z FMFI UK Bratislava.

Pravidlá súťaže sú veľmi podobné pravidlám nášho celoštátneho kola. Súťaží sa dva dni; študenti dostanú každý deň 3 úlohy v ich rodnom jazyku, na vyriešenie ktorých majú 4,5 hodiny čistého času. Po skončení súťaže riešenia prezrú vedúci príslušnej krajiny a svoj návrh hodnotenia podľa vopred pripravených bodovacích schém obhajujú pred koordinátormi. Za správne vyriešenú úlohu môže súťažiaci získať maximálne 7 bodov. Výsledky družstva SR uvádza tabuľka.

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Radovan Bauer	7	7	1	7	2	0	24	striebro
Peter Bella	6	6	1	1	1	0	15	bronz
Michal Burger	7	1	0	7	2	0	17	bronz
Andrej Osuský	7	0	1	7	5	0	20	bronz
Katarína Quittnerová	7	7	0	7	2	0	23	striebro
Marek Tesař	5	6	1	7	1	0	20	bronz

Ako obvykle, jury bola izolovaná od súťažiacich a 4 dni veľmi starostlivo vyberala príklady. Výber príkladov sa totiž riadi dvoma hlavnými kritériami – musia byť zastúpené aspoň štyri oblasti stredoškolskej matematiky a podľa stupňa obťažnosti by mali byť dve úlohy ľahšie, dve stredne ťažké a dve ťažké.

Maximálny počet 42 bodov dosiahli a absolútnymi víťazmi sa stali dvaja Číňania *Yunhao Fu* a *Botong Wang* a jeden Rus *Andrej Chaliavin*. Na druhom konci tabuľky 0 bodov „dosiahlo“ 21 účastníkov. Všetkých 6 čínskych žiakov získalo zlaté medaily a čínske družstvo s 212 bodmi (z 252 možných) získalo aj prvenstvo síce v neoficiálnej, ale predsa len hodne sledovanej súťaži družstiev. Tento rok bola Čína dosť tesne „prenasledovaná“ tradične veľmi silným družstvom Ruska – 204 bodov, 6 zlatých medailí. Na ďalších popredných miestach neboli žiadne veľké prekvapenia.

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	6	0	0	212	43.	Macedónsko	0	1	1	73
2.	Rusko	6	0	0	204	44.	Nórsko	1	0	1	72
3.	USA	4	1	0	171	45.	Chorvátsko	0	0	2	70
4.	Bulharsko	3	2	1	167	46.	Mexiko	0	0	3	67
5.	Vietnam	3	1	2	166	47.	Grécko	0	0	2	62
6.	Južná Kórea	1	5	0	163	48.	Moldavsko	0	0	2	60
7.	Tchaj-wan	1	4	1	161		Švédsko	0	0	2	60
8.	Rumunsko	2	3	1	157		Uzbekistan	0	0	0	60
9.	India	1	3	2	156	51.	Peru	0	0	2	59
10.	Nemecko	2	1	2	144	52.	Belgicko	0	0	1	58
11.	Irán	0	4	2	143		Venezuela	0	1	1	58
12.	Kanada	1	3	1	142	54.	Holandsko	0	0	1	55
	Maďarsko	1	2	3	142	55.	Dánsko	0	0	0	53
14.	Bielorusko	1	2	3	135	56.	Macao	0	0	3	50
	Turecko	1	1	4	135		Rakúsko	0	0	1	50
16.	Japonsko	1	3	1	133	58.	Slovinsko	0	0	1	46
	Kazachstán	0	3	3	133	59.	Turkmenistan	0	0	1	45
18.	Izrael	0	3	3	130	60.	Španielsko	0	0	1	44
19.	Francúzsko	0	2	3	127		Švajčiarsko	0	0	1	44
20.	Ukrajina	1	3	0	124	62.	Bosna a Hercegovina	0	0	1	42
21.	Brazília	0	1	5	123	63.	Maroko	0	0	1	39
	Poľsko	0	4	1	123	64.	Indonézia	0	0	1	38
	Thajsko	0	2	2	123	65.	Azerbajdžan	0	0	1	37
24.	Hongkong	1	2	2	120	66.	Island	0	0	0	36
25.	Slovensko	0	2	4	119	67.	Arménsko	0	0	0	33
26.	Austrália	1	2	1	117	68.	Cyprus	0	0	0	29
27.	Veľká Británia	0	2	2	116	69.	Malajzia	0	0	0	26
28.	Česká republika	0	2	3	115	70.	Albánsko	0	0	1	25
29.	Juhoslávia	0	1	5	114		Írsko	0	0	0	25
30.	Singapur	0	2	2	112	72.	Trinidad a Tobago	0	0	0	22
31.	Argentína	0	0	5	96		Tunisko	0	0	0	22
32.	JAR	0	1	3	90	74.	Filipíny	0	0	0	18
33.	Taliansko	0	0	5	88	75.	Kirgizstan	0	0	0	17
34.	Gruzie	0	0	2	84		Portoriko	0	0	0	17
35.	Mongolsko	0	0	3	82	77.	Srí Lanka	0	0	0	16
	Nový Zéland	1	0	0	82	78.	Portugalsko	0	0	0	15
37.	Kolumbia	0	0	3	81	79.	Luxembursko	0	0	0	12
38.	Fínsko	0	0	3	79	80.	Paraguaj	0	0	0	11
39.	Kuba	0	0	2	78	81.	Guatemala	0	0	0	4
40.	Estónsko	0	2	0	75	82.	Ekvádor	0	0	0	3
	Lotyšsko	0	1	2	75	83.	Kuvajt	0	0	0	2
42.	Litva	0	1	2	74	84.	Uruguaj	0	0	0	1

Z nášho hľadiska je určite zaujímavá sekvencia od 20. do 28. miesta. Deväť európskych krajín skončilo pred nami, dvadsaťsedem za nami. Celé neoficiálne poradie ukazuje tabuľka. Pri troche šťastia (najmä pri úlohe číslo 5) sme mohli skončiť pred veľmi silnými celkami Ukrajiny a Poľska. S výkonom našich však možno vyjadriť spokojnosť, veď všetci získali medaily.

IMO pripravili organizátori vcelku dobre, aj keď bolo každému účastníkovi jasné, že sme v Škótsku. Otvorenie súťaže prebehlo v aule univerzity *Strathclyde* v Glasgowe. Je to krásna stavba, bývalá katedrála, ale pre značne menší počet ľudí. Počas celej IMO boli organizačné problémy s autobusmi; je treba dodať, že pršalo veľmi často, takže kým sme do autobusu prišli, rástli sme ako tá slávna tráva v Škótsku – tá je však skutočne nádherná. Spôsob hodnotenia úloh sa vedúci výprav dozvedeli až v noci okolo 23:00, pričom ráno bolo treba ísť obhajovať body pred koordinačné komisie. Obvykle jeden deň pred vyhlásením výsledkov býva celodenný výlet. Pre jury to býva jediný voľný deň – tentoraz to bola nedeľa. Plavba riečno-morskou historickou loďou Wawerley od mora riekou Clyde do Glasgowa by bol krásna, keby celý čas nepršalo (to nie je chyba usporiadateľov) a keby sa 970 pasažierov dostalo k nedeľnému obedu trochu skôr, ako o 17:30. A zo záverečného banketu v pivničných priestoroch asi dve tretiny „dospelákov“ odišlo behom prvých dvoch hodín. Tieto priestory však nepochybne poskytli nemálo zábavy pre súťažiacich – vlastne teraz už oslavujúcich študentov.

Jedným z najväčších prínosov IMO je stretávanie mladých ľudí, ktorý majú radi matematiku. Tomu napomáhali napríklad aj „medzištátne“ zápasy v rôznych športoch, spoločné stravovanie a ubytovanie. Myslím, že 42. IMO zanechala na väčšine účastníkov veľmi dobrý dojem.

Na poslednom zasadnutí jury bol zvolený aj nový predseda IMO. Stal sa ním *József Pelikán* (ELTE Budapešť), mimochodom držiteľ jednej striebornej a troch zlatých medailí z IMO.

Ďalšia, v poradí 44., IMO sa bude konať v Tokiu 7. – 19. 7. 2003; potom by mali nasledovať Grécko a Mexiko.

Dovolím si aj touto cestou v mene SK MO poďakovať firme EuroTel, ktorá v rámci sponzorovania poskytla našej 8-člennej výprave batohy, čapice a olympijské tričká a žiakom aj spomienkové a darčekové predmety, ktoré mohli rozdať pri nadväzovaní priateľstiev.

Vojtech Bálint, Juraj Földes

Zadania úloh MMO

Úloha 1.
Nech n je prirodzené číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x + y < n$. Každý bod z množiny T je ofarbený buď červenou, alebo modrou farbou. Ak je bod (x, y) červený, sú červené aj všetky body $(x', y') \in T$, pre ktoré platí $x' \leqq x$ a $y' \leqq y$. Definujme X-množinu ako množinu n modrých bodov majúcich rôzne x-ové súradnice a Y-množinu ako množinu n modrých bodov majúcich rôzne y-ové súradnice. Dokážte, že počet X-množín je rovný počtu Y-množín.

(Kolumbia)

Úloha 2.
Nech BC je priemer kružnice Γ so stredom O. Bod A leží na kružnici Γ tak, že $0^\circ < |\sphericalangle AOB| < 120^\circ$. Nech D je stred toho oblúka AB, na ktorom neleží bod C. Priamka vedená bodom O rovnobežne s DA pretne priamku AC v bode J. Os úsečky OA pretne kružnicu Γ v bodoch E a F. Dokážte, že bod J je stred kružnice vpísanej trojuholníku CEF. *(Južná Kórea)*

Úloha 3.
Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $m, n \geqq 3$ také, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel a, pre ktoré je

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo. *(Rumunsko)*

Úloha 4.
Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Všetky kladné delitele čísla n označíme $d_1, d_2, \ldots, d_k$, kde

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k$.

(a) Dokážte, že $D < n^2$.

(b) Určte všetky n, pre ktoré je číslo D deliteľom čísla n^2. *(Rumunsko)*

Úloha 5.
Nech $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pre ľubovoľné $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. *(India)*

Úloha 6.
V rovine sú dané kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ s polomerom 1, kde $n \geqq 3$. Ich stredy označme po rade $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Predpokladajme, že každá priamka pretína najviac

dve z daných kružníc. Dokážte, že

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq n} \frac{1}{|O_iO_j|} \leqq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(Ukrajina)

Riešenia úloh MMO

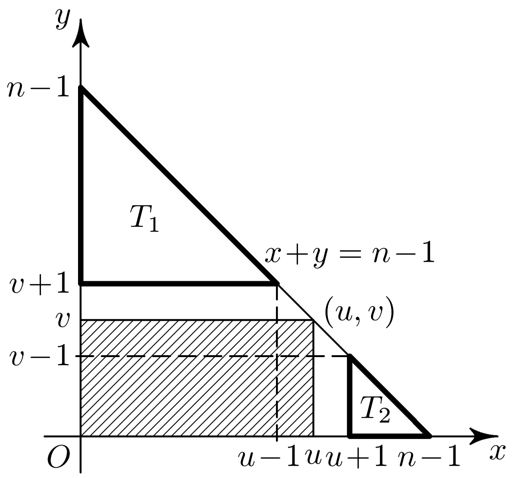
Úloha 1.
Pre každé $i = 0, 1, \ldots, n$ označme a_i (resp. b_i) počet modrých bodov s x-ovou (resp. y-ovou) súradnicou rovnou číslu i. Pretože X-množina je každá množina modrých bodov, ktorých x-ové súradnice sú čísla $0, 1, \ldots, n-1$ (každé práve raz), je počet všetkých X-množín rovný súčinu $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$; podobne počet všetkých Y-množín je rovný súčinu $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$. Našou úlohou je dokázať rovnosť

$$a_0 a_1 \ldots a_{n-1} = b_0 b_1 \ldots b_{n-1}. \tag{1}$$

Ukážeme, že na oboch stranách (1) sú dva rovnaké súbory činiteľov, ktoré sa môžu líšiť iba poradím, čo budeme zapisovať ako rovnosť neusporiadaných n-tíc

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]. \tag{2}$$

Rovnosť (2) dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na číslo n. Predstavme si, že body z T sú rozdelené do skupín na jednotlivých priamkach $x + y = k$ $(0 \leqq k \leqq n-1)$. Ak $n = 1$, je všetko jasné, vtedy totiž platí buď $a_0 = b_0 = 1$, alebo $a_0 = b_0 = 0$ (podľa toho, či je bod $(0,0)$ modrý, alebo červený). Predpokladajme teraz, že $n > 1$. Ak je červený niektorý bod (u, v) na „krajnej“ priamke $x + y = n - 1$, môžeme použiť indukčný predpoklad pre množiny mrežových bodov ležiacich v trojuholníkoch T_1 a T_2 z obr. 38 (ostatné body z T ležia vo vyfarbenom obdĺžniku a sú všetky ako bod (u, v) červené). Pre množinu T_1 platí rovnosť u-tic $[a_0, a_1, \ldots, a_{u-1}] = [b_{v+1}, b_{v+2}, \ldots, b_{n-1}]$, pre množinu T_2 zasa rovnosť v-tic $[a_{u+1}, a_{u+2}, \ldots, a_{n-1}] = [b_0, b_1, \ldots, b_{v-1}]$; pretože naviac $a_u = b_v = 0$, je rovnosť (2) dokázaná.



Obr. 38

Ak sú naopak na priamke $x+y=n-1$ iba modré body, odstránime ich z množiny T a pre redukovanú množinu $T'=\{(x,y)\in T : x+y<n-1\}$ využijeme indukčný predpoklad. Keď priradíme množine T' čísla a_i', b_i' $(0\leqq i\leqq n-2)$ rovnako, ako sme skôr priradili čísla a_i, b_i množine T, sú $(n-1)$-tice $[a_0',a_1',\dots,a_{n-2}']$ a $[b_0',b_1',\dots,b_{n-2}']$ zhodné; vzhľadom na modré body na priamke $x+y=n-1$ však máme $a_i=a_i'+1$ a $b_i=b_i'+1$ $(0\leqq i\leqq n-2)$ a k tomu ešte $a_{n-1}=b_{n-1}=1$, takže rovnosť (2) platí aj v tomto prípade. Dôkaz indukciou je ukončený a úloha je vyriešená.

Iné riešenie. (Podľa *Jaroslava Hájka.*) Pretože všetky čísla a_i a b_j ležia v množine $\{0,1,\dots,n\}$, stačí dokázať, že pre každý jej prvok k je počet indexov i s vlastnosťou $a_i=k$ rovný počtu indexov j s vlastnosťou $b_j=k$. Z podmienky úlohy zrejme vyplýva, že ľubovoľný bod $(i,j)\in T$ je modrý práve vtedy, keď spolu s ním sú modré aj všetky body z T nad ním a vpravo od neho. Preto počet indexov i s vlastnosťou $a_i=k$ dostaneme, keď od počtu p_k modrých bodov na priamke $x+y=n-k$ odpočítame počet p_{k+1} modrých bodov na priamke $x+y=n-(k+1)$; pritom kladieme $p_0=n$ a $p_{n+1}=0$, aby sme „ošetrili“ aj krajné hodnoty $k=0$ a $k=n$. Rovnakému rozdielu p_k-p_{k+1} je však rovný aj počet indexov j s vlastnosťou $b_j=k$. Tým sme dokázali rovnosť (2), a teda aj tvrdenie úlohy.

Iné riešenie. (Podľa *Tomáša Protivínskeho.*) Všetky červené body z T (pokiaľ vôbec existujú, inak je (1) triviálne splnená) zrejme vyplnia zjednotenie niekoľkých (povedzme q) obdĺžnikov $0\leqq x\leqq u_i$, $0\leqq y\leqq v_i$, ktorých (červené) pravé horné vrcholy (u_i,v_i) $(1\leqq i\leqq q)$ očíslujeme tak, aby platilo $0\leqq u_1<u_2<\ldots<u_q\leqq n-1$ a $n-1\geqq v_1>v_2>\ldots>v_q\geqq 1$ (obr. 39). Ak niektorý bod (u_i,v_i) leží na priamke $x+y=n-1$, platí $a_{u_i}=b_{v_i}=0$, takže súčiny na oboch stranách (1) sú nulové. Preto ďalej predpokladajme, že $u_i+v_i<n-1$ pre každé $i\in\{1,2,\dots,q\}$ (odtiaľ o. i. vyplýva, že $u_q<n-1$ a $v_1<n-1$). Teraz ľahko vyjadríme (kladné) počty a_i v jednotlivých intervaloch $0\leqq i\leqq u_1$, $u_1<i\leqq u_2$, …, $u_q<i\leqq n-1$ ako počty bodov z T, ktoré ležia nad hornou stranou príslušného „červeného“ obdĺžnika.

$$
\begin{aligned}
&a_i=n-1-i-v_1 \quad (0\leqq i\leqq u_1),\\
&a_i=n-1-i-v_2 \quad (u_1<i\leqq u_2),\\
&\quad\vdots\\
&a_i=n-1-i-v_q \quad (u_{q-1}<i\leqq u_q),\\
&a_i=n-1-i+1 \quad (u_q<i\leqq n-1).
\end{aligned}
$$

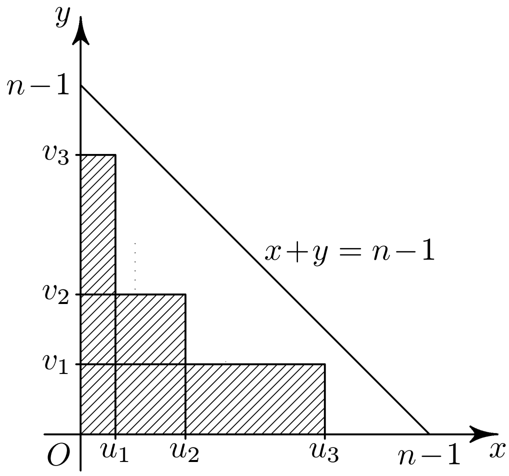
čiže

$$a_i=n-1-i-v_{s+1} \quad (u_s<i\leqq u_{s+1},\ 0\leqq s\leqq q),$$

kde naviac kladieme $u_0=v_{q+1}=-1$, $v_0=u_{q+1}=n-1$. Dostávame tak

$$\prod_{i=0}^{n-1}a_i=\prod_{s=0}^{q}\prod_{i=u_s+1}^{u_{s+1}}(n-1-i-v_{s+1})=\prod_{s=0}^{q}\frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_{s+1}-v_{s+1})!},$$

kde sme využili to, že každý súčin $c(c+1)(c+2)\dots(c+d)$ niekoľkých po sebe idúcich prirodzených čísel je rovný podielu faktoriálov $(c+d)!/(c-1)!$, pričom $0! = 1$. Premyslite si sami podľa obr. 39, aký geometrický význam majú hodnoty $c = n-1-u_{s+1}-v_{s+1}$ a $c+d = n-2-u_s-v_{s+1}$.



Obr. 39

Pre čísla b_j platí analogické vyjadrenie

$$b_j = n-1-j-u_s \quad (v_{s+1} < j \leqq v_s,\ 0 \leqq s \leqq q),$$

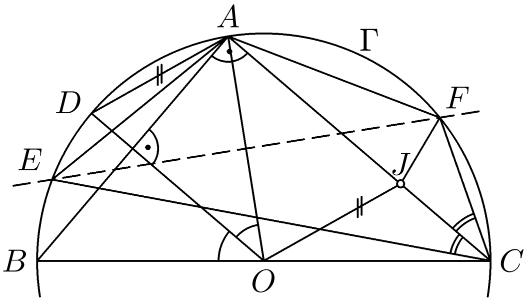
takže ich súčin je rovný

$$\prod_{j=0}^{n-1} b_j = \prod_{s=0}^{q} \prod_{j=v_{s+1}+1}^{v_s} (n-1-j-u_s) = \prod_{s=0}^{q} \frac{(n-2-u_s-v_{s+1})!}{(n-2-u_s-v_s)!}.$$

Vidíme, že nájdené „faktoriálové“ vyjadrenia oboch súčinov z (1) sa líšia iba v menovateľoch, a to o činitele $(n-2-u_s-v_s)!$ pre $s=0$ a $s=q+1$, ktoré sú však oba rovné $0! = 1$. Dôkaz rovnosti (1) je tak dokončený.

Úloha 2.
Na dôkaz tvrdenia potrebujeme ukázať, že bod J leží jednak na osi uhla ECF, jednak na osi uhla EFC. Úsečky AE a AF majú dĺžku rovnú polomeru r kružnice Γ, lebo sú súmerne združené s jej priemermi OE a OF (obr. 40). Zo zhodnosti tetív AE a AF vyplýva zhodnosť obvodových uhlov ECA a FCA, preto bod A, a teda aj bod J, leží na osi uhla ECF.

Podľa Tálesovej vety je uhol BAC nad priemerom BC pravý, a pretože OD je os úsečky AD, $OD \parallel AJ$, čo spolu s $OJ \parallel DA$ znamená, že $OJAD$ je rovnobežník. Preto



Obr. 40

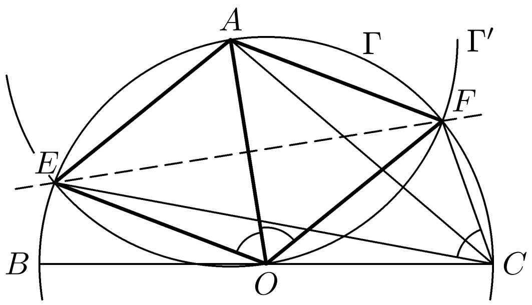
$|AJ| = |OD| = r$, čo spolu s rovnosťou $|AE| = |AF| = r$ znamená, že trojuholník JFA je rovnoramenný. Zo zhodnosti uhlov JFA a AJF potom vyplýva

$$\begin{aligned}|\sphericalangle JFE| &= |\sphericalangle JFA| - |\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle AJF| - |\sphericalangle ECA| = \\ &= |\sphericalangle AJF| - |\sphericalangle JCF| = |\sphericalangle JFC|.\end{aligned}$$

To znamená, že bod J leží na osi uhla EFC.

V prvej rovnosti práve prevedenej úpravy sme využili to, že bod J je vnútorným bodom trojuholníka CEF. To zaručuje podmienka $|\sphericalangle AOB| < 120°$, lebo potom leží bod D vnútri oblúka EA (trojuholník EOA je rovnostranný), teda „nad“ osou EF uhlopriečky OA rovnobežníka $OJAD$, takže jeho protiľahlý vrchol J leží v polrovine $EFO = EFC$. (Ako ľahko zistíme, pre bod A taký, že $|\sphericalangle AOB| = 120°$, vyjde $J = C$ a pre $|\sphericalangle AOB| > 120°$ už bod J padne dokonca mimo kruhu ohraničeného kružnicou Γ.)

Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení zistíme, že bod J leží na osi uhla ECF a že $OJAD$ je rovnobežník. Zo súmernosti podľa EF naviac vyplýva $|AE| = |OE| = |OA|$, takže AEO a AFO sú zhodné rovnostranné trojuholníky, t. j. $|\sphericalangle EOF| = 120°$. Odtiaľ jednak vyplýva, že uhol ECF má veľkosť $60°$, jednak vidíme, že body O a J ležia na kružnici $\Gamma' = (A; |AO|)$ (obr. 41), ktorej tetive EF prislúcha obvodový uhol $120°$. Ak je I stred kružnice vpísanej trojuholníku CEF, leží,



Obr. 41

ako už vieme, na polpriamke CA. Pre veľkosť uhla EIF potom máme

$$|\sphericalangle EIF| = 180^\circ - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CEF| - \tfrac{1}{2}|\sphericalangle CFE| = 90^\circ + \tfrac{1}{2}|\sphericalangle ECF| = 120^\circ,$$

čo znamená, že aj bod I leží na kružnici Γ'. Tá však pretína úsečku AC v jedinom bode, preto $J = I$.

Úloha 3.
Predpokladajme, že dvojica prirodzených čísel (m, n) má požadovanú vlastnosť. Zrejme platí $m > n$, v prípade $m \leqq n$ by totiž pre každé $a > 1$ platilo

$$0 < \frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1} < 1.$$

Pri delení mnohočlena $F(x) = x^m + x - 1$ mnohočlenom $G(x) = x^n + x^2 - 1$ nájdeme mnohočleny Q, R s celočíselnými koeficientami spĺňajúce rovnosť $F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$, pričom stupeň mnohočlena R je menší ako stupeň G. To znamená, že

$$\frac{R(x)}{G(x)} \to 0 \quad \text{pre } x \to \infty, \tag{1}$$

zároveň však z rovnosti

$$\frac{F(a)}{G(a)} = Q(a) + \frac{R(a)}{G(a)}$$

podľa podmienky úlohy vyplýva, že podiel $R(a)/G(a)$ je celé číslo pre nekonečne veľa prirodzených čísel a. To vzhľadom k (1) znamená, že len pre konečný počet z nich je $R(a)/G(a) \neq 0$, takže mnohočlen R má nekonečne veľa koreňov, je teda nulový, t. j. $R(x) = 0$ pre každé x. Ak teraz označíme $k = m - n > 0$, tak z vyjadrenia

$$Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{x^{n+k} + x - 1}{x^n + x^2 - 1} = x^k + \frac{-x^{k+2} + x^k + x - 1}{x^n + x^2 - 1} \tag{2}$$

vyplýva, že mnohočlen $G(x) = x^n + x^2 - 1$ delí mnohočlen $-x^{k+2} + x^k + x - 1$, ktorý možno rozložiť na súčin $(1 - x)(x^{k+1} + x^k - 1)$. Pretože $G(1) = 1 \neq 0$, mnohočlen $G(x)$ delí dokonca mnohočlen $H(x) = x^{k+1} + x^k - 1$, medzi ich stupňami preto platí vzťah $n \leqq k + 1$. Z nerovností $G(0) = -1 < 0$ a $G(1) = 1 > 0$ vyplýva, že $G(s) = 0$ pre niektoré reálne číslo $s \in (0, 1)$. Potom však tiež $H(s) = 0$, takže $s^n + s^2 - 1 = s^{k+1} + s^k - 1$, čiže $s^n - s^{k+1} = s^k - s^2$. Ľavá strana poslednej rovnosti je nezáporná (platí totiž $0 < s < 1$ a $n \leqq k+1$), takže podľa pravej strany musí platiť $k \leqq 2$. Podľa zadania úlohy však platí $n \geqq 3$, teda z nerovností $n \leqq k + 1$ a $k \leqq 2$ vychádza $n = 3$ a $k = 2$, odkiaľ $m = n + k = 5$. Dvojica $(m, n) = (5, 3)$ má naozaj požadovanú vlastnosť, lebo

$$\frac{x^5 + x - 1}{x^3 + x^2 - 1} = x^2 - x + 1.$$

Poznámka. Podané riešenie vyzerá zdanlivo jednoducho. Rozhodujúcim obratom je „čiastočné“ vydelenie (2), bez ktorého by sme následným postupom došli k rovnosti $s^{n+k} + s = s^n + s^2$, ktorej rozbor (pôvodné autorské riešenie) je veľmi náročný. Úpravu (2) a jej účinnosť objavil ešte pred vlastnou súťažou vedúci bulharskej delegácie *Sava Grozdev*. Nezmenilo to však nič na názore poroty, že úloha je najnáročnejšia z celej vybranej šestice. Výsledky súťažiacich to potvrdili.

Úloha 4.
a) Ak patrí číslo d k deliteľom čísla n, patrí k nim aj číslo n/d. Preto je rastúca k-tica deliteľov $n/d_k, n/d_{k-1}, \ldots, n/d_1$ zhodná s pôvodnou rastúcou k-ticou (všetkých) deliteľov $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Vzhľadom na zrejmé nerovnosti $k \leqq n$ a $d_j \geqq j$ preto platí

$$\begin{aligned} D &= d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k = \\ &= \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_{k-1}} \cdot \frac{n}{d_{k-2}} + \ldots + \frac{n}{d_2} \cdot \frac{n}{d_1} = \\ &= n^2\Big(\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k}\Big) \leqq \\ &\leqq n^2\Big(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}\Big) = \\ &= n^2\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) = \\ &= n^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < n^2. \end{aligned}$$

b) Ukážeme, že číslo D delí číslo n práve vtedy, keď n je prvočíslo. Ak je n prvočíslo, potom $k = 2$, $d_1 = 1$, $d_2 = n$ a $D = 1 \cdot n = n$, čo je skutočne deliteľ čísla n^2. Predpokladajme ďalej, že číslo n je zložené a označme p jeho najmenší prvočíselný deliteľ. Potom platí $k > 2$ a $d_{k-1} = n/p$, odkiaľ dostávame

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k > d_{k-1}d_k = \frac{n}{p} \cdot n = \frac{n^2}{p},$$

čo spolu s dokázanou časťou a) vedie k odhadu $n^2/p < D < n^2$. Odtiaľ už vyplýva, že D nedelí n^2, lebo číslo n^2/p je po čísle n^2 druhý najväčší deliteľ čísla n^2.

Úloha 5.
Ľahko overíme, že medzi funkcie spĺňajúce danú funkcionálnu rovnicu patria funkcie určené vzťahmi $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 1/2$ a $f_3(x) = x^2$. Ukážeme, že žiadna iná funkcia f požadovanú vlastnosť nemá.

Dosadením $x = y = z = 0$ do danej rovnice dostaneme $2f(0)\big(f(0) + f(t)\big) = 2f(0)$ pre každé t. Špeciálne pre $t = 0$ vychádza $4f(0)^2 = 2f(0)$, takže buď $f(0) = 0$, alebo $f(0) = 1/2$. V prípade $f(0) = 1/2$ podľa predošlého platí $1/2 + f(t) = 1$, a teda $f(t) = 1/2$ pre každé t.

Predpokladajme teraz, že $f(0) = 0$. Voľbou $z = t = 0$ v danej rovnici dostaneme $f(xy) = f(x)f(y)$ pre ľubovoľné x, y. Takú funkciu f nazývame multiplikatívna. Špeciálne platí $f(1) = f(1)^2$, takže buď $f(1) = 0$, alebo $f(1) = 1$. V prípade $f(1) = 0$ však $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) \cdot f(1) = 0$, t. j. $f(x) = 0$ pre každé x.

Zostáva teda preskúmať prípad, keď $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Keď dosadíme $x = 0$ a $y = t = 1$ do (1), dostaneme $2f(z) = f(-z) + f(z)$, čiže $f(z) = f(-z)$ pre každé z, to znamená, že f je párna funkcia. Ak teda ďalej ukážeme, že $f(x) = x^2$ pre každé $x > 0$, bude rovnaký vzťah platiť pre každé reálne číslo x. Keď v danej rovnici položíme $y = z = t = 1$, dostaneme pre každé x rovnosť

$$2(f(x) + 1) = f(x - 1) + f(x + 1),$$

z ktorej možno vypočítať hodnotu $f(x+1)$, ak poznáme hodnoty $f(x)$ a $f(x - 1)$. Týmto postupom možno jednoduchou indukciou overiť, že $f(n) = n^2$ pre každé prirodzené číslo n (keďže to platí pre $n = 0$ a $n = 1$). Odtiaľ už vzhľadom na to, že f je multiplikatívna, pomerne jednoducho vyplýva, že rovnosť $f(x) = x^2$ platí pre každé kladné racionálne číslo x. Skutočne, ku každému takému x existuje prirodzené n také, že číslo nx je prirodzené; ako už vieme, rovnosti $f(n) = n^2$ a $f(nx) = (nx)^2$ platia, v ich dôsledku dostávame

$$n^2x^2 = (nx)^2 = f(nx) = f(n)f(x) = n^2f(x),$$

odkiaľ $f(x) = x^2$. Posledná rovnosť bude platiť aj pre kladné iracionálne čísla x, keď ukážeme, že funkcia f je na intervale $(0, \infty)$ neklesajúca. Všimnime si najprv, že pre každé reálne x platí $f(x) = f\bigl(\sqrt{|x|}\bigr)^2 \geqq 0$; preto má funkcia f iba nezáporné hodnoty. Ak $0 < v < u$, potom

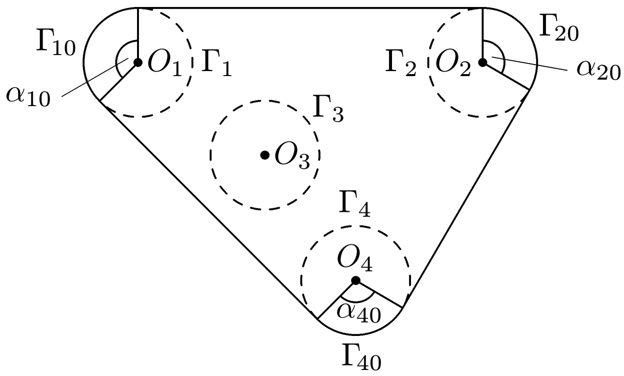
$$f(v) = f(\sqrt{v})^2 = \bigl(f(\sqrt{v}) + 0\bigr)^2 \leqq \bigl(f(\sqrt{v}) + f(\sqrt{u - v})\bigr)^2 = f(u),$$

kde posledná rovnosť vyplýva z danej rovnice voľbou $x = t = \sqrt{v}$ a $y = z = \sqrt{u - v}$. Ukázali sme, že f je skutočne na intervale $(0, \infty)$ neklesajúca a celý dôkaz je hotový.

Úloha 6.

Poznamenajme najprv, že žiadne dve z daných kružníc nemajú spoločný bod, lebo spoločným bodom dvoch kružníc Γ_i, Γ_j by bolo možné viesť priamku, ktorá pretína ľubovoľnú tretiu kružnicu Γ_k.

Uvažujme teraz konvexný obal rovinnej množiny, ktorá je zjednotením danej n-tice kružníc. Hranica tohto obalu sa skladá z niekoľkých úsekov spoločných vonkajších dotyčníc dvojíc daných kružníc a niekoľkých ich oblúkov (obr. 42). Príslušný oblúk



Obr. 42

kružnice Γ_i označíme Γ_{i0} a jeho veľkosť v radiánoch α_{i0}. (Ak má kružnica Γ_i s hranicou obalu spoločný najviac jeden bod, položíme $\Gamma_{i0} = \emptyset$ a $\alpha_{i0} = 0$.) Pretože skúmaná hranica je hladká uzavretá krivka, zrejme platí rovnosť

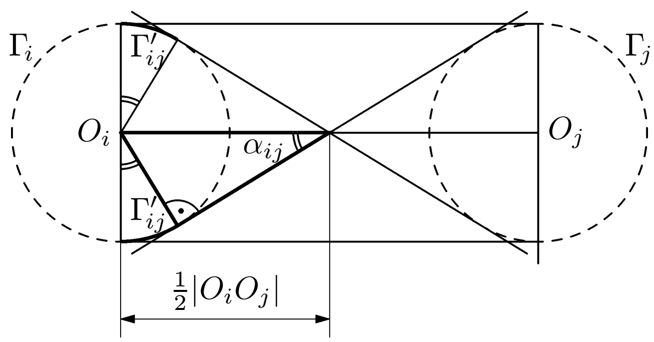
$$\alpha_{10} + \alpha_{20} + \ldots + \alpha_{n0} = 2\pi. \tag{1}$$

Ďalej budeme potrebovať nasledovnú vlastnosť každého oblúka Γ_{i0}: Ak je T ľubovoľný vnútorný bod oblúka Γ_{i0}, tak dotyčnica ku kružnici Γ_i s bodom dotyku T nemá spoločný bod so žiadnou ďalšou kružnicou Γ_j, $j \neq i$.

Vyberme teraz ľubovoľné dve dané kružnice Γ_i, Γ_j a na prvej z nich, kružnici Γ_i, uvažujme body T s touto vlastnosťou: Dotyčnica ku kružnici Γ_i s bodom dotyku T má aspoň jeden spoločný bod s kružnicou Γ_j. Všetky také body T vyplnia na kružnici Γ_i dva zhodné oblúky Γ_{ij} a Γ'_{ij}, ktorých krajné body sú body dotyku spoločných dotyčníc danej dvojice kružníc (obr. 43). Pre veľkosť α_{ij} týchto oblúkov podľa obrázka platí

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{1}{\frac{1}{2}|O_iO_j|}, \quad \text{odkiaľ} \quad \frac{1}{|O_iO_j|} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{2} < \frac{\alpha_{ij}}{2}, \tag{2}$$

pretože $\sin \alpha < \alpha$ pre každé $\alpha \in (0, \pi/2)$.



Obr. 43

Podľa predchádzajúceho popisu sme na každej kružnici Γ_i vyznačili $2n-1$ oblúkov – oblúk Γ_{i0} a $(n-1)$ párov oblúkov Γ_{ij} a Γ'_{ij}, kde $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Podľa zadania úlohy žiadne dva z týchto $(2n-1)$ oblúkov nemajú spoločný vnútorný bod, takže pre súčet ich veľkostí platí odhad

$$\alpha_{i0} + 2 \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n, \\ j \neq i}} \alpha_{ij} \leqq 2\pi,$$

ktorý spolu s (2) vedie k nerovnosti

$$\sum_{\substack{1 \leqq j \leqq n, \\ j \neq i}} \frac{1}{|O_i O_j|} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\,\alpha_{i0}$$

pre každé $i = 1, 2, \dots, n$. Keď sčítame týchto n nerovností, tak vzhľadom na vzťah (1) a zrejmé rovnosti $|O_i O_j| = |O_j O_i|$ dostaneme

$$2 \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{1}{|O_i O_j|} < n \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i0} = \frac{(n-1)\pi}{2},$$

odkiaľ po delení dvoma vychádza žiadaná nerovnosť.

Poznámka. Dôkaz, ktorý sme uviedli, patrí vedúcemu kolumbijskej delegácie *F. Ardilovi* a je oveľa jednoduchší ako pôvodné autorské riešenie.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Uvažujme štvorcovú maticu A rozmerov $n \times n$, ktorej prvky sú nuly a jednotky. Pod *riadkovou* resp. *stĺpcovou výmenou* máme na mysli výmenu ľubovoľných dvoch riadkov resp. ľubovoľných dvoch stĺpcov matice. V tejto úlohe sa zaujímame o to, či je možné postupnosťou výmen transformovať maticu A na maticu, ktorá má na hlavnej diagonále iba jednotky (hlavnú diagonálu tvoria prvky $A[1,1], A[2,2], \ldots, A[n,n]$).

V mnohých aplikáciách (napr. riešenie sústav lineárnych rovníc) je výhodné danú maticu transformovať na ekvivalentnú maticu tak, aby hlavná diagonála obsahovala „veľké" prvky. V tejto úlohe nuly reprezentujú „malé" a jednotky „veľké" prvky.

Súťažná úloha

Navrhnite čo najefektívnejší algoritmus, ktorý transformuje pomocou riadkových a stĺpcových výmen danú maticu tak, aby mala na diagonále samé jednotky, alebo zistí, že to nie je možné.

Príklad

Matica A:	**Výsledok:**
`0 1 0 1`	`1 1 0 0`
`1 1 0 1`	`1 1 0 1`
`1 1 0 0`	`0 0 1 0`
`0 0 1 0`	`0 1 0 1`

Maticu možno transformovať. Stačí vymeniť tretí a štvrtý riadok a potom prvý a štvrtý stĺpec.

Príklad

Matica A:	**Výsledok:**
`0 1 0`	Maticu nemožno transformovať.
`1 1 0`	
`1 1 0`	

P – I – 2

Vo výskumnom ústave potrubí a rúr vyvinuli nový druh robota určeného na čistenie teplovodných potrubí. Robot sa sústavou rúr pohybuje podľa dopredu určeného postupu.

Technológia čistenia je taká, že robot musí prejsť každou rúrou v sústave dvakrát (nezáleží ktorým smerom) – pri prvom prechode vykonáva chemické čistenie a pri druhom mechanické dočisťovanie. Robot môže vojsť do rúry z ľubovoľného konca, avšak ak raz vojde do rúry, musí ju celú prejsť.

Sústava rúr pozostáva z n uzlov očíslovaných od 1 po n, medzi ktorými vedie m teplovodných rúr očíslovaných od 1 po m. Každá rúra vedie medzi dvojicou uzlov a nemá žiadne odbočky alebo vetvenia. Medzi každou dvojicou uzlov vedie najviac jedna rúra. Môžete predpokladať, že sústava rúr je súvislá, t.j. robot sa môže dostať na ľubovoľné miesto sústavy. Robot začína v uzle číslo 1 a po skončení čistenia sa musí opäť do tohto uzla vrátiť.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý pomôže plánovať trasu čistiaceho robota. Váš program načíta popis sústavy potrubí a zistí, či existuje trasa, ktorá začína aj končí v uzle 1 a prechádza každou rúrou práve dvakrát. Ak takáto trasa existuje, váš program ju vypíše.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `rury.in` obsahuje dve kladné celé čísla n a m ($n \leq 100$), oddelené medzerou. Každý z nasledujúcich m riadkov popisuje jednu rúru. Obsahuje dve čísla oddelené medzerou – koncové uzly rúry.

Formát výstupu Výstupný súbor `rury.out` pozostáva z jediného riadku, obsahujúceho $2m + 1$ čísel uzlov oddelených medzerami v poradí, v akom ich má robot navštíviť na navrhovanej trase. Prvé a posledné číslo na riadku musí byť 1. V prípade, že neexistuje trasa, ktorá prejde každú rúru práve dvakrát, výstupný súbor bude obsahovať jediný riadok so slovom `NIE`. Ak existuje vhodných trás viac, vypíšte ľubovoľnú (jednu) z nich.

Príklad

Súbor `rury.in`
```
5 6
1 3
1 4
1 5
2 4
3 5
4 5
```

Súbor `rury.out`
```
1 3 5 4 1 5 4 2 4 1 5 3 1
```

P – I – 3

V rovine je daných $2n$ bodov, z toho n bielych a n čiernych. *Spravodlivá priamka* je taká priamka, ktorá:

- prechádza bodom $[0, 0]$,
- neprechádza žiadnym čiernym ani bielym bodom,
- rozdeľuje rovinu na dve polroviny, pričom v jednej z týchto polrovín je rovnako bielych bodov, ako v druhej čiernych, a naopak.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý zo súboru `priamka.in` načíta súradnice bielych a čiernych bodov a do súboru `priamka.out` vypíše jednu spravodlivú priamku.

Môžete predpokladať, že žiadne tri zadané body neležia na jednej priamke, a že bod $[0, 0]$ neleží na žiadnej priamke určenej dvoma zadanými bodmi. Všetky zadané body majú celočíselné súradnice.

Formát vstupu Súbor `priamka.in` na prvom riadku obsahuje číslo n. Každý z nasledujúcich $2n$ riadkov obsahuje súradnice jedného bodu oddelené medzerou. Prvých n bodov je bielych, druhých n bodov je čiernych.

Formát výstupu Súbor `priamka.out` na prvom riadku obsahuje ľubovoľný bod rôzny od $[0, 0]$, ktorým hľadaná spravodlivá priamka prechádza. Súradnice oddeľte medzerou. Ak spravodlivá priamka pre danú množinu bodov neexistuje, vypíšte do súboru slovo `NIE`.

Príklad

Súbor `priamka.in`

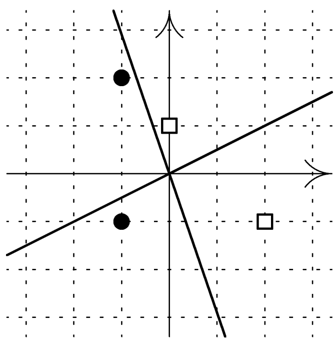
```
2
0 1
2 -1
-1 -1
-1 2
```

Súbor `priamka.out`

```
2 1
```

Iné správne riešenie

```
-1.0 2.9
```



Obr. 44

Pomôcka: Nech $A_1 = [x_1, y_1]$, $A_2 = [x_2, y_2]$ a $A_3 = [x_3, y_3]$ sú body v rovine. Ak je hodnota $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$ kladná, bod A_3 leží naľavo od polpriamky A_1A_2. Ak je táto hodnota záporná, tak leží napravo a ak je táto hodnota nulová, tak bod A_3 leží na priamke A_1A_2.

P – I – 4

Komparátorové siete

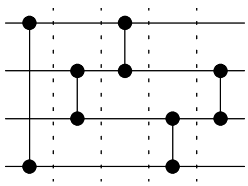
Komparátorové siete sa využívajú pri návrhu paralelných algoritmov. Tiež je jednoduché ich realizovať pomocou elektronických obvodov. *Komparátor* je jednoduché zariadenie, ktoré dostane na vstupe dve čísla, porovná ich a na vrchnom zo svojich výstupov vráti menšie z týchto dvoch čísel a na spodnom to väčšie. Z komparátorov možno zostaviť zložitejšie obvody, ktoré budeme volať komparátorové siete.

Komparátorová sieť pozostáva z n vodorovne usporiadaných *vodičov*, ktoré sú na niektorých miestach poprepájané komparátormi. Komparátory sú usporiadané do *vrstiev*, ktoré zodpovedajú krokom výpočtu. Na začiatku výpočtu (v kroku 0) sieť dostane na vstup n čísel. Po skončení kroku $k - 1$ sa výstupy z kroku $k - 1$ prenesú vodičmi na komparátory vo vrstve k. Komparátor vo vrstve k spája vždy dva vodiče (nemusia byť susedné). Ak je na spodnom z nich menšia hodnota ako na vrchnom, vymení tieto hodnoty, v opačnom prípade ich nechá tak. V jednej vrstve môže byť aj viacero komparátorov (výpočet sa odohrá naraz, paralelne), ale v jednej vrstve môže jeden vodič vstupovať najviac do jedného komparátora. Po skončení celého výpočtu sú na výstupoch siete tie isté čísla ako na vstupe, iba v zmenenom poradí.

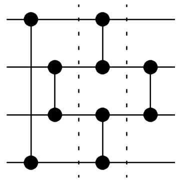
Graficky sa vodiče zobrazujú ako vodorovné čiary, komparátory ako zvislé spojnice svojich vstupných vodičov. Komparátory v jednej vrstve sa kreslia zvislo nad seba, prípadne do niekoľkých susediacich stĺpcov. Jednotlivé vrstvy oddelíme čiarkovanou čiarou. Výpočet prebieha zľava doprava.

Pri návrhu sietí sa pokúšame zostrojiť ich tak, aby čas výpočtu bol čo najmenší, t.j. aby sieť mala čo najmenej vrstiev. Druhým dôležitým kritériom je počet komparátorov (od tohoto počtu môže závisieť napríklad cena výroby siete).

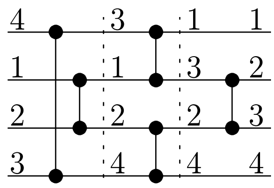
Príklad



Obr. 45



Obr. 46

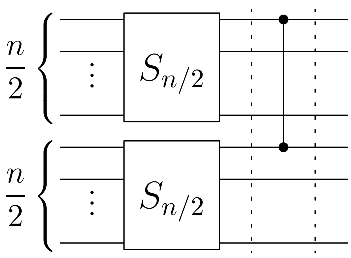


Obr. 47

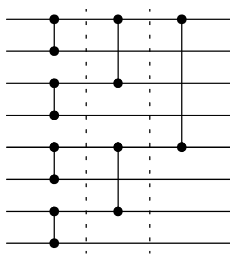
Uvažujme najľavejšiu sieť na obrázku. Táto sieť dostane štyri vstupy a vráti ich utriedené od najmenšieho po najväčší. Po prvých dvoch krokoch výpočtu bude najmenší vstup buď na prvom alebo druhom vodiči a najväčší vstup na treťom alebo štvrtom. Ďalšie dva kroky umiestnia najmenší a najväčší prvok na ich miesto a v poslednom kroku dotriedime druhý a tretí vodič. Všimnite si, že prvý a druhý komparátor, podobne ako tretí a štvrtý, je možno zlúčiť do jednej vrstvy bez toho, aby sa zmenil výsledok výpočtu. Výsledná rýchlejšia sieť je na prostrednom obrázku. Pravý obrázok ukazuje priebeh výpočtu pre vstup $4, 1, 2, 3$.

Príklad Zostrojte sieť, ktorá na vstupe dostane n čísel a na výstupe umiestni najmenšie z týchto čísel na vodič 1 (na poradí ostatných čísel nám nezáleží). Môžete predpokladať, že n je mocnina dvoch.

Riešenie Sieť zostrojíme rekurzívne. Označme S_n sieť, ktorá úlohu rieši pre n vstupov. Ak $n = 1$, S_n nebude obsahovať žiaden komparátor, lebo máme iba jeden vstup. Predpokladajme teda, že $n > 1$. Vstupy rozdelíme na dve polovice (hornú a dolnú). Na každú polovicu aplikujeme sieť $S_{n/2}$. Tieto dve siete polovičnej veľkosti môžu pracovať paralelne. Po skončení ich výpočtu máme na vodiči 1 najmenší z hornej polovice vstupov a na vodiči $n/2+1$ máme najmenší z dolnej polovice. Teraz stačí pridať jeden komparátor medzi vodičmi 1 a $n/2 + 1$ a dostaneme celkové minimum na prvom vodiči. Sieť S_n teda pozostáva z dvoch sietí $S_{n/2}$ a z jedného komparátora. Konštrukcia siete S_n je zobrazená na nasledujúcom obrázku vľavo, vpravo je príklad výslednej siete pre $n = 8$.



Obr. 48



Obr. 49

Všimnime si, že hĺbka rekurzie je $\log_2 n$, keďže veľkosť vstupu sa v každom rekurzívnom kroku zníži na polovicu. Každá úroveň rekurzie pridá do výslednej siete jednu vrstvu, preto sieť S_n má $\log_2 n$ vrstiev. Počet použitých komparátorov je v poslednej vrstve 1, v každej ďalšej vrstve odzadu sa vždy zdvojnásobí. Nech počet vstupov je $n = 2^k$. Potom počet použitých komparátorov je $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1$ (súčet geometrickej postupnosti). Dostali sme teda sieť, ktorá má $O(\log n)$ vrstiev a používa $O(n)$ komparátorov.

Súťažné úlohy

a) Napíšte program, ktorý bude simulovať komparátorové siete. Program vo vstupnom súbore dostane komparátorovú sieť a hodnoty vstupov. Navrhnite a popíšte vlastný vstupný formát pre zápis komparátových sietí do súboru. Váš program by mal vypočítať výsledok výpočtu komparátorovej siete a tiež by mal umožňovať graficky alebo semigraficky zobrazovať priebeh výpočtu siete. Vo vašom riešení uveďte aj príklady vstupu a výstupu z vášho programu.

b) Na vstupe je $n - 1$ čísel utriedených od najmenšieho po najväčšie (prvých $n - 1$ vstupov). Posledný vstup obsahuje ľubovoľné číslo. Navrhnite komparátorovú sieť, ktorá zatriedi posledné číslo do tejto postupnosti (tzn. na výstupe bude všetkých n čísel v utriedenom poradí). Môžete predpokladať, že n je mocnina dvoch. Snažte sa, aby vaša sieť bola čo najrýchlejšia.

P – II – 1

Uvažujme maticu A rozmerov $m \times n$, ktorej prvky sú nuly a jednotky. *Orámovaným obdĺžnikom* budeme nazývať takú podmaticu, ktorá má aspoň dva riadky, aspoň dva stĺpce a ktorej prvý a posledný riadok, ako aj prvý a posledný stĺpec obsahujú iba jednotky. Vnútro obdĺžnika môže obsahovať ľubovoľné prvky.

Súťažná úloha

Navrhnite algoritmus, ktorý v danej matici A nájde najväčší orámovaný obdĺžnik. Veľkosť orámovaného odĺžnika s i riadkami a j stĺpcami je $i \cdot j$ (t.j. hľadáme orámovaný obdĺžnik, pre ktorý bude súčin $i \cdot j$ najväčší možný). Môžete predpokladať, že aspoň jeden orámovaný obdĺžnik sa v matici nachádza. Ak existuje takých obdĺžnikov viac, stačí nájsť ľubovoľný z nich.

Príklad

Vstup:

$m = 11$, $n = 24$

```
000000000000000000000000
001111100000000001100000
001100111111111111111110
001011111111111111111110
001010100000100011100000
001111100100100011100000
000010001100100111111000
000010000000100100101000
010011111111100100001000
001000000000000011111000
000000000000000000000000
```

Výstup:

Najväčší orámovaný obdĺžnik má rozmery 6×9 a jeho ľavý horný roh je v 4. riadku a 5. stĺpci.

P – II – 2

Výskumný ústav potrubí a rúr má nový problém, tentokrát so sústavou orientovaných rúr. Na vyčistenie takejto sústavy je potrebné, aby čistiaci robot prešiel každou rúrou práve raz. Sústava je orientovaná, to znamená, že pre každú rúru je predpísaný smer, ktorým ňou robot musí prejsť. S vynaložením veľkého úsilia sa programátorom VÚPR podarilo napísať program, ktorý pre danú sústavu nájde jednu možnú trasu čistenia, alebo určí, že takáto trasa neexistuje. Niekedy je však dôležité vedieť, či existuje takýchto čistiacich trás viac (striedaním čistiacich trás je možné redukovať opotrebovanie robota v zákrutách).

Sústava rúr pozostáva z n uzlov očíslovaných $1, \dots, n$, medzi ktorými vedie m jednosmerných rúr očíslovaných $1, \dots, m$. Každá rúra vedie medzi dvojicou (navzájom rôznych) uzlov a nemá žiadne odbočky alebo vetvenia. Z každého uzla vedie do každého iného uzla najviac jedna rúra. Pre túto sústavu je zaručené, že existuje trasa pre robota, ktorá začína aj končí v uzle 1 a prejde každou rúrou práve raz (rešpektujúc jej smer). Pracovníci VÚPR navyše pomocou svojho programu jednu takúto trasu našli a je vám k dispozícii. Vašou úlohou je zistiť, či existuje iná trasa, začínajúca aj končiaca vo vrchole 1, ktorá prejde každou rúrou práve raz.

Túto trasu nemusíte vypisovať, t.j. odpoveď vášho programu má byť áno/nie.

Príklad

Vstup:

$n = 5$, $m = 7$

rúry:

```
1 2,    1 5,
2 3,    3 1,
3 4,    4 1,
5 3
```

trasa: 1 2 3 4 1 5 3 1

Výstup:

Existuje iná trasa.

Poznámka:

1 2 3 1 5 3 4 1 je príklad inej trasy.

Vstup:
$n = 5$, $m = 6$
rúry:
1 2, 2 3
3 1, 3 4
4 5, 5 3
trasa: 1 2 3 4 5 3 1

Výstup:
Neexistuje iná trasa.

P – II – 3

V triede sedí učiteľ a dáva pozor na n žiakov, ktorí píšu písomku. Učiteľ sa väčšinu času pozerá jedným smerom. Tento smer budeme nazývať *základný smer*. Ak však učiteľ začuje odniekadiaľ podozrivé zvuky, rýchlo sa otočí, aby videl, čo sa deje. Úlohou je zvoliť základný smer tak, aby uhol, o ktorý sa musí otočiť, bol čo najmenší. Keďže k rôznym žiakom sa treba otočiť o rôzny uhol, chceme minimalizovať priemerný uhol.

Súťažná úloha

Na vstupe je dané číslo n a súradnice n bodov v rovine $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$, $[x_n, y_n]$. Každý bod určuje polohu jedného žiaka v triede. Učiteľ sedí v bode $[0, 0]$. Môžete predpokladať, že bod $[0, 0]$ neleží na žiadnej priamke určenej dvoma zadanými bodmi.

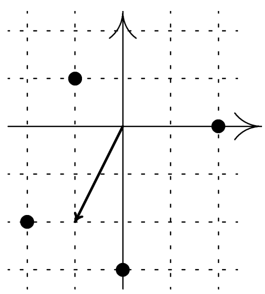
V základnom smere je učiteľ otočený smerom k nejakému bodu $[x, y]$. Keď začuje šuchotať žiaka i, otočí sa smerom k bodu $[x_i, y_i]$. Otáča sa buď v smere hodinových ručičiek, alebo proti smeru hodinových ručičiek, podľa toho, ktorým smerom je uhol otočenia menší (t.j. pre každého žiaka je uhol otočenia najviac 180°).

Priemerný uhol otočenia je priemer uhlov otočenia pre všetkých n bodov. Úlohou je nájsť taký bod $[x, y]$ určujúci základný smer, aby priemerný uhol otočenia bol najmenší možný.

Pomôcka: Môžete predpokladať, že máte k dispozícii funkciu `uhol(x,y)`, ktorá vráti uhol otočenia učiteľa medzi bodom $[1, 0]$ a bodom $[x, y]$ v protismere hodinových ručičiek (t.j. uhol medzi 0° a 360°).

Príklad

Vstup:
$n = 4$, body: $[-1, 1]$, $[0, -3]$, $[-2, -2]$, $[2, 0]$
Výstup:
Základný smer je smerom k bodu $[-1, -2]$.
Poznámka:
Priemerný uhol otočenia je 67.5°.
Správnych riešení je viacero, napríklad aj bod $[-2, -2]$ (žiak 3).



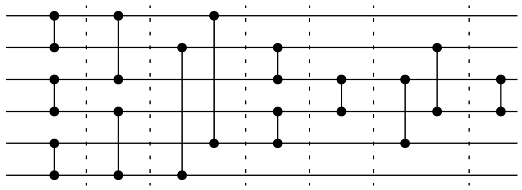
Obr. 50

P – II – 4

Študijný text „Komparátorové siete“ k príkladu P-II-4 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **117**.

Súťažné úlohy

a) Na nasledujúcom obrázku je sieť so šiestimi vstupmi. Nájdite vstup (t.j. 6 čísel), ktorý táto sieť neutriedi. Zobrazte aj priebeh výpočtu siete pre tento vstup.



Obr. 51

b) V sieti uvedenej v časti a) je komparátor, ktorý keď odstránime, sieť bude správne triediť ľubovoľnú postupnosť šiestich čísel. Nájdite tento komparátor a vysvetlite, prečo po jeho odstránení sieť správne triedi.

c) Na vstupe je $2n$ navzájom rôznych čísel. Čísla na prvých n vstupoch sú utriedené od najmenšieho po najväčšie a čísla na druhých n vstupoch sú tiež utriedené od najmenšieho po najväčšie. Navrhnite komparátorovú sieť, ktorá na prvých n výstupoch vráti n najmenších čísel (v ľubovoľnom poradí) a na druhých n výstupoch vráti n najväčších čísel (v ľubovoľnom poradí). Snažte sa, aby vaša sieť bola čo najrýchlejšia.

Príklad: n=3, vstupy 1,4,5,2,3,6. Na výstupe prvé tri vodiče obsahujú 1,2,3 v ľubovoľnom poradí a druhé tri vodiče obsahujú 4,5,6 v ľubovoľnom poradí. Napríklad 2,3,1,6,5,4 je správny výstup.

P – III – 1

Daná je matica A s m riadkami a n stĺpcami. Každý prvok a_{ij} je buď kladné celé číslo, alebo tzv. *žolík*, ktorý budeme značiť znakom $*$. Prvky v každom stĺpci je možné ľubovoľne vymieňať, avšak nie je možné vymieňať prvky z rôznych stĺpcov. Otázka znie, či je možné prvky v matici preusporiadať tak, aby každý riadok matice obsahoval neklesajúcu postupnosť, t.j. pre každý riadok i platilo $a_{i1} \leq a_{i2} \leq \ldots \leq a_{in}$. Každý žolík je pre účely porovnania možné zameniť ľubovoľným celým číslom. Napríklad, riadok $(1, *, 4, *)$ je neklesajúci, pretože prvý žolík $(*)$ je možné zameniť číslom (povedzme) 3 a druhý žolík $(*)$ číslom (povedzme) 77 tak, že výsledný riadok $(1, 3, 4, 77)$ je neklesajúci. Riadok $(5, *, *, 4)$ nie je neklesajúci, pretože neexistujú čísla x, y ktorými by bolo možné zameniť žolíky tak, aby $5 \leq x \leq y \leq 4$.

Súťažná úloha

Navrhnite program, ktorý pre danú maticu A rozhodne, či je možné spermutovať prvky v každom stĺpci tak, aby každý riadok matice tvoril neklesajúcu postupnosť. Ak to možné je, váš program má jednu takúto maticu vypísať.

Príklad

Vstup:
$m = 4$, $n = 4$
```
 1  10   8  12
 *   9  10   *
 8   *  11  10
12   *   *  10
```

Výstup:
Áno. Jedno možné preusporiadanie prvkov:
```
 1   *   8  10
12   *   *   *
 *  10  11  12
 8   9  10  10
```

Vstup:
$m = 3$, $n = 4$
```
*   *   *   *
*   *   *   *
4   3   2   1
```

Výstup:
Nie.

P – III – 2

V istom lyžiarskom stredisku sa pravidelne konajú preteky. Na svahu je natrvalo vyznačených N orientačných bodov. Organizátori pretekov sa vždy snažia zvoliť trochu inú trasu, ale nesmú meniť pozície orientačných bodov. Navyše, *vyhovujúca trasa* musí spĺňať nasledujúce podmienky:

- začína v najvyššie položenom orientačnom bode a končí v najnižšie položenom orientačnom bode,
- môže prechádzať cez niekoľko ďalších orientačných bodov,
- medzi každými dvoma orientačnými bodmi vedie trasa po priamke,
- každý ďalší orientačný bod je položený nižšie ako predchádzajúci,
- v žiadnom orientačnom bode nemení trasa smer o viac ako 45°.

Úlohou je zistiť, koľko vyhovujúcich trás sa dá v lyžiarskom stredisku zostaviť.

Súťažná úloha

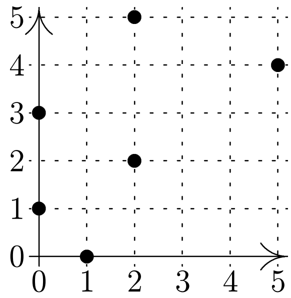
Na vstupe je počet orientačných bodov N a čísla (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_N, y_N) určujúce polohu jednotlivých orientačných bodov na svahu. Svah je jednoducho obdĺžnik, zvažujúci sa zhora nadol. Číslo x_i určuje vzdialenosť i-teho orientačného bodu od ľavého okraja svahu a y_i je vzdialenosť tohto bodu od dolného okraja svahu. Čím väčšia je y-ová súradnica bodu, tým má bod väčšiu nadmorskú výšku.

Napíšte program, ktorý nájde počet vyhovujúcich trás na lyžiarskom svahu. Môžete predpokladať, že žiadne dva orientačné body nemajú rovnakú y-ovú súradnicu a že žiadne tri orientačné body neležia na jednej priamke.

Pomôcka: Môžete predpokladať, že máte k dispozícii funkciu `uhol`(x, y), ktorá vráti uhol medzi bodom (x, y) a x-ovou osou. Presnejšie povedané, je to uhol, o ktorý treba otočiť v protismere hodinových ručičiek polpriamku začínajú v bode $(0, 0)$ a prechádzajúcu cez bod $(1, 0)$, aby prechádzala cez (x, y). Výsledné číslo je uhol v stupňoch z intervalu $\langle 0, 360)$.

Príklad

Vstup:
$N = 6$,
body:
$(2, 5), (2, 2), (5, 4), (0, 3), (0, 1), (1, 0)$
Výstup:
Existujú 3 vyhovujúce trasy.
Poznámka:
Vyhovujúce trasy sú:
$(2, 5), (0, 3), (0, 1), (1, 0)$
$(2, 5), (2, 2), (1, 0)$
$(2, 5), (1, 0)$



Obr. 52

P – III – 3

Študijný text „Komparátorové siete“ k príkladu P-III-3 možno nájsť v zadaní príkladu P-I-4 na strane **117**.

Súťažná úloha

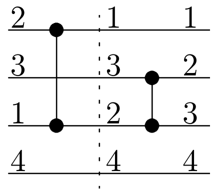
Daná je jedna konkrétna permutácia čísel $1, 2, \ldots, n$, t.j. postupnosť čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, v ktorej sa každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ nachádza práve raz. Dopredu vieme, že naša komparátorová sieť bude mať n vodičov a na vstupe bude i-ty vodič siete obsahovať číslo a_i. Treba navrhnúť komparátorovú sieť, ktorá tento konkrétny vstup utriedi.

Keďže výsledná sieť sa môže líšiť pre rôzne permutácie, vašou úlohou je napísať algoritmus, ktorý na vstupe dostane číslo n a permutáciu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a na výstupe vypíše výslednú sieť, ktorá túto permutáciu utriedi. Výslednú sieť vypíšte ako postupnosť komparátorov v jednotlivých vrstvách zľava doprava, komparátor vypíšte ako dvojicu vodičov, ktoré spája.

Váš algoritmus má pracovať v čase, ktorý je polynomiálny v závislosti od n. Snažte sa, aby sieť, ktorú algoritmus vypíše, mala málo vrstiev (a pokiaľ možno aj malý počet komparátorov). Existuje efektívny algoritmus, ktorý pre každú permutáciu vypíše sieť s $O(n)$ komparátormi a $O(\log n)$ vrstvami.

Príklad

Vstup:
$n = 4$, $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 4$.
Výstup:
Vstup je možné utriediť napríklad sieťou:
Prvá vrstva: komparátor $(1, 3)$
Druhá vrstva: komparátor $(2, 3)$



Obr. 53

P – III – 4

Program: `rury.pas/rury.cpp`
Vstup: zo štand. vstupu
Výstup: na štand. výstup

Vo výskumnom ústave potrubí a rúr majú nový problém. Dostali zákazku od Vodární a kanalizácii mesta Blatislavy, ktoré potrebujú prečistiť celú Blatislavskú kanalizáciu od nánosov blata. Technológia čistenia rúr od blata je jednoduchá – robot musí prejsť každou rúrou práve raz (keby šiel už vyčistenou rúrou, hrozí, že ju silné čistiace prostriedky poškodia). Robot môže vojsť do rúry z ľubovoľného konca, avšak ak raz vojde do rúry, musí ju celú prejsť.

Pracovníci výskumného ústavu si rýchlo uvedomili, že za takýchto podmienok sa môže stať, že nech by pustili čistiaceho robota po akejkoľvek dráhe, nepodarí sa mu vyčistiť celú kanalizáciu. Preto sa rozhodli, že do kanalizácie pošlú naraz viacero robotov a naprogramujú ich tak, aby roboti spolu vyčistili celú kanalizáciu.

Čistiaci robot je však zatiaľ nepredstaviteľne drahý, preto ich chcú pracovníci ústavu poslať do kanalizácie čo najmenej. Ale koľko ich treba a ako ich majú poslať? To už je úloha pre vás.

Kanalizácia pozostáva z n uzlov očíslovaných od 1 po n, medzi ktorými vedie m rúr. Každá rúra vedie medzi dvojicou uzlov a nemá žiadne odbočky alebo vetvenia. Medzi každou dvojicou uzlov vedie najviac jedna rúra.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý pomôže plánovať trasy čistiacich robotov. Váš program načíta popis kanalizácie, zistí, koľko najmenej robotov stačí na vyčistenie kanalizácie a navrhne ich trasy tak, aby dokopy roboti prešli každou rúrou práve raz.

Formát vstupu. Prvý riadok vstupu obsahuje dve kladné celé čísla n a m $(1 \leq n \leq 200)$, oddelené medzerou. Každý z nasledujúcich m riadkov popisuje jednu rúru. Obsahuje dve čísla oddelené medzerou – koncové uzly rúry.

Formát výstupu. Na prvom riadku výstupu je jediné celé číslo R – najmenší počet robotov, ktorí spolu dokážu vyčistiť celú kanalizáciu. Nasleduje R riadkov, i-ty z nich popisuje trasu i-teho spomedzi robotov.

Nech i-ty robot začína trasu v uzle a_1, odtiaľ prejde rúrou do uzlu a_2, odtiaľ do a_3, atď. a skončí v uzle a_k. Potom i-ty z týchto riadkov by mal obsahovať čísla a_1, a_2, …, a_k v tomto poradí, oddelené od seba medzerami.

Pokiaľ je možných trás robotov viac, stačí nájsť a vypísať jedno ľubovoľné riešenie.

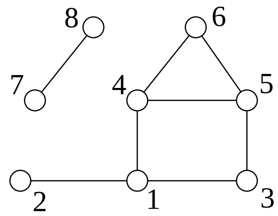
Príklad

Vstup

```
8 8
1 2
1 3
1 4
3 5
4 5
4 6
5 6
7 8
```

Výstup

```
3
2 1 3 5 4 1
4 6 5
8 7
```



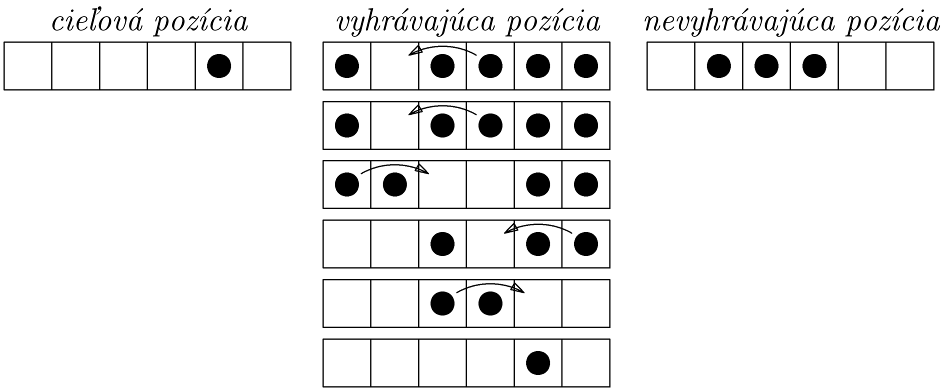
Obr. 54

P – III – 5

Program: `kamene.pas/kamene.cpp`
Vstup: zo štand. vstupu
Výstup: na štand. výstup

Uvažujme nasledujúcu hru pre jedného hráča. Hrací plán pozostáva z K políčok v jednom riadku. Na tomto pláne sa nachádza niekoľko hracích kameňov (na každom políčku najviac jeden kameň). Zadaná je *cieľová pozícia*, t.j. určité rozostavenie kameňov, ktoré je potrebné dosiahnuť. V jednom ťahu môžeme zobrať kameň na políčku p a preskočiť ním susedný kameň. Presnejšie, ak je na políčku napravo (resp. naľavo) od p kameň a nasledujúce políčko napravo (resp. naľavo) je voľné, môžeme preskočiť kameňom z políčka p na toto voľné políčko. Kameň, ktorý takto preskočíme, je odobraný z hry. Cieľom hry je postupným skákaním dosiahnuť cieľovú pozíciu. Pozíciu, z ktorej existuje postupnosť ťahov, ktorými sa dostaneme do cieľovej pozície, nazývame *vyhrávajúca pozícia.*

Napríklad, nech pozícia na nasledujúcom obrázku vľavo je cieľová. V strednej časti obrázku je vyhrávajúca pozícia pre túto cieľovú pozíciu aj s príslušnou postupnosťou ťahov. Pozícia v pravej časti obrázku nie je vyhrávajúca, lebo v prvom ťahu zjavne musíme skákať stredným kameňom, potom nám ostanú dva kamene, medzi ktorými je dve políčka medzera.



Obr. 55

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý načíta celé čísla K a N a cieľovú pozíciu a vypíše počet (rôznych) vyhrávajúcich pozícií pozostávajúcich z najviac N kameňov.

Formát vstupu. Vstup obsahuje na prvom riadku celé čísla K a N oddelené medzerou. Na druhom riadku je zadaná cieľová pozícia ako postupnosť K núl a jednotiek oddelených medzerami, kde jednotka znamená pozíciu, na ktorej je kameň a nula znamená pozíciu, na ktorej nie je kameň. Môžete predpokladať, že $1 \leq N \leq K \leq 100$.

Formát výstupu. Výstup obsahuje jediný riadok a na ňom jedno celé číslo určujúce počet vyhrávajúcich pozícií pozostávajúcich z najviac N kameňov. Môžete predpokladať, že výsledné číslo nepresiahne 10 000.

Príklad

Vstup	**Výstup**
`6 3` `0 0 1 1 0 0`	`3`

Vstup	**Výstup**
`8 5` `1 0 0 0 0 0 0 1`	10

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Najskôr prevedieme úlohu do grafovej terminológie. Pojmom *graf* budeme nazývať usporiadanú dvojicu $G = (V, E)$, kde $E \subseteq V \times V$. Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy grafu* a prvky E (čo sú vlastne usporiadané dvojice vrcholov) *hrany grafu.* Vrcholy $u, v \in V$ sú spojené hranou práve vtedy, keď $(u, v) \in E$. *Bipartitný graf* je taký graf, v ktorom môžeme vrcholy rozdeliť na dve disjunktné množiny R a S tak, aby každá hrana spájala vrchol z množiny R s vrcholom z množiny S. Štvorcovú maticu A núl a jednotiek rozmerov $n \times n$ môžeme chápať aj ako reprezentáciu bipartitného grafu G s $2n$ vrcholmi, kde vrcholy $r_1, r_2, \ldots r_n$ zodpovedajú riadkom a vrcholy $s_1, s_2, \ldots, s_n$ zodpovedajú stĺpcom matice. Vrcholy r_i a s_j sú spojené hranou práve vtedy, keď prvok $A[i, j] = 1$. Hranu medzi r_i a s_j budeme značiť (r_i, s_j).

Hovoríme, že bipartitný graf má *úplné párovanie*, ak sa jeho vrcholy dajú usporiadať do dvojíc tak, že v každej dvojici je jeden vrchol z množiny S a jeden vrchol z množiny R a tieto dva vrcholy sú spojené hranou. Navyše, každý vrchol sa musí nachádzať práve v jednej takejto dvojici.

Ukážeme, že ak bipartitný graf G má úplné párovanie, tak v našej matici A možno preusporiadať riadky a stĺpce takým spôsobom, aby na diagonále boli samé jednotky. Ak párovanie obsahuje dvojice $(r_{i_1}, s_{j_1}), (r_{i_2}, s_{j_2}), \ldots, (r_{i_n}, s_{j_n})$, potom stačí riadky usporiadať v poradí $i_1, i_2, \ldots, i_n$ a stĺpce v poradí $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Označme takto preusporiadanú maticu A'. Platí $A'[k, k] = A[i_k, j_k]$. Keďže medzi vrcholmi r_{i_k} a s_{j_k} v grafe G vedie hrana, platí, že $A[i_k, j_k] = 1$, a preto matica A' má na diagonále samé jednotky.

Naopak, ak sa dá matica A preusporiadať tak, aby mala na diagonále samé jednotky, tak v grafe G existuje úplné párovanie. Nech v preusporiadanej matici A' sú riadky v poradí $i_1, i_2, \ldots, i_n$ a stĺpce v poradí $j_1, j_2, \ldots, j_n$. Vieme, že pre všetky k platí $A'[k, k] = 1$, a preto aj $A[i_k, j_k] = 1$. Preto v grafe G dvojice $(r_{i_1}, s_{j_1}), (r_{i_2}, s_{j_2}), \ldots, (r_{i_n}, s_{j_n})$ tvoria úplné párovanie. Dokázali sme teda nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie. Matica A sa dá transformovať na tvar s jednotkami na diagonále práve vtedy, keď existuje úplné párovanie v grafe G.

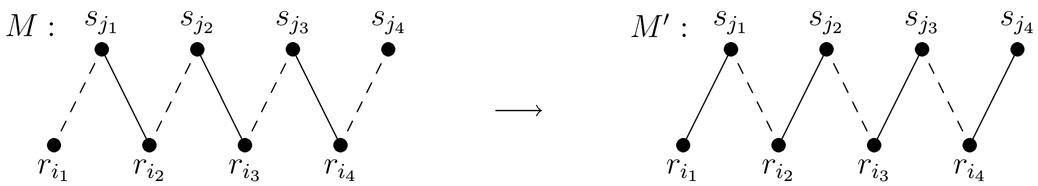
Ak teda chceme zistiť, ako maticu A pretransformovať na tvar s jednotkami na diagonále, vypočítame najprv úplné párovanie v grafe G. Ak také párovanie existuje, preusporiadame riadky a stĺpce podľa postupu uvedeného vyššie. Ak také párovanie neexistuje, maticu nemožno transformovať. Jediným problémom zostáva ukázať, ako také úplné párovanie nájsť.

Pripomeňme, že v úplnom párovaní sú v každej dvojici vrcholy spojené hranou. Preto môžeme úplné párovanie chápať aj ako množinu hrán M takú, že každý vrchol grafu je koncovým vrcholom práve jednej hrany z M. Podobne môžeme zadefinovať *párovanie* ako množinu hrán M takú, že každý vrchol grafu je koncovým vrcholom najviac jednej hrany z M. To znamená, že v párovaní, ktoré nie je úplné, nie všetky vrcholy musia byť zaradené v niektorej dvojici. Ukážeme teraz algoritmus, ako nájsť v bipartitnom grafe maximálne párovanie, t.j. párovanie s najväčším počtom hrán.

Maximálne párovanie budeme hľadať postupne. Začneme s prázdnym párovaním $M = \emptyset$ a v každom kroku zvýšime počet párovacích hrán o jedna. Ak sa nám v niektorom kroku nepodarí zvýšiť počet hrán v párovaní, vyhlásime aktuálne párovanie za maximálne a skončíme.

Zvyšovať počet hrán v párovaní budeme pomocou takzvaných zlepšujúcich ciest. Uvažujme ľubovoľné pevne zvolené párovanie M. *Alternujúca cesta* pre párovanie M je postupnosť vrcholov $r_{i_1}, s_{j_1}, r_{i_2}, s_{j_2}, \ldots, r_{i_k}, s_{i_k}$, ktorá začína nespárovaným riadkovým vrcholom, končí stĺpcovým vrcholom, každá dvojica po sebe nasledujúcich vrcholov je spojená hranou a striedajú sa párovacie a nepárovacie hrany (prvá hrana (r_{i_1}, s_{j_1}) je nepárovacia). *Zlepšujúca cesta* je alternujúca cesta, ktorá končí nespárovaným vrcholom.

Všimnite si, že zlepšujúca cesta $P = r_{i_1}, s_{j_1}, r_{i_2}, s_{j_2}, \ldots, r_{i_k}, s_{i_k}$ pozostáva z $k-1$ párovacích a k nepárovacích hrán. Majme teda párovanie M a zlepšujúcu cestu P. Ak všetky párovacie hrany v P zmeníme na nepárovacie a naopak, dostaneme nové párovanie M', ktoré má o jednu hranu viac (uvedomte si, že M' naozaj spĺňa podmienky párovania).



Obr. 56 (plné čiary sú párovacie, čiarkované čiary sú nepárovacie)

Dokážme teraz, že našim postupom vždy dostaneme maximálne párovanie, t.j. že sa nám nestane, že neexistuje zlepšujúca cesta pre párovanie, ktoré nie je maximálne.

Tvrdenie. Ak párovanie M nie je maximálne, existuje preňho zlepšujúca cesta v G.

Dôkaz tvrdenia. Nech M je párovanie, ktoré nie je maximálne. Keďže M nie je maximálne, musí existovať párovanie M', ktoré obsahuje viac hrán ako M. Hrany patriace do M, avšak nie do M' nazvime *modré* a hrany patriace do M' avšak nie do M nazvime *červené*. Keďže $|M'| > |M|$, červených hrán musí byť viac ako modrých.

Uvažujme graf G' tvorený všetkými modrými a červenými hranami. Každý vrchol v G' susedí s najviac jednou modrou a jednou červenou hranou. Teda každý súvislý komponent grafu G' musí byť buď kružnica alebo cesta, pričom na každej kružnici (ceste) sa striedajú červené a modré hrany. To znamená že každá kružnica obsahuje rovnako veľa modrých a červených hrán; počty červených a modrých hrán na každej ceste sa líšia najviac o 1. Keďže červených hrán je viacej ako modrých, musí existovať komponent P, ktorý obsahuje viac červených hrán ako modrých. Takýto komponent musí byť cesta, ktorá začína aj končí červenou hranou. Teda cesta P obsahuje nepárny počet hrán. Z toho vyplýva, že jeden z jej koncov musí byť riadkový vrchol (nazvime ho r_i) a druhý stĺpcový vrchol (nazvime ho s_j). Je ľahké presvedčiť sa, že keďže r_i resp. s_j je nespárovaný riadkový resp. stĺpcový vrchol a každá druhá hrana patrí do párovania M, P je zlepšujúca cesta pre M.

Implementácia. Graf G reprezentujeme samotnou maticou, t.j. dvojrozmerným poľom A. Pre každý vrchol r_i (s_j) si v poli `par_r` (`par_s`) pamätáme, či je spárovaný s nejakým vrcholom a ak áno, číslo tohoto vrchola. Začneme so všetkými vrcholmi nespárovanými. Funkcia `Zlepsi` hľadá zlepšujúcu cestu a ak ju nájde, použije ju na zlepšenie aktuálneho párovania. Hľadanie je implementované prehľadávaním do šírky zo všetkých vrcholov r_i, ktoré ešte nie sú spárované. Ak nájde alternujúcu cestu do nespárovaného vrchola s_j, prehľadávanie skončí. V tomto okamihu je potrebné prejsť po nájdenej ceste z s_j späť do r_i, zmeniť párovacie hrany na nepárovacie a naopak, čo znamená aktualizovanie záznamov v `par_r` (`par_s`) pre všetky vrcholy na nájdenej ceste. Funkcia `Zlepsi` je volaná v cykle, kým je možné zvyšovať počet hrán v párovaní. Ak vylepšenie párovania úspešne zbehne n krát, máme úplné párovanie, ktoré použijeme na preusporiadanie matice do požadovaného tvaru. V opačnom prípade podáme správu o tom, že matica sa usporiadať nedá. Časová zložitosť: každé volanie `Zlepsi` zbehne v čase $O(n^2)$, spolu potrebujeme nanajvýš n volaní, čo dáva celkový čas $O(n^3)$. Na uloženie matice A potrebujeme pamäť $O(n^2)$.

P – I – 2

Úlohu najprv preformulujeme do reči teórie grafov. Uzly budeme nazývať *vrcholmi*, rúry *hranami* a celú sústavu potrubí budeme volať *graf*. Postupnosť (nie nutne rôznych) vrcholov a hrán $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1} e_k, v_k$ nazveme *sled*, ak každá hrana e_i spája vrcholy v_{i-1} a v_i. Ak navyše $v_0 = v_k$, takýto sled nazveme *uzavretý*. V reči grafov, úlohou bolo v danom súvislom grafe G nájsť uzavretý sled, ktorý prejde každú hranu grafu práve dvakrát.

Ukážeme algoritmus, ktorý pre ľubovoľný súvislý graf nájde požadovaný sled (tento algoritmus je teda vlastne dôkazom, že trasa pre robota vždy existuje). Naše riešenie je založené na prehľadávaní do hĺbky. O každom vrchole si budeme pamätať, či sme ho už v priebehu algoritmu niekedy navštívili. Pre každý navštívený vrchol v, nech `rodic`$[v]$ označuje vrchol, z ktorého robot do v prvýkrát prišiel. Vrchol `rodic`$[v]$ je *rodičom* vrchola v; podobne v je *potomkom* vrchola `rodic`$[v]$. Pre vrchol 1 nie je `rodic`$[1]$ definovaný.

Prehľadávanie do hĺbky začína z vrchola 1 a funguje takto:

1. Označ aktuálny vrchol v ako navštívený.

2. Postupne kontroluj všetky hrany idúce z v a vždy keď nájdeš takú hranu, ktorá vedie do ešte nenavštíveného vrchola u, prejdi robotom do vrchola u a pokračuj rekurzívne v prehľadávaní z u (v sa stane rodičom u).

3. Keď sú všetky hrany z v skontrolované a $v \neq 1$, vráť sa do vrchola `rodic`$[v]$ (a pokračuj v kontrolovaní jeho hrán). Ak $v = 1$, skonči.

Uvažujme množinu hrán, po ktorých robot prvýkrát prišiel do nejakého vrchola; sú to práve hrany (`rodic`$[v], v$), pre tie v, pre ktoré je `rodic`$[v]$ definovaný. Nazvime tieto hrany *stromové* (nazývajú sa tak, lebo tieto hrany tvoria súvislý graf neobsahujúci kružnicu, nazývaný tiež strom). Každú stromovú hranu (u, v), kde u je rodičom v, prejde robot pri prehľadávaní práve dvakrát – najprv z vrchola u prvýkrát navštívi vrchol v a druhýkrát pri návrate z vrchola v do vrchola u. Pri prehľadávaní robot nikdy neprejde po nestromovej hrane (keď prechádza po hrane (u, v), buď navštevuje vrchol v prvýkrát, čím sa hrana (u, v) stane stromovou, alebo sa vracia z vrchola u do vrchola v a to vždy po stromovej hrane). Keďže náš graf G je súvislý, robot pri prehľadávaní navštívi všetky vrcholy. Keby totiž existoval nenavštívený vrchol, musel by existovať taký navštívený vrchol u a nenavštívený vrchol v, že u a v sú spojené hranou. To však nie je možné, lebo algoritmus prehľadávania sa z vrchola u do `rodic`$[u]$ nevráti, kým nie sú všetci susedia u navštívení.

Prehľadávanie do hĺbky navštívi každý vrchol a prejde každú stromovú hranu práve dvakrát; ostáva nám rozhodnúť kedy a ako bude robot prechádzať nestromové hrany. Počas prehľadávania je jednoduché detekovať nestromové hrany. Ak sa robot práve nachádza vo vrchole u a kontroluje hranu (u, v), táto hrana je nestromová, ak vrchol v už bol navštívený a u nie je rodičom v ani v nie je rodičom u. Ak robot nachádzajúci sa vo vrchole u narazí na nestromovú hranu (u, v), môže ju vyčistiť prejdením do v a späť za predpokladu, že ňou už predtým neprešiel. Preto si pre každú hranu budeme pamätať, či už bola vyčistená alebo nie.

Implementácia. Prehľadávanie do hĺbky je implementované rekurzívnou procedúrou `Prehladaj`. Keďže rekurzia si pre aktuálny vrchol automaticky pamätá jeho rodiča, nie je nutné explicitne udržiavať záznamy `rodic`$[v]$. Vo vzorovom programe graf reprezentujeme maticou $n \times n$, z čoho vyplýva časová aj pamäťová zložitosť programu $O(n^2)$. Efektívnejšou reprezentáciou hrán pomocou spájaného zoznamu je možné dosiahnuť časovú aj pamäťovú zložitosť $O(m + n)$, kde m je počet hrán grafu, avšak za cenu mierne zložitejšieho programu.

Poznámka. Úlohu bolo možné riešiť aj pomocou algoritmov na hľadanie eulerovského ťahu (t.j. sledu, ktorý obsahuje každú hranu práve raz). Stačí náš graf pozmeniť tak, že každú hranu skopírujeme dvakrát a v tomto grafe nájsť eulerovský ťah (ten vždy existuje, lebo každý vrchol v novom grafe bude mať párny stupeň). Tento typ riešenia nebudeme podrobnejšie popisovať.

P – I – 3

Dokážme najprv, že spravodlivá priamka vždy existuje. Vezmime ľubovoľnú orientovanú priamku idúcu cez bod $[0, 0]$ a nech x je rozdiel počtu bielych bodov naľavo a čiernych bodov napravo. Ak je x nula, priamka je spravodlivá. Ak nie, budeme priamku otáčať okolo bodu $[0, 0]$. Vždy keď priamka prejde cez biely alebo čierny bod, hodnota x sa zníži alebo zvýši o jedna. Keď priamku otočíme presne o $180°$, naša sledovaná hodnota prešla z počiatočného x na $-x$ (lebo všetky body, ktoré boli pôvodne naľavo, sú teraz napravo a naopak). To znamená, že hodnota musela byť aspoň pri jednej polohe priamky nulová. V tejto polohe je priamka spravodlivá.

Budeme vravieť, že bod A je naľavo od bodu B, ak je naľavo od orientovanej priamky idúcej z $[0, 0]$ do A. Základom algoritmu je nasledujúce pozorovanie. Vezmime spravodlivú priamku p. Nech A je prvý bod, na ktorý by sme narazili, ak by sme priamku p otáčali v smere hodinových ručičiek. Bod A a všetky body, ktoré sú od neho napravo, sú v jednej polrovine určenej priamkou p. Body, ktoré sú od A naľavo, sú v druhej polrovine. Vidíme teda, že nezáleží na konkrétnej polohe priamky p, rozdelenie bodov je určené polohou "hraničného" bodu A.

Stačí teda zobrať každý bod ako kandidáta na bod A, zrátať počet bielych a čiernych bodov naľavo a napravo a skontrolovať, či počty spĺňajú podmienky spravodlivej priamky. Ak nájdeme úspešného kandidáta, spravodlivú priamku zostrojíme tak, že priamku idúcu cez bod otočíme kúsok proti smeru hodinových ručičiek tak, aby sme neprešli cez žiaden iný bod. V praxi sa to dá spraviť tak, že nájdeme prvý bod X, cez ktorý by sme pri takom otáčaní prešli a priamku vedieme stredom medzi kandidátom A a bodom X. Takto dostaneme algoritmus s časovou zložitosťou $O(n^2)$ (pre každého kandidáta zisťujeme polohu každého bodu vzhľadom na tohto kandidáta).

Algoritmus však možno zefektívniť tým, že si body najprv utriedime v smere hodinových ručičiek okolo bodu $[0, 0]$. Kandidátov na hraničný bod A budeme skúšať v tomto utriedenom poradí. Keď sa presunieme z kandidáta $i - 1$ na kandidáta i, nemusíme už pre každý bod zisťovať, či je od bodu i naľavo alebo napravo, lebo veľa bodov zostane v tej istej polrovine. Budeme si teda v každom kroku udržovať počet bielych a čiernych bodov v pravej polrovine a index j ukazujúci na posledný bod v pravej polrovine v smere hodinových ručičiek. Keď se presunieme na kandidáta i, stačí bod $i-1$ presunúť do ľavej polroviny (t.j. odpočítať z počtu bodov príslušnej farby, ktoré sú v pravej polrovine) a potom posúvať index j v smere hodinových ručičiek, kým nenájdeme prvý bod, ktorý je naľavo od bodu i. Všetky body, cez ktoré sme s indexom j prešli, sa presunú z ľavej polroviny do pravej a treba ich teda pripočítať k počtu bodov príslušnej farby. Keď pri posúvaní bodu j prídeme na koniec poľa, pokračujeme zase cyklicky od začiatku. Netreba zabudnúť ošetriť okrajové prípady, keď napríklad všetky body sú od bodu j naľavo alebo napravo.

Utriediť body v smere hodinových ručičiek môžeme v čase $O(n \log n)$ niektorým so štandardných triediacich algoritmov. Iba namiesto bežného porovnania si potrebujeme napísať funkciu, ktorá pre dva body určí, ktorý z nich má väčší uhol. V priloženom programe sme pre jednoduchosť použili triedenie pracujúce v čase $O(n^2)$, to však možno ľahko nahradiť iným.

Pre prvý bod musíme prejsť všetky body a zistiť, ktoré sú vľavo (v čase $O(n)$). Pre každý ďalší bod už len budeme posúvať indexy i a j a sledovať iba body, cez ktoré prechádzame. Cez každý bod prejdeme každým indexom najviac raz a teda celkový čas posúvania pre všetky kandidátske body spolu bude $O(n)$. Celková časová zložitosť algoritmu je teda $O(n \log n)$ a pamäťová zložitosť je $O(n)$.

P – I – 4

Časť a. Najskôr popíšme formát vstupného súboru, aký sme si zvolili (váš program samozrejme môže používať iný formát). Vstupný súbor obsahuje na prvom riadku počet vodičov a počet komparátorov, na druhom riadku vstupy siete od vrchného vodiča po spodný a zvyšné riadky obsahujú popis siete. Každý komparátor je daný dvoma číslami zapísanými na jednom riadku. Tieto čísla určujú vrchný a spodný vodič spojený komparátorom. Vodiče sú číslované zhora nadol začínajúc od jedna. Komparátory sú zadané v poradí zľava doprava. Jednotlivé vrstvy siete sú oddelené riadkom obsahujúcim dve nuly.

Program uvedený v tomto vzorovom riešení pre jednoduchosť zobrazuje výpočet siete semigraficky. Najprv načíta vstup, pričom všetky komparátory a oddeľovače vrstiev uloží do jedného poľa. Potom vykresľuje samotnú sieť zľava doprava. Zakaždým, keď vykreslí komparátor, odsimuluje jeho činnosť na aktuálnom stave vodičov. To znamená, že porovná príslušné dve hodnoty v poli, a ak sú v opačnom poradí, tak ich vymení. Po skončení každej vrstvy (t.j. vždy, keď narazí na oddeľovač v zozname komparátorov) program vypíše aktuálny stav hodnôt na vodičoch.

Jediný problém, ktorý zostáva vyriešiť, je ako umiestniť jednotlivé komparátory v jednej vrstve do stĺpcov, tak aby sa žiadne dva komparátory v jednom stĺpci neprekrývali. Náš program si preto pamätá, ktoré z vodičov sú v aktuálnom stĺpci už obsadené komparátorom. Ak sa ďalší komparátor prekrýva s niektorým komparátorom v aktuálnom stĺpci, začneme nový stĺpec a komparátor umiestnime do nového stĺpca.

Celková časová zložitosť nášho programu je úmerná veľkosti nakresleného obrázku, t.j. $O(nk)$, kde n je počet vodičov a k je počet stĺpcov, v ktorých sú komparátory vykreslené. Na záver uveďme príklad vstupu a výstupu z nášho programu (ide o sieť uvedenú v študijnom texte).

Vstup:

1. časť:

```
4 5
4 1 2 3
1 4
2 3
0 0
```

2. časť:

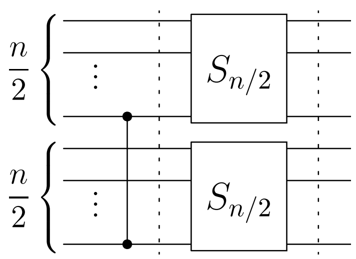
```
1 2
3 4
0 0
2 3
0 0
```

Výstup:

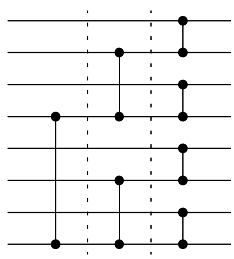
```
4--*-----3--*--1-----1
   |        |
1--|--*--1--*--3--*--2
   |  |           |
2--|--*--2--*--2--*--3
   |        |
3--*-----4--*--4-----4
```

Časť b. Sieť zostrojíme rekurzívne. Označme S_n sieť, ktorá úlohu rieši pre n vstupov. Sieť S_1 neobsahuje žiaden komparátor, lebo máme iba jeden vstup a ten je utriedený. Predpokladajme, že $n > 1$. Prvá vrstva siete obsahuje iba jeden komparátor – medzi vodičmi n a $n/2$. Potom rozdelíme n vodičov na dve polovice – hornú a dolnú a na každú polovicu použijeme sieť $S_{n/2}$. Tieto dve podsiete budú pracovať paralelne.

Konštrukcia siete S_n je zobrazená na nasledujúcom obrázku vľavo, vpravo je príklad výslednej siete pre $n = 8$.



Obr. 57



Obr. 58

Uvedomme si najprv, prečo takto zostavená sieť rieši zadanú úlohu. Označme vstupné hodnoty siete $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Môžu nastať dva prípady podľa toho, či je x_n menšie alebo väčšie ako $x_{n/2}$. Predpokladajme najprv, že $x_n \geq x_{n/2}$. Vtedy komparátor v prvej vrstve nevymení vstupné hodnoty. Nakoľko $x_n \geq x_{n/2}$, prvok x_n patrí v usporiadanom poradí na niektorý zo spodnej polovice vodičov.

Po prvom kroku výpočtu teda platí, že horná polovica je celá utriedená a obsahuje $n/2$ najmenších prvkov zo vstupu. Dolná polovica je utriedená s prípadnou výnimkou posledného prvku a obsahuje $n/2$ najväčších prvkov. Preto vstupy oboch podsietí $S_{n/2}$ spĺňajú podmienku zo zadania, že všetky hodnoty okrem poslednej majú byť na vstupe utriedené (to nevylučuje prípad, že aj posledná hodnota bude utriedená). Teda na výstupe budú obe polovice v utriedenom poradí. Keďže už po prvom kroku každá polovica obsahovala tie správne prvky, aj celá postupnosť je v utriedenom poradí.

Druhý prípad nastane, ak $x_n < x_{n/2}$. Vtedy komparátor vymení hodnoty. Vieme, že x_n patrí niekde do hornej polovice prvkov a dostane sa na najspodnejší vodič hornej polovice. Naopak, posledný prvok z hornej polovice, t.j. $x_{n/2}$, patrí v skutočnosti do dolnej polovice (pri triedení je "vytlačený" prvkom x_n). Prvok $x_{n/2}$ sa ale prvým komparátorom dostane na najspodnejší vodič, t.j. do dolnej polovice. Podobne ako predtým, aj teraz máme po prvom kroku v každej polovici tie prvky, ktoré tam v utriedenom poradí patria. Taktiež obe polovice sú utriedené s prípadnou výnimkou najspodnejšieho prvku. Teda po aplikovaní podsietí $S_{n/2}$ dostaneme dve utriedené polovice, ktoré spolu tvoria utriedenú postupnosť.

Hĺbka rekurzie je v našej konštrukcii $\log_2 n$, lebo každá úroveň rekurzie zmenší počet vodičov na polovicu. V každej úrovni rekurzie pridáme jednu vrstvu, celkový počet vrstiev je teda tiež $\log_2 n$.

Prvá vrstva obsahuje 1 komparátor, v každej ďalšej vrstve sa počet komparátorov zdvojnásobí. Nech počet vstupov je $n = 2^k$. Potom počet použitých komparátorov je $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1 = n - 1$ (súčet geometrickej postupnosti). Naša sieť teda má $O(\log n)$ vrstiev a používa $O(n)$ komparátorov.

P – II – 1

Prvé riešenie, ktoré môže človeka napadnúť, je vyskúšať všetky možné obdĺžniky. Obdĺžnik je určený dvojicou protiľahlých vrcholov, pre každý vrchol máme mn možností. Pre každý potenciálny obdĺžnik prejdeme po jeho obvode a overíme, či všetky jeho obvodové prvky sú jednotky. Tento algoritmus pracuje v čase $O((mn)^2(m+n))$.

Naše prvé vylepšenie bude v tom, že zrýchlime zisťovanie, či je daný obdĺžnik orámovaný. Nech $h[i,j]$ označuje dĺžku úseku jednotiek v stĺpci *nad* prvkom (i,j), vrátane tohto prvku. Presnejšie, $h[i,j] = d$ je také číslo že platí platí $A[i,j] = A[i-1,j] = \ldots = A[i-d+1,j] = 1$ a zároveň buď $d = i$, alebo $A[i-d,j] = 0$. Všimnite si, že ak $A[i,j] = 0$, podľa tejto definície aj $h[i,j] = 0$. Podobne, nech $l[i,j]$ označuje dĺžku úseku jednotiek v riadku *naľavo* od prvku (i,j) (vrátane prvku (i,j)). Hodnoty $h[i,j]$ a $l[i,j]$ si môžeme predpočítať dopredu pre všetky prvky matice. Pre každý prvok zvlášť vieme zistiť dĺžku úseku jednotiek naľavo a nahor od neho v čase $O(m+n)$. Spolu máme mn prvkov, takže predpočítanie polí h a l poľahky implementujeme v čase $O(mn(m+n))$. Môžeme ho však urýchliť. Ak totiž $A[i,j] = 0$, vieme že $h[i,j] = 0$. Ak $A[i,j] = 1$, tak počet jednotiek v súvislom úseku nad prvkom (i,j) je o jedna väčší ako počet jednotiek v úseku nad prvkom $(i-1,j)$, t.j. $h[i,j] = h[i-1,j] + 1$. Stačí nám teda počítať zhora dole a v jednom prechode v čase $O(mn)$ získame všetkých mn hodnôt $h[i,j]$.

Predpokladajme teraz, že chceme zistiť, či je obdĺžnik s ľavým horným rohom (i_1,j_1) a pravým dolným rohom (i_2,j_2) orámovaný. Obdĺžnik má dolnú hranu práve vtedy, ak úsek jednotiek naľavo od prvku (i_2,j_2) má dĺžku aspoň j_2-j_1+1. Podobne overíme, či úsek naľavo od prvku (i_1,j_2) (horná hrana) má dĺžku aspoň j_2-j_1+1 a či úseky nahor od prvkov i_2,j_1 a i_2,j_2 (ľavá a pravá hrana) majú dĺžku aspoň i_2-i_1+1. S pomocou polí l a h teda vieme v koštantnom čase zistiť, či je daný obdĺžnik orámovaný. Opäť vyskúšame všetky možnosti pre ľavý horný a pravý dolný roh, pre každý obdĺžnik zistíme, či je orámovaný a vyberieme ten s najväčšou plochou. Tento algoritmus potrebuje $O(mn)$ času na prípravu a $O((mn)^2)$ času na prejdenie všetkých obdĺžnikov. Celkový čas behu je teda $O((mn)^2)$.

Vzorové riešenie je ešte o čosi rýchlejšie a pracuje nasledovne. Pre každú dvojicu riadkov $i_1<i_2$ nájdeme najväčší orámovaný obdĺžnik, ktorého horná hrana je v riadku i_1 a dolná hrana v riadku i_2. Sústreďme sa na dvojicu pevne zvolených riadkov i_1 a i_2. Stĺpec j nazveme *okrajový*, ak v úseku medzi riadkami i_1 a i_2 (vrátane) obsahuje samé jednotky. Všimnite si, že stĺpec je okrajový práve vtedy, ak $h[i_2,j]\geq i_2-i_1+1$. Stĺpec j nazveme *jednotkový*, ak v i_1 aj i_2-tom riadku obsahuje jednotku. Stĺpec, ktorý obsahuje nulu v aspoň jednom z týchto dvoch riadkov nazveme *nulový*.

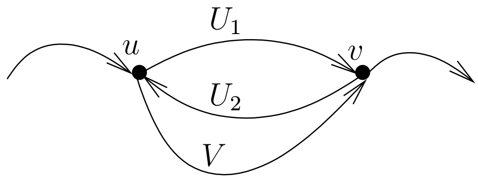
Každý orámovaný obdĺžnik s vodorovnými hranami ležiacimi v riadkoch i_1 a i_2 zodpovedá úseku od stĺpca j_1 po stĺpec j_2 pre nejaké $j_1<j_2$ také, že j_1 aj j_2 sú okrajové stĺpce a stĺpce $j_1+1,\dots,j_2-1$ sú jednotkové. Uvažujme maximálny úsek po sebe idúcich jednotkových stĺpcov (pojmom maximálny myslíme, že sa nedá rozšíriť, t.j. na oboch stranách susedí buď s nulovým stĺpcom alebo s okrajom matice). Ak tento úsek neobsahuje aspoň dva okrajové stĺpce, zjavne nemôže obsahovať ani žiadny orámovaný obdĺžnik. Ak obsahuje aspoň dva okrajové stĺpce, potom najväčší orámovaný obdĺžnik v danom úseku je určený najľavejším a najpravejším okrajovým stĺpcom daného úseku. Na nájdenie najväčšieho obdĺžnika v páse medzi riadkami i_1 a i_2 nám teda stačí pre každý maximálny jednotkový úsek nájsť najľavejší a najpravejší okrajový stĺpec. Toto sa dá ľahko dosiahnuť v čase $O(n)$. Keďže musíme vyskúšať všetky dvojice riadkov, celková časová zložitosť je $O(m^2n)$.

P – II – 2

Preveďme našu úlohu do teórie grafov. Sieť rúr je jednoduchý orientovaný graf bez násobných hrán a slučiek. Uzly budú tvoriť vrcholy a rúry orientované hrany tohoto grafu. Počet hrán, vedúcich do vrcholu, budeme nazývať jeho vstupným stupňom a počet vychádzajúcich hrán jeho výstupným stupňom. Zjavne v našom grafe sa vstupný a výstupný stupeň každého vrcholu rovnajú. Toto číslo budeme tiež volať počtom prechodov cez vrchol.

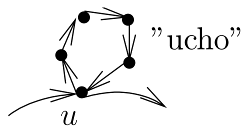
Čo by sa stalo, ak by niektorý vrchol v mal počet prechodov aspoň 3? Trasa na vstupe prechádza cez v aspoň trikrát. Nech X je úsek trasy medzi prvým a druhým príchodom do v a Y úsek medzi druhým a tretím príchodom doň. Zostrojme teraz novú trasu pre robota. Po prvý príchod do v ide podľa trasy na vstupe. Po príchode do v pôjde najskôr úsek Y (čím sa vráti do v), potom úsek X (čím sa opäť vráti do v) a dokončí svoju trasu rovnako ako v trase na vstupe. Inými slovami oproti trase na vstupe sme vymenili poradie úsekov X a Y. Tým sme ale zostrojili inú trasu. Preto aby žiadna iná trasa neexistovala, musí mať každý vrchol počet prechodov 1 alebo 2.

Majme teraz takýto graf a v ňom vyznačenú trasu, ktorá začína aj končí vo vrchole 1 a prechádza po každej hrane práve raz. Pokiaľ tento graf neobsahuje žiadne hrany, tak trasa je zjavne jediná (prázdna trasa). Čo ak náš graf nejaké hrany má? Poďme po tejto trase, kým sa nám prvýkrát nejaký vrchol u nezopakuje. To určite skôr či neskôr nastane. Všimnime si úsek cesty medzi prvým a druhým príchodom do u. Označme ho U. Čo ak má niektorý vrchol U (iný ako u) počet prechodov 2? To by znamenalo, že sa tento vrchol ešte niekedy na trase vyskytne. Označme v ten z takýchto vrcholov, ktorý sa v nej vyskytne najskôr. Tento vrchol rozdelí U na dve časti – časť od u po v označme U_1 a časť od v po u označme U_2. Časť od druhého príchodu do u po druhý príchod do v označme V. Naša trasa teda vyzerá nasledovne: Robot príde do u, prejde U_1, U_2, V a zvyšok trasy. Potom ale existuje aj iná trasa: Robot rovnako príde do u, prejde V, U_2, U_1 a zvyšok trasy prejde rovnako, ako v trase na vstupe.



Obr. 59

Preto aby žiadna iná trasa neexistovala, musia mať všetky vrcholy U (okrem u) počet prechodov 1. (Teda úsek U bude tvoriť *ucho* nad vrcholom u.)



Obr. 60

Uvedomme si teraz, že keď hrany tvoriace toto *ucho* z grafu odstránime, nezmeníme tým počet trás v grafe. (Každá trasa v grafe totiž vyzerá nasledovne: Robot nejako príde do u, prejde *ucho* a nejako prejde zvyšok grafu. Keď hrany tvoriace *ucho* odstránime, ku každej trase v pôvodnom grafe nájdeme zodpovedajúcu trasu v novom grafe tak, že z nej odstránime hrany *ucha*.) Týmto ale dostaneme graf s menej hranami, na ktorom môžeme tento postup zopakovať. Ak sa nám takto podarí postupne odstrániť všetky hrany z grafu, znamená to, že aj pôvodný graf mal len jednu trasu. Naopak, ak v niektorom kroku zistíme, že v práve spracovávanom grafe existuje viac trás, znamená to, že aj náš pôvodný graf obsahoval viac trás.

To už je aj návod, ako zostrojiť algoritmus riešiaci túto úlohu. Pre každý vrchol si budeme pamätať počet prechodov cezeň. Ak má niektorý vrchol počet prechodov aspoň 3, vyhlásime, že existuje iná trasa a skončíme. V opačnom prípade začneme postupne čítať zo vstupu trasu a budeme si pamätať, cez ktoré vrcholy sme už išli. Keď sa nám niektorý vrchol v zopakuje, pozrieme sa, či niektorý vrchol medzi prechodmi cez v nemá počet prechodov 2. Ak taký nájdeme, vyhlásime, že existuje iná trasa a skončíme. Ak nie, odstránime tieto vrcholy z trasy a pokračujeme. (Všimnite si, že si vôbec nepotrebujeme pamätať graf a meniť ho, keďže je jednoznačne popísaný trasou.) Keď skončíme (s prázdnou trasou), vyhlásime, že žiadna iná trasa neexistuje a skončíme.

Správnosť tohoto algoritmu vyplýva z vyššie uvedeného popisu. Aká je jeho časová zložitosť? Nech má náš graf N vrcholov a M hrán. Ak z niektorého vrcholu vychádzajú aspoň 3 hrany, akonáhle prvý takýto vrchol nájdeme, môžeme skončiť. V tomto prípade je časová zložitosť nášho algoritmu $O(N)$. (Pokiaľ by sme dočítali zo vstupu celý graf a až potom kontrolovali počty prechodov cez vrcholy, zhorší nám to zložitosť na $O(M+N)$.) V opačnom prípade z každého vrcholu vychádzajú najviac dve hrany, preto $M = O(N)$. (Čiže náš graf má len lineárne veľa hrán v závislosti od počtu vrcholov.) A teda aj počet hrán trasy je $O(N)$, lebo v trase je každá hrana práve raz. Každý vrchol na trase najviac raz načítame, najviac raz sa počas behu algoritmu pozrieme na počet prechodov cez neho a najviac raz ho z trasy vyhodíme. To znamená, že (pri vhodnej implementácii) bude aj v tomto prípade časová zložitosť nášho algoritmu $O(N)$.

P – II – 3

Ak sa učiteľ otáča zo svojho základného smeru k nejakému žiakovi proti smeru hodinových ručičiek, budeme hovoriť, že tento žiak je naľavo. Ak sa otáča v smere hodinových ručičiek, žiak je napravo.

Najprv dokážeme, že vždy existuje riešenie, v ktorom je učiteľ otočený smerom k nejakému žiakovi. Predstavme si priamku cez bod $[0,0]$ určujúcu základný smer. Otočme teraz túto priamku doľava o malý uhol α tak, aby žiaden žiak, ktorý bol naľavo neprešiel na pravú stranu a naopak. Po takomto otočení uhly otočenia všetkých žiakov naľavo klesnú o α a uhly otočenia všetkých žiakov napravo stúpnu o α. Teda ak naľavo je viacej žiakov, priemerný uhol otočenia sa zmenšil, ak naľavo je menej žiakov, priemerný uhol sa zväčšil a ak je na oboch stranách rovnako žiakov, priemerný uhol zostáva rovnaký. Ak priamka určujúca najlepší základný smer neprechádza cez žiaden bod, tak v aspoň jednom smere ju môžeme kúsok otočiť bez toho, aby priemerný uhol vzrástol. V otáčaní prestaneme, len čo priamka narazí na prvý bod.

Ešte stále ale zostáva prípad, že priamka síce prechádza cez niektorý bod, ale učiteľ sa pozerá opačným smerom, t.j. je chrbtom k tomuto žiakovi. To ale nikdy nie je optimálne riešenie. Predpokladajme, že napravo je aspoň toľko žiakov ako naľavo. Vtedy, ak otočíme priamku kúsok doprava, všetkým napravo a žiakovi za chbtom klesne uhol otočenia a teda celkovo sa uhol otočenia zlepší. Ak naopak je naľavo viac žiakov, otočenie doľava zlepší uhol.

Je teda potrebné preskúmať iba n základných smerov, v ktorých je učiteľ otočený smerom k niektorému žiakovi. Pre každý je možné spočítať priemerný uhol otočenia a vybrať najlepší. Ak budeme počítať priemerný uhol otočenia pre každý smer osobitne, dostaneme algoritmus s časovou zložitosťou $O(n^2)$. My však ukážeme algoritmus s časovou zložitosťou $O(n \log n)$.

Nech α_i je uhol, ktorý zviera polpriamka idúca cez žiaka i a bod $[0,0]$ s osou x (t.j. uhol, ktorý vypočítame funkciou `uhol`(x_i, y_i)). Uvedomme si, aký je vlastne uhol otočenia medzi učiteľom natočeným k žiakovi u a medzi žiakom i. Musíme uvažovať 4 prípady:

- Žiak i je naľavo a $\alpha_i > \alpha_U$. Uhol otočenia je $\alpha_i - \alpha_U$.
- Žiak i je naľavo a $\alpha_i < \alpha_U$. Uhol otočenia je $\alpha_i - \alpha_U + 360°$.
- Žiak i je napravo a $\alpha_i < \alpha_U$. Uhol otočenia je $\alpha_U - \alpha_i$.
- Žiak i je napravo a $\alpha_i > \alpha_U$. Uhol otočenia je $\alpha_U - \alpha_i + 360°$.

Aby sme našli priemerný uhol otočenia, potrebujeme sčítať uhly otočenia pre všetkých žiakov. Sčítaním dostaneme nasledujúci výraz:

$$\sum_{\substack{\text{žiak } i\\ \text{je naľavo}}} \alpha_i - \sum_{\substack{\text{žiak } i\\ \text{je napravo}}} \alpha_i - L \cdot \alpha_U + P \cdot \alpha_U + X \cdot 360°$$

kde L je počet žiakov naľavo, P je počet žiakov napravo a X je počet žiakov, ktorí sú naľavo s uhlom menším ako α_U alebo napravo s uhlom väčším ako α_U.

Teda súčet uhlov otočenia vieme spočítať v konštantnom čase, ak poznáme súčet hodnôt α_i pre žiakov naľavo a napravo a ak poznáme počty L, P, X.

Náš algoritmus si najprv utriedi body podľa uhla α_i (t.j. proti smeru hodinových ručičiek). Potom si pre každé i spočíta súčet uhlov α_j pre prvých i bodov v utriedenom poradí a tieto čísla uloží do poľa β (t.j. $\beta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i$). Všimnite si, že $\beta_i = \alpha_i + \beta_{i-1}$, a teda idúc zľava doprava vieme spočítať všetky hodnoty β_i v lineárnom čase. Ak teraz chceme spočítať súčet uhlov v úseku od i-teho po j-teho žiaka, stačí spočítať $\beta_j - \beta_{i-1}$.

Po tejto inicializácii budeme postupne skúmať možné základné smery v poradí, v akom sú v striedenom poli. Nech U je žiak, ktorý určuje základný smer. Pre každé U si nájdeme posledného žiaka l, ktorý je naľavo. Všetci žiaci medzi U a l (vrátane l) sú naľavo, ostatní žiaci sú napravo. Niekedy máme $l < U$, a vtedy sú naľavo žiaci $U+1, \ldots, n$ a $1, \ldots, l$. Podobne žiaci napravo buď tvoria jeden alebo dva súvislé úseky v utriedenom poli. Ak teda vieme U a l, môžeme použiť pole β na to, aby sme v konštantnom čase zistili súčet uhlov α_i pre žiakov naľavo a napravo, lebo sú to súčty jedného alebo dvoch súvislých úsekov v poli α. Počty žiakov naľavo a napravo (L a P) tiež ľahko spočítame. Hodnota X je trošku ťažšia, ale žiak i má α_i menšie ako α_U len vtedy, ak je i menšie ako U (lebo pole je striedené podľa α). Teda, ak poznáme indexy U a l, vieme spočítať súčet (a priemer) uhlov otočenia v konštantnom čase.

Zostáva vyriešiť problém, ako efektívne nájsť hodnotu l, t.j. index posledného prvku vľavo. Pre $U = 1$ jednoducho začneme s $l = 1$ a budeme zvyšovať l, až kým nenájdeme posledný prvok, ktorý je naľavo. Pre každú ďalšiu hodnotu U využijeme fakt, že l z predchádzajúceho kroku je teraz určite naľavo a teda začneme z predchádzajúcej hodnoty l a budeme l zvyšovať, až kým nenájdeme prvý bod vpravo (ak prídeme na koniec poľa, pokračujeme od jednotky). Index l takýmto spôsobom počas celého algoritmu obíde celé pole iba dvakrát, teda celková zložitosť hľadania posledného prvku vľavo je $O(n)$.

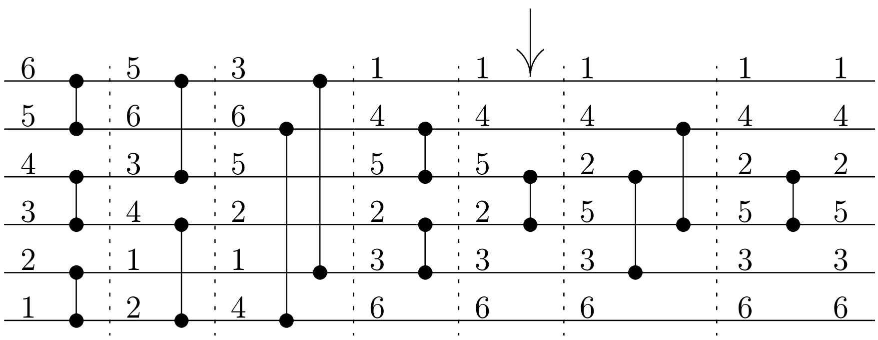
Celková časová zložitosť je $O(n \log n)$, lebo triedenie pracuje v čase $O(n \log n)$, pole β vieme vypočítať v čase $O(n)$, celkový čas otáčania indexu l je $O(n)$ a výpočet súčtu uhlov otočenia je konštantný pre jeden smer, t.j. $O(n)$ pre všetky smery.

V uvedenom programe sme kvôli úspore miesta nahradili $O(n \log n)$ triedenie kvadratickým. Taktiež sme použili pole dĺžky $2n$, v ktorom sa každý bod nachádza dvakrát, čo zjednodušuje výpočty (netreba uvažovať, že posledný bod vľavo bude mať index menší ako U – ak treba jednoducho pokračujeme s hľadaním indexu l ďalej za n, využívajúc druhé kópie bodov v poli). Pri implementácii treba dbať na to, aby program správne ošetril rôzne okrajové prípady, napríklad, že všetky body sú naľavo alebo napravo od U.

P – II – 4

Časť a)

Správnou odpoveďou je napríklad vstup $6, 5, 4, 3, 2, 1$ (ale aj mnoho iných vstupov). Pre vstup $6, 5, 4, 3, 2, 1$ výpočet siete prebieha nasledovne:



Obr. 61

Časť b)

Treba odstrániť komparátor vyznačený šípkou na predchádzajúcom obrázku (jediné správne riešenie). Dokážme teraz, že po odstránení tohto komparátora sieť triedi. V prvých troch vrstách sa minimum dostane na prvý vodič a maximum na posledný vodič. Môžeme to dokázať nasledujúcim spôsobom. Po prvej vrstve je minimum na niektorom z vodičov 1, 3, alebo 5. Po druhej vrstve je na vodiči 1 alebo 5 a po tretej vrstve je určite na vodiči 1. Podobne maximum je po prvej vrstve na vodiči 2, 4 alebo 6, po druhej vrstve na vodiči 2 alebo 6 a po tretej musí byť na vodiči 6.

Prvý a posledný vodič teda po tretej vrstve obsahujú správne hodnoty. Ďalšie tri vrstvy striedia prostredné štyri vodiče. Štvrtá vrstva umiestni minimum z druhého a tretieho vodiča na druhý vodič. Podobne piaty vodič obsahuje maximum zo štvrtého a piateho vodiča. Piata vrstva pôvodnej siete sa vynecháva. V šiestej vrstve porovnáme medzi sebou maximá a minimá z predchádzajúceho kroku, t.j. po tejto vrstve už druhý vodič obsahuje minimum a piaty vodič maximum zo zvyšných štyroch prvkov. Zostáva dotriediť prostredné dva vodiče, čo spraví komparátor v poslednej vrstve.

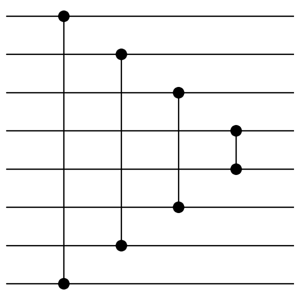
Časť c)

Označme x_i číslo na vstupe i. Dokážme najprv nasledujúce pozorovanie: pre každé $i \leq n$ jedno z čísel x_i a x_{2n-i+1} patrí medzi n najmenších čísel a druhé medzi n najväčších. Predpokladajme, že obe čísla x_i a x_{2n-i+1} patria medzi n najmenších čísel. Potom čísla

$x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ patria tiež medzi n najmenších čísel, lebo sú menšie ako x_i. Podobne aj čísla $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-i}$ patria medzi n najmenších čísel, lebo sú menšie ako x_{2n-i+1}. To znamená, že sme spolu identifikovali $i + (2n - i + 1 - n) = n + 1$ čísel, ktoré patria medzi n najmenších, čo je spor. Aspoň jedno z čísel x_i a x_{2n-i+1} musí teda patriť medzi n najväčších čísel.

Predpokladajme teraz, že obe čísla x_i a x_{2n-i+1} patria medzi n najväčších čísel. Potom ale aj čísla $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ a $x_{2n-i+2}, x_{2n-i+3}, \ldots, x_{2n}$ patria medzi n najväčších čísel, lebo sú väčšie ako x_i alebo x_{2n-i+1}. Spolu sme teda identifikovali $(n-i+1)+(2n-2n+ + i) = n + 1$ čísel, ktoré patria medzi n najväčších, čo je spor. Teda nemôžu obe čísla patriť ani medzi n najväčších.

Dokázali sme teda, že jedno z čísel x_i a x_{2n-i+1} patrí do hornej polovice výstupov a druhé do dolnej. Do hornej patrí to z nich, ktoré je menšie. Stačí ich teda porovnať jedným komparátorom a každé sa dostane do správnej polovice výstupov. Toto spravíme pre každú dvojicu x_i a x_{2n-i+1} pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Naša sieť teda bude mať $n/2$ komparátorov v jednej vrstve. Príklad takejto siete pre 8 vstupov ($n = 4$) uvádzame na obrázku.



Obr. 62

P – III – 1

Najprv zaveďme niekoľko označení. Označme X_i i-ty stĺpec v matici X. Prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci označíme $x_{i,j}$. Nech v i-tom riadku matice X tvorí prvých j prvkov postupnosť, do ktorej sa dá za žolíky dosadiť tak, aby bola neklesajúca. Potom *signatúrou* prvku $x_{i,j}$ v tejto matici budeme nazývať najmenšie číslo, ktoré môžeme umiestniť v riadku i do $(j+1)$. stĺpca tak, aby nebola porušená podmienka neklesajúcosti. Signatúra prvku $x_{i,j}$ je teda najväčšie (=posledné) číslo z tých prvkov $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,j}$, ktoré nie sú žolíkmi, alebo 0, ak všetky tieto prvky sú žolíkmi. Signatúra stĺpca je *utriedená*, ak postupnosť signatúr prvkov od prvého riadku po posledný je neklesajúca.

Predpokladajme teraz, že máme dané stĺpce $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$, kde každý stĺpec A'_i je preusporiadaním stĺpca A_i. Maticu A^* budeme nazývať *rozšírením* stĺpcov $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$, ak

- matica A^* je riešením našej úlohy (t.j. každý stĺpec A^*_i je preusporiadaním stĺpca A_i a v matici A^* možno nahradiť žolíky číslami tak, aby každý riadok bol neklesajúci),
- prvých k stĺpcov matice A^* sa zhoduje so stĺpcami $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$.

Predpokladajme, že už sme našli prvých k stĺpcov riešenia $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$, a že signatúra stĺpca A'_k je utriedená. Ukážeme teraz, ako preusporiadať ďalší stĺpec.

Zotriedime všetky nežolíkové prvky v stĺpci A_{k+1} od najmenšieho po najväčší a potom postupne skúmame políčka stĺpca oddola nahor. Na políčko $a'_{i,k+1}$ uložíme najväčšie doteraz nepoužité číslo v stĺpci, ak je aspoň tak veľké ako signatúra $a'_{i,k}$. V opačnom prípade tam položíme žolík a ak žiaden žolík nemáme, vyhlásime, že matica sa nedá usporiadať.

Všimnime si, že signatúra stĺpca A'_{k+1} je tiež utriedená. Preto tento algoritmus môžeme použiť na postupné vygenerovanie všetkých stĺpcov matice.

Dôkaz správnosti. Je zrejmé, že ak sa nášmu algoritmu podarí preusporiadať všetky stĺpce matice, tak dostane maticu, ktorá má všetky riadky neklesajúce (t.j. nájde správne riešenie). Zostáva dokázať, že ak správne riešenie existuje, tak algoritmus ho aj nájde, t.j. neskončí neúspechom na niektorom stĺpci. Najskôr dokážeme dve pomocné tvrdenia.

Tvrdenie 1. Sú dané stĺpce $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$, kde každý stĺpec A'_i je preusporiadaním stĺpca A_i a signatúra stĺpca A'_k je utriedená. Označme A'_{k+1} preusporiadanie stĺpca A_{k+1}, ktoré dostaneme naším algoritmom. Potom, ak existuje rozšírenie stĺpcov $A'_1, \ldots, A'_k$, tak existuje aj rozšírenie stĺpcov $A'_1, \ldots, A'_{k+1}$.

Dôkaz. Predpokladajme, že existuje rozšírenie A^* stĺpcov $A'_1, \ldots, A'_k$. Môžu nastať dva prípady. Ak sa stĺpec A^*_{k+1} zhoduje so stĺpcom A'_{k+1}, potom matica A^* je rozšírením aj stĺpcov $A'_1, \ldots, A'_{k+1}$, a teda naše tvrdenie automaticky platí. Predpokladajme teda, že stĺpce A^*_{k+1} a A'_{k+1} sa nezhodujú.

Vezmime najspodnejší riadok, v ktorom sa tieto stĺpce líšia; označme tento riadok j. Môžu nastať dva prípady:

- $a'_{j,k+1} = *$ ($a^*_{j,k+1}$ je teda číslo). Číslo $a^*_{j,k+1}$ musí vyskytovať niekde vyššie v stĺpci A'_{k+1} a je ho možné pridať namiesto žolíka v j-tom riadku. To je ale v rozpore s naším algoritmom, ktorý používa žolíky iba v prípade, že nemôže použiť číslo. Tento prípad teda nemôže nastať.

- $a'_{j,k+1}$ je číslo ($a^*_{j,k+1}$ je buď iné číslo, alebo žolík). Stĺpec A^*_{k+1} musí obsahovať číslo $a'_{j,k+1}$ na nejakom inom riadku i, pričom $i < j$, lebo stĺpce A'_{k+1} a A^*_{k+1} sa zhodujú na riadkoch $j+1, \ldots, m$.

  Vymeňme riadky i a j v stĺpcoch $k+1, \ldots, n$ v matici A^*; nazvime výslednú maticu A^{**}. Dokážeme, že matica A^{**} je riešením nášho problému. Jediné miesto, kde by mohla byť porušená podmienka, že riadky sú neklesajúce, je v riadku j za prvkom $a^{**}_{j,k}$, alebo v riadku i za prvkom $a^{**}_{i,k}$. V prípade riadku j, $a^{**}_{j,k+1} = a^*_{i,k+1} = a'_{j,k+1}$ a podmienka teda nie je porušená, lebo prvok $a'_{j,k+1}$ použije v riadku j aj náš algoritmus.

  Rozoberme teraz situáciu na riadku i. Označme si $w = a^{**}_{i,k+1} = a^*_{j,k+1}$. Všimnime si, že signatúra prvku $a^{**}_{j,k}$ je väčšia alebo rovná ako signatúra prvku $a^{**}_{i,k}$ (z predpokladu, že signatúra stĺpca k je utriedená). Ak prvok w je číslo a bolo ho možné použiť na riadku j, je ho možné použiť aj na riadku i. Ak prvok w je žolík, tak jeho signatúra sa premiestnením do riadku i nezväčšila, preto zvyšok riadku možno použiť bezo zmeny.

Ak sa stĺpce A^{**}_{k+1} a A'_{k+1} zhodujú, tvrdenie je dokázané. V opačnom prípade použijeme ten istý argument znova na maticu A^{**}, až kým sa stĺpce nebudú zhodovať (v každej iterácii odstránime jednu nezhodu).

Tvrdenie 2. Sú dané stĺpce $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$, kde každý stĺpec A'_i je preusporiadaním stĺpca A_i a signatúra stĺpca A'_k je utriedená. Ak náš algoritmus pri generovaní stĺpca A'_{k+1} vyhlási, že maticu nemožno preusporiadať, tak neexistuje doplnenie stĺpcov $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$.

Dôkaz. Nech sa náš algoritmus zastavil na riadku j. To znamená, že nám nezostali žiadne žolíky, a navyše signatúra $a'_{j,k}$ je väčšia, ako ľubovoľný zo zostávajúcich prvkov. Označme túto množinu zostávajúcich čísel Z.

Predpokladajme teraz, že existuje rozšírenie A^* stĺpcov $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$. Rovnakým postupom, ako v predchádzajúcom dôkaze, možno nájsť rozšírenie A^{**}, ktoré je totožné s čiastočným riešením vygenerovaným naším algoritmom (tzn. $a^{**}_{i,k+1} = a'_{i,k+1}$ pre $j < i \leq$ $\leq m$). Vezmime si prvok $a^{**}_{j,k+1}$. Určite to nie je žolík, pretože všetky žolíky sme už minuli v nižších riadkoch. Preto to musí byť číslo z množiny Z. Tieto čísla sú ale všetky menšie, ako signatúra prvku $a'_{j,k}$, preto A^{**} nemôže byť rozšírením $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$ a teda ani A^* nie je rozšírením. To je ale spor s predpokladom.

Z týchto dvoch tvrdení už ľahko dokážeme správnosť celého algoritmu. Predpokladajme, že maticu A možno preusporiadať. Potom pre 0 stĺpcov existuje rozšírenie týchto stĺpcov. Navyše, ak vieme nájsť preusporiadanie k stĺpcov, pre ktoré existuje rozšírenie, tak podľa Tvrdenia 2 náš algoritmus nájde preusporiadanie $(k+1)$-vého stĺpca. Podľa Tvrdenia 1 potom existuje rozšírenie takéhoto preusporiadania prvých $k+1$ stĺpcov. Algoritmus teda môžeme zopakovať n krát a dostaneme celé riešenie.

Časová a pamäťová zložitosť. V každom stĺpci potrebujeme utriediť čísla, čo je možné urobiť v čase $O(m \log m)$. Zvyšné operácie sa dajú spraviť v čase $O(m)$ pre každý stĺpec. Celkový čas výpočtu teda je $O(nm \log m)$. Pamäťová zložitosť je $O(mn)$.

P – III – 2

Úlohu je možné riešiť dynamickým programovaním. Trasu, ktorá spĺňa všetky podmienky vyhovujúcej trasy, okrem toho, že nemusí končiť v najnižšom orientačnom bode budeme nazývať *čiastočná trasa*. Naše riešenie bude počítať počty čiastočných trás s rôznymi koncami využívajúc informáciu spočítanú predtým.

V prvom kroku zotriedime body podľa y-ovej súradnice od najvyššie položeného po najnižšie položený. Očíslujme body v tomto utriedenom poradí číslami od 1 po N. Pre i, j $(1 \leq i < j \leq N)$ nech $a[i,j]$ je počet čiastočných trás, ktoré majú i ako predposledný orientačný bod a j ako posledný. Pre $i = 1$ máme $a[i,j] = 1$, lebo každá čiastočná trasa začína v bode 1. Predpokladajme teraz, že sme už spočítali hodnoty $a[i',j']$ pre všetky i', j', kde $i' < i$ a chceme spočítať $a[i,j]$. Ak má trasa končiť úsekom (i,j), musí do bodu i ísť z nejakého bodu k, pre ktorý platí, že uhol otočenia zo smeru (k,i) do smeru (i,j) je menej ako 45° a bod k je vyššie položený ako bod i. Nech $S(i,j)$ je množina všetkých bodov k s týmito vlastnosťami. Keďže každé $k \in S(i,j)$ je menšie ako i, máme už spočítanú hodnotu $a[k,i]$. Hodnota $a[i,j]$ sa spočíta jednoducho ako súčet $a[k,i]$ pre všetky k z množiny $S(i,j)$, t.j.

$$a[i,j] = \sum_{k \in S(i,j)} a[k,i].$$

Na základe tohoto vzťahu ľahko zostavíme algoritmus pracujúci v čase $O(N^3)$. Počiatočné triedenie trvá $O(N \log N)$. Existuje kvadratický počet dvojíc i, j, pre ktoré chceme spočítať hodnotu $a[i,j]$. Pre každú takú dvojicu musíme najprv nájsť množinu $S(i,j)$, čo sa dá spraviť v čase $O(N)$ tak, že pre každý bod k spočítame príslušný bod otočenia a zistíme, či je menší ako 45°. Keď nájdeme množinu $S(i,j)$, sčítame hodnoty $a[k,i]$ pre všetky $k \in S(i,j)$. To tiež trvá $O(N)$. Spolu teda potrebujeme čas $O(N^3)$ na spočítanie celej tabuľky a. Výsledný počet vyhovujúcich trás je súčet hodnôt $a[i,N]$ pre všetky $1 \le i < N$ (t.j. počet všetkých čiastočných trás končiacich v bode N). Tento súčet tiež ľahko nájdeme v čase $O(N)$. Dostali sme teda algoritmus pracujúci v čase $O(N^3)$.

Tento algoritmus sa dá ďalej zrýchliť použitím podobných techník ako v predchádzajúcich kolách. Trik spočíva v tom, že pre dané i budeme počítať hodnoty $a[i,j]$ pre všetky j $(j > i)$ naraz. Najskôr zotriedime všetky body proti smeru hodinových ručičiek okolo bodu i. Pre každý bod j $(j > i)$ množina $S(i,j)$ tvorí súvislý úsek v takto utriedenom zozname. Nech $l(i,j)$ je najľavejší bod tohto úseku a nech $p(i,j)$ je najpravejší bod. Teraz si predstavme, že bod j otáčame proti smeru hodinových ručičiek okolo bodu i. Množina $S(i,j)$ sa bude meniť, a to tak, že body $l(i,j)$ ani $p(i,j)$ sa tiež budú otáčať proti smeru hodinových ručičiek. V našom algoritme nebudeme otáčať bod j, ale budeme uvažovať rôzne orientačné body $j > i$ v poradí, v akom sú v zozname utriedenom okolo bodu i. Budeme udržovať dva indexy $l(i,j)$ a $p(i,j)$, ktoré zakaždým zvyšujeme, až kým nezodpovedajú práve skúmanému bodu j. Súčasne budeme udržovať aj súčet hodnôt $a[k,i]$ pre k z úseku medzi $l(i,j)$ a $p(i,j)$. Vždy keď zvýšime $l(i,j)$, znížime tento súčet o hodnotu $a[l(i,j),i]$, ktorá sa práve dostala mimo úseku. Podobne, ak zvýšime hodnotu $p(i,j)$, zvýšime súčet o hodnotu $a[p(i,j),i]$, ktorá sa práve dostala do vnútra úseku.

Pre každú hodnotu j teda najprv posunieme indexy $l(i,j)$ a $p(i,j)$ na ich patričné miesto a upravujeme pritom súčet a nakoniec tento súčet uložíme v $a[i,j]$. Celkovo pre všetky hodnoty j $(j > i)$ index $l(i,j)$ prejde cez každý orientačný bod k $(k < i)$ nanajvýš raz a podobe každý aj index $p(i,j)$. Udržovanie indexov a súčtu teda zaberie $O(N)$ času pre každé i. Samotné ukladanie hodnôt $a[i,j]$ tiež zaberie čas $O(N)$ pre každé i. Triedenie podľa uhla zaberie $O(N \log N)$ času pre každé i. Celkovo teda potrebujeme čas $O(N \log N)$ pre každé i, čiže $O(N^2 \log N)$ spolu (to už zahŕňa aj počiatočné triedenie podľa y-ovej súradnice a spočítanie výsledného počtu vyhovujúcich ciest z hodnôt $a[i,N]$. Pamäťová zložitosť je $O(N^2)$.

Pri implementácii treba dávať pozor na rôzne okrajové prípady, napríklad keď množina $S(i,j)$ je prázdna. Kvôli úspore miesta program uvedený v riešení používa kvadratické triedenie.

P – III – 3

Najskôr uvedieme jednoduchšie riešenie, ktoré pre každú permutáciu zostrojí sieť s $O(\log n)$ vrstvami a $O(n \log n)$ komparátormi. Neskôr ukážeme, ako toto riešenie zlepšiť tak, aby používalo iba $O(n)$ komparátorov. Obidve riešenia sa dajú implementovať ako algoritmy pracujúce v čase $O(n \log n)$.

Predpokladajme, že máme na vstupe permutáciu $A = a_1, a_2, \dots a_n$ a nech $k = \lfloor n/2 \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ označuje číslo x zaokrúhlené nadol na najbližšie celé číslo). Prvá vrstva našej siete bude mať tú vlastnosť, že po jej vykonaní budú na prvých k vodičoch čísla $1, 2, \dots, k$ (nie nutne zotriedené) a na posledných $n-k$ vodičoch budú čísla $k+1, k+2, \dots, n$ (nie nutne zotriedené). Táto vrstva sa zostaví takto. Nech S_1 je množina všetkých vodičov v hornej polovici, ktoré obsahujú čísla patriace do dolnej polovice (t.j. vodič i patrí do S_1, ak $i \le k$ a $a_i > k$) a podobne nech S_2 je množina všetkých vodičov v dolnej polovici, ktoré obsahujú čísla z hornej polovice. Je zrejmé, že S_1 a S_2 majú rovnaký počet prvkov. V prvej vrstve každý vodič z S_1 spojíme komparátorom s jedným vodičom z S_2. V prípade, že na vstupe je naša permutácia A, každý takýto komparátor spôsobí výmenu a teda veľké hodnoty na komparátoroch v S_1 sa dostanú do dolnej polovice a naopak. Po skončení prvej vrstvy teda platí požadovaná vlastnosť.

Po skončení prvej vrstvy rozdelíme n vodičov na dve skupiny: horných k a dolných $n-k$. Algoritmus rekurzívne zopakujeme na každej skupine zvlášť. Samozrejme, výsledné siete pre tieto dve skupiny vstupov môžu zdielať vrstvy, lebo pracujú na iných vodičoch. Rekurzia sa skončí vtedy, keď dostaneme skupinu obsahujúcu iba jeden vodič, lebo ten je automaticky utriedený. Keďže po každej vrstve sa nám veľkosť skupín zmenší zhruba na polovicu, celkový počet vrstiev je $O(\log n)$. V každej vrstve použijeme najviac $n/2$ komparátorov (viac ich v jednej vrstve ani byť nemôže), a preto celkový počet komparátorov je $O(n \log n)$.

Konštrukcia s $O(n)$ komparátormi funguje podobne, ale spája dvojice vodičov z S_1 a S_2 komparátormi šikovnejším spôsobom (nie ľubovoľne).

Najskôr zaveďme pojem *cyklus permutácie*. Permutáciu si môžeme predstaviť ako orientovaný graf, v ktorom vrcholy sú čísla $1, 2, \dots, n$ a hrana vedie vždy z i do a_i. V takomto grafe z každého vrcholu práve jedna hrana vychádza a jedna do neho vchádza. Preto graf vždy pozostáva z niekoľkých cyklov. Napríklad permutácia $(7, 5, 4, 1, 2, 6, 8, 3)$ má 3 cykly: $(1 \to 7 \to 8 \to 3 \to 4 \to 1)$, $(2 \to 5 \to 2)$, $(6 \to 6)$.

Všimnime si, že našim cieľom je dostať číslo z vodiča i na vodič a_i. Čísla i a a_i sú ale v tom istom cykle, preto nie je potrebné vymieňať prvky navzájom medzi cyklami. Každý cyklus teda môžeme triediť osobitne. Takto sa nám úloha hneď na začiatku rozdelí na niekoľko menších podúloh. V najhoršom prípade však celá permutácia tvorí jeden cyklus, takže si nepomôžeme.

Teraz ukážeme, ako budeme spracovávať jeden konkrétny cyklus $(x_1 \to x_2 \to \dots \to \to x_l \to x_1)$. Nech $k = \lfloor l/2 \rfloor$ je približne polovica dĺžky cyklu. Označme každé číslo v cykle znakom '+' alebo '−'. Znakom '−' označíme k najmenších čísel v cykle a znakom '+' označíme $n-k$ najväčších. Napríklad pre cyklus $(1 \to 7 \to 8 \to 3 \to 4 \to 1)$ označíme 1 a 3 znakom '−' a 4, 7 a 8 znakom '+'. Čísla označené mínusom budeme volať *malé* a čísla označené plusom budeme volať *veľké.*

Všimnime si súvislé úseky rovnakých znamienok v cykle (súvislý úsek môže pokračovať aj z x_l do x_1). Nech x_i je posledné číslo v niektorom súvislom úseku veľkých čísel (označených plusom). Nasledujúce číslo v cykle je teda malé, nasleduje teda úsek čísel označených mínusom. Nech x_j je posledné číslo v tomto úseku.

Na vodiči x_i je uložené číslo a_{x_i} (ďalšie číslo v cykle po x_i), ktoré je malé. Podobne, na vodiči x_j je uložené číslo a_{x_j}, ktoré je veľké. Číslo x_i je ale veľké a číslo x_j je malé, vodič x_i je teda položený nižšie, ako vodič x_j. Preto ak spojíme vodiče x_i a x_j komparátorom, musí určite dôjsť k výmene.

Pre každý súvislý úsek plusov v cykle takto nájdeme jeden komparátor. V našom príklade ($1 \to 7 \to 8 \to 3 \to 4 \to 1$) čísla 7 a 8 tvoria prvý súvislý úsek plusov a 3 je nasledujúci úsek mínusov. Teda sieť bude obsahovať komparátor medzi vodičmi 8 a 3. Ďalší súvislý úsek plusov tvorí číslo 4 a nasledujúci úsek mínusov je 1. Teda pridáme komparátor medzi 1 a 4.

Popísaným postupom pre každý cyklus permutácie zostavíme komparátory prvej vrstvy. Ak je na vstupe táto permutácia, každý komparátor x_i, x_j spôsobí výmenu. Prvok a_{x_i} sa takto dostane na vodič x_j a vznikne samostatný cyklus obsahujúci iba pôvodný súvislý úsek mínusov. Všetky plusy z pôvodného cyklu budú po skončení v jednom novom cykle. Ak sme teda v niektorom cykle použili p komparátorov, cyklus sa rozpadne na $p + 1$ nových cyklov. Každý komparátor teda pridá jeden cyklus. V ďalšej vrstve opäť nájdeme cykly v novej permutácii a pokračujeme rovnakým spôsobom. Skončíme vtedy, keď máme n jednoprvkových cyklov. Vtedy sú všetky čísla na svojich miestach.

Ak najväčší cyklus mal pred určitou vrstvou veľkosť x, tak po skončení tejto vrstvy bude mať veľkosť najviac $\lfloor x/2 \rfloor + 1$, lebo obsahuje buď iba plusy, alebo iba mínusy. Na začiatku máme cykly s veľkosťou najviac n a skončíme, keď všetky cykly majú veľkosť 1. Každou vrstvou veľkosť cyklov teda klesne približne na polovicu, z čoho vyplýva, že potrebujeme najviac $O(\log n)$ vrstiev. Každý komparátor zvýši počet cyklov o 1. Na začiatku máme aspoň jeden cyklus, na konci máme n cyklov. Použijeme teda najviac $n - 1$ komparátorov.

Túto koštrukciu môžeme zapísať ako algoritmus, ktorý každú vrstvu vypíše v čase $O(n)$, celkový čas teda bude $O(n \log n)$. Pre každú vrstvu najprv v permutácii nájdeme cykly. To spravíme tak, že máme pomocné pole, v ktorom si pre každý prvok pamätáme číslo cyklu. Toto pole inicializujeme na nuly. Potom ideme postupne cez všetky prvky. Ak prvok i ešte nemá priradené číslo cyklu, znamená to, že sme objavili nový cyklus. Priradíme mu nové číslo a prejdeme po všetkých prvkoch tohto cyklu a označíme toto číslo do poľa. Po všetkých prvkoch prejdeme tak, že začneme v i a postupne ideme cez a_i, a_{a_i} atď., až kým neprídeme späť do i.

Keď máme označené všetky cykly, spočítame a uložíme si veľkosť každého cyklu a potom označíme čísla znamienkami '+' alebo '−'. Tu treba postupovať opatrne, aby sme zachovali lineárny čas. Pôjdeme znovu po číslach od 1 po n a pre každý cyklus si v poli pamätáme, koľko jeho členov sme už videli. Keď to číslo je viac ako polovica veľkosti cyklu, označujeme čísla '+', inak ich označujeme ako '−'. Nakoniec už len znova prejdeme cez cykly a keď nájdeme posledný prvok úseku plusov (t.j. i označené '+' také, že a_i je označené '−'), tak nájdeme koniec úseku mínusov začínajúcich prvkom a_i a pridáme komparátor. Potrebujeme si tiež poznačiť, ako sa zmení permutácia, čo budeme potrebovať pre konštrukciu novej vrstvy.

P – III – 4

Úlohu najprv preformulujeme do reči teórie grafov. Uzly budeme nazývať *vrcholmi*, rúry *hranami* a celú sústavu potrubí budeme volať *graf*. Postupnosť (nie nutne rôznych) vrcholov a hrán $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}e_k, v_k$ nazveme *sled*, ak každá hrana e_i spája vrcholy v_{i-1} a v_i. Sled nazveme *ťah*, ak sa v ňom žiadna hrana neopakuje.

Úlohou bolo v danom grafe G nájsť najmenšiu množinu ťahov takú, že žiadne dva nemajú spoločnú hranu a zjednotenie ich hrán obsahuje všetky hrany daného grafu. Alebo jednoduchšie povedané – keď si predstavíme graf ako obrázok, úlohou bolo nakresliť tento obrázok najmenším možným počtom ťahov.

Ako na to? Na úvod si uvedomme zopár jednoduchých skutočností. Keď máme nesúvislý graf, najlepšie riešenie nájdeme tak, že nájdeme najlepšie riešenie pre každý z jeho komponentov. Preto sa ďalej budeme zaoberať len súvislými grafmi. Súčet stupňov vrcholov grafu je párny, lebo je to dvakrát počet jeho hrán. Preto graf má nutne párny počet vrcholov nepárneho stupňa. Nech je ich $2k$, označme ich v_1, v_2, …, v_{2k}.

V každom z týchto vrcholov musí niektorý (aspoň jeden) ťah začínať alebo končiť. Prečo? Zoberme graf, v ktorom sú všetky vrcholy pôvodného grafu a hrany sú práve hrany niektorého ťahu. Všimnime si vrchol, v ktorom tento ťah nezačína ani nekončí. V tomto grafe má tento vrchol nutne párny stupeň – vždy, keď doň vôjdeme, hneď z neho aj vyjdeme, čím sa nám stupeň zväčší o 2. Stupeň konkrétneho vrcholu pôvodného grafu je zjavne súčtom jeho stupňov v grafoch zodpovedajúcich ťahom. Keď má teda tento stupeň byť nepárny, musí mať ten vrchol nepárny stupeň v aspoň 1 ťahu. To sa ale dá iba tak, že v ňom ten ťah začína alebo končí.

Máme teda $2k$ vrcholov a vieme, že v každom z nich začína alebo končí aspoň 1 ťah. Odtiaľ je zjavné, že potrebujeme aspoň k ťahov. Teraz ukážeme, že k ťahov nám stačí. (Okrem špeciálneho prípadu $k = 0$, kedy potrebujeme 1 ťah.)

Najskôr vyriešime jednoduchšiu úlohu. Majme súvislý graf, v ktorom sú všetky stupne vrcholov párne. Potom tento graf vieme nakresliť jedným uzavretým ťahom. Prečo? Zoberme najdlhší ťah. Tento je nutne uzavretý, lebo keby nebol, má v ňom posledný vrchol nepárny stupeň, a teda z neho vychádza nepoužitá hrana, ktorou by sme ho mohli predĺžiť. Keďže je uzavretý je jedno, v ktorom vrchole ho začneme. Keby neobsahoval všetky hrany, existuje vrchol v v tomto ťahu, z ktorého vychádza nepoužitá hrana. Potom ale vieme zostrojiť dlhší ťah tak, že začneme a skončíme náš pôvodný ťah vo vrchole v a navyše pridáme túto doteraz nepoužitú hranu, čo je spor. Ukázali sme teda, že najdlhší ťah v tomto grafe je uzavretý a obsahuje všetky hrany, čo je práve to, čo sme chceli. Uzavretý ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu nazývame *Eulerovský*.

Späť k nášmu problému: ako nakresliť náš súvislý graf k ťahmi? Pospájajme ľubovoľne po dvojiciach vrcholy nepárneho stupňa. Na to použijeme práve k hrán a dostaneme tak súvislý graf, v ktorom majú všetky vrcholy párny stupeň. Ten vieme nakresliť jedným uzavretým ťahom. A keď z tohoto ťahu pridaných k hrán opäť vynecháme, rozpadne sa nám na hľadaných k ťahov. (Resp. pre $k = 0$ nám zostane 1 ťah.)

Ostáva jediný problém – ako efektívne nájsť Eulerovský ťah v danom súvislom grafe s párnymi stupňami vrcholov? Najjednoduchší na pochopenie je nasledujúci postup: nájdeme nejaký ťah a ten postupne predlžujeme, až kým neobsahuje všetky hrany. V našom programe je tento algoritmus implementovaný v rekurzívnej procedúre `vytvor_tah`. Táto procedúra začne v zadanom vrchole v a pridáva ďalšie a ďalšie hrany na koniec ťahu, až kým príde do vrcholu, z ktorého už nevedie nepoužitá hrana. Tento vrchol musí nutne byť v, lebo inak by musel mať nepárny stupeň (ťah doteraz použil párny počet hrán pre všetky vrcholy okrem v). Zostavili sme teda uzavretý ťah. Niektoré z vrcholov na tomto ťahu však ešte môžu mať nepoužité hrany. Pre každý taký vrchol u, ktorý nájdeme, zavoláme procedúru `vytvor_tah` rekurzívne. Tá nájde nový uzavretý ťah prechádzajúci cez vrchol u tak, aby už žiaden vrchol na tomto novom ťahu nemal nepoužité hrany. Nový ťah potom vložíme do pôvodného ťahu na tom mieste, kde pôvodný ťah prechádza cez u.

V programe potrebujeme vedieť pre daný vrchol rýchlo povedať, či má ešte nepoužitú hranu, a ak áno, tak ktorú. V programe máme pre každý vrchol zoznam jeho hrán a ešte špeciálnu premennú, ktorá ukazuje na prvú hranu v zozname, o ktorej nevieme, či je použitá, alebo nie. Vždy keď potrebujeme nepoužitú hranu, začneme z tohot miesta v zozname a ideme, až kým nenájdeme prvú skutočne nepoužitú hranu. Toto miesto si potom zaznačíme v tejto premennej pre ďalšie použitie. Počas celého programu teda prejdeme po zozname hrán pre vrchol iba raz a teda na hľadanie nepoužitých hrán minieme v celom programe čas $O(m)$.

Jednotlivé ťahy sú uložené ako spájané zoznamy hrán, aby sme mohli rýchlo vkladať rekurzívne nájdené uzavreté ťahy. Procedúra `vytvor_tah` pracuje v lineárnom čase v závislosti od počtu hrán komponentu. Najprv nájde počiatočný ťah a potom už len skontroluje všetky vrcholy na tomto ťahu a kde treba, zavolá sa rekurzívne. Vrcholy pridané rekurziou už netreba znovu kontrolovať. Celková časová aj pamäťová zložitosť je teda $O(m)$.

Kvôli zjednodušeniu implementácie program nespája nutne iba vrcholy nepárneho stupňa z toho istého komponentu, to však nemá vplyv na počet nájdených ťahov.

P – III – 5

Idea riešenia je veľmi jednoduchá. Postupne po rade generujeme všetky pozície s najviac N kameňmi, z ktorých sa dá dosiahnuť cieľová pozícia. Všetky nájdené pozície si pamätáme, a pre každú novovygenerovanú pozíciu skontrolujeme, či sme ju už niekedy vygenerovali. Ak nie, zapamätáme si ju a zvýšime počítadlo nájdených pozícií o jedna.

Pozície generujeme odzadu. Začneme z cieľovej pozície a vygenerujeme všetky možnosti pre posledný ťah. Posledný ťah musel byť skok doľava alebo skok doprava. Ak posledným ťahom bol skok doprava z pozície i, po tomto skoku musia byť pozície i a $i+1$ prázdne a pozícia $i+2$ musí obsahovať kameň. Tesne pred týmto skokom museli pozície i a $i+1$ obsahovať kameň a pozícia $i+2$ musela byť prázdna. Ak teda chceme vygenerovať všetky možné pozície z ktorých sa dá dostať do pozície p skokom doprava, jednoducho pre každú trojicu po sebe idúcich políčok pozície p obsahujúcu podpostupnosť 001, nahradíme túto podpostupnosť trojicou 110. Podobne pre skok doľava hľadáme všetky výskyty trojice 100 a nahrádzame ju trojicou 011.

Pre každú uvažovanú pozíciu p vieme teda vygenerovať všetky pozície, z ktorých sa do p dá dostať na jeden ťah. Procedúra `generuj` rekurzívne generuje všetky pozície, z ktorých sa dá dostať do danej pozície. Pre danú pozíciu p vygeneruje všetkých jej priamych (na jeden ťah) predchodcov. Pre každého q predchodcu si overí, či už bol vygenerovaný a ak nie, rekurzívne sa zavolá na q.

Na to, aby sme vedeli zisťovať, či sme už danú pozíciu vygenerovali alebo nie, potrebujeme dátovú štruktúru, ktorá dovoľuje pridávať nové pozície a rýchlo zisťovať, či už bola daná pozícia niekedy pridaná. Dátových štruktúr podporujúcich tieto operácie je množstvo, napríklad hašovacie tabuľky alebo rôzne varianty vyhľadávacích stromov. My sme sa pre jednoduchosť implementácie rozhodli použiť tzv. písmenkový strom (po anglicky trie).

Písmenkový strom je dátová štruktúra na uchovávanie reťazcov núl a jednotiek. Keďže každá pozícia sa dá reprezentovať ako postupnosť núl a jednotiek, písmenkové stromy nám prídu celkom vhod. Písmenkový strom je strom, v ktorom každý vrchol má najviac dvoch potomkov. Každá cesta od koreňa stromu k vrcholu zodpovedá reťazcu – ak i-ta hrana tejto cesty vedie od vrchola k jeho ľavému potomkovi, i-ty znak reťazca je 0, ak k pravému, i-ty znak je 1. Pre každý vrchol si pamätáme, či reťazec zodpovedajúci ceste do tohto vrchola bol skutočne vložený do stromu (mohlo by sa stať že daný vrchol bol vytvorený len preto, že leží na ceste zodpovedajúcej nejakému dlhšiemu reťazcu). Okrem toho si pre každý vrchol pamätáme ukazovateľ na jeho ľavého a pravého potomka (ak daného potomka má). Zistenie, či daný reťazec bol vložený do stromu je veľmi jednoduché – ideme po ceste z koreňa definovanej týmto reťazcom. Ak sa nám podarí dôjsť až na koniec a vrchol, v ktorom skončíme, je označený ako vrchol zodpovedajúci vloženému reťazcu, tento reťazec bol niekedy vložený, inak nie. Vkladanie reťazca je rovnako jednoduché – sledujeme cestu zodpovedajúcu reťazcu a ak narazíme na miesto, kde nemôžeme ísť ďalej lebo ďalšie vrcholy cesty neexistujú, jednoducho potrebné vrcholy vytvoríme.

Časová a pamäťová zložitosť nášho programu závisí od výsledného počtu pozícií P. Pre každú nájdenú pozíciu potrebujeme vytvoriť najviac K uzlov v strome a preto pamäť je $O(PK)$. Pre každú nájdenú pozíciu musíme prezrieť všetkých $2K - 4$ potenciálnych ťahov a každý možný ťah ešte skúšame vložiť do stromu v čase $O(K)$. Teda celkový čas je $O(PK^2)$.

9. Stredoeurópska informatická olympiáda

V dňoch 30. júna až 6. júla 2002 sa v Košiciach konala v poradí už deviata Stredoeurópska olympiáda v informatike (CEOI). Bolo to už druhýkrát, čo sa CEOI konala na Slovensku (prvýkrát v roku 1996), obidva razy to bolo o pár rokov skôr ako sme očakávali, keďže Slovensko na poslednú chvíľu zaskakovalo za krajiny, ktorým sa CEOI zorganizovať nepodarilo. Napriek tomu, že času na prípravu súťaže nebolo veľa, vďaka obrovskému nasadeniu všetkých organizátorov sa CEOI podarilo zorganizovať a celá súťaž prebehla bez väčších problémov.

Za všetkých, ktorí sa o zorganizovanie súťaže zaslúžili, treba spomenúť aspoň Doc. RNDr. Gabrielu Andrejkovú, CSc. z Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, ktorá bola zodpovedná za organizačnú stránku súťaže (ubytovanie účastníkov, strava, zabezpečenie počítačov a miestností, sprievodný program a pod.) a skupinu študentov Univerzity Komenského v Bratislave, ktorí pripravili odbornú stánku súťaže (zadania a riešenia súťažných úloh, testovací software, príprava a inštalácia súťažného prostredia a pod.).

Slovensko reprezentovali na tohtoročnej CEOI až ôsmi študenti – okrem štvorčlenného družstva, ktoré nás neskôr reprezentovalo aj na Medzinárodnej olympiáde v informatike (IOI) v Kórei sa mimo súťaže zúčastnili aj ďalší štyria pozvaní študenti.

Súťaž sa rovnako ako IOI skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Tohtoročné úlohy boli náročnejšie ako býva zvykom, napriek tomu každú z nich aspoň niekoľko súťažiacich zvládlo vyriešiť.

Potešili nás výsledky súťaže, keďže absolútnym víťazom sa stal Peter Bella, študent Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, keď získal 490 bodov zo 600 možných a samozrejme dostal zlatú medailu. Aj výsledky ostatných súťažiacich boli výborné – Slovensko so ziskom 1 zlatej, 1 striebornej a 2 bronzových medailí skončilo prvé v neoficiálnom poradí krajín. A to ešte ďalší dvaja naši študenti, ktorí sa zúčastnili mimo súťaže, získali dosť bodov na bronzové medaily! Tu sú výsledky našich súťažiacich:

Meno	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Body	Medaila
Peter Bella	100	100	100	100	50	40	490	zlato
Jozef Tvarožek	100	60	20	60	30	80	350	striebro
Tomáš Dzetkulič	10	80	100	20	30	10	250	bronz
Radovan Bauer	30	30	100	0	40	40	240	bronz
Michal Malý	10	100	30	10	50	40	240	
Pavol Mravec	20	80	10	100	20	10	240	
Marek Tesař	20	16	10	0	50	30	126	
Ján Mazák	0	53	10	0	50	10	123	

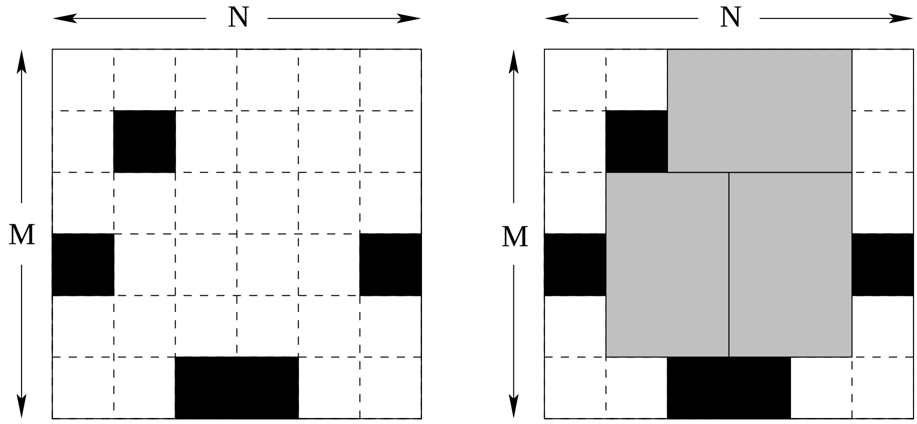
V rámci sprievodného programu absolvovali súťažiaci okrem iného výlet do Vysokých Tatier, navštívili Levoču, Spišský hrad a mohli si aj do sýtosti zašportovať (aj v netradičnejších športoch ako kolky a minigolf).

Michal Forišek

Zadania úloh 9. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Bugs Integrated, s.r.o.

Bugs Integrated, s.r.o. je najväčším výrobcom pamäťových čipov. Zavádzajú produkciu nových 6 terabajtových Q-RAM čipov. Každý čip pozostáva zo šiestich jednotkových štvorcov, usporiadaných do obdĺžnika 2×3. Q-RAM čipy sa vyrábajú z obdĺžnikových kremíkových platní, rozdelených na $N \times M$ jednotkových štvorcov. Všetky štvorce sa starostlivo testujú, pričom sa chybné označia čiernou farbou.



Obr. 63

Nakoniec je kremíková platňa rozrezaná na pamäťové čipy, z ktorých každý pozostáva z 2×3 (alebo 3×2) jednotkových štvorcov. Samozrejme, žiaden čip nesmie obsahovať zlý (označený) štvorec. Nie vždy je možné rozrezať platňu tak, že každý dobrý jednotkový štvorec je súčasťou nejakého pamäťového čipu. Spoločnosť sa snaží znížiť odpad dobrých štvorcov na minimum. Preto by chceli vedieť, ako rozrezať platňu tak, aby z nej vyrobili maximálne množstvo pamäťových čipov.

Úloha: Sú dané rozmery niekoľkých kremíkových platní a zoznam všetkých zlých jednotkových štvorcov pre každú z nich. Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta pre každú platňu maximálny počet pamäťových čipov, ktoré je možné z nej vyrezať.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje počet D ($1 \le D \le 5$) kremíkových platní. Nasleduje D blokov, z ktorých každý popisuje jednu kremíkovú platňu. Prvý riadok každého bloku obsahuje tri celé čísla N ($1 \le N \le 150$), M ($1 \le M \le 10$), K ($0 \le \le K \le MN$), oddelené medzerou. N je šírka platne, M je jej výška a K je počet zlých štvorcov v platni. Nasledujúcich K riadkov obsahuje zoznam zlých štvorcov. Každý riadok pozostáva z dvoch čísel x a y ($1 \le x \le N$, $1 \le y \le M$) – súradníc zlého štvorca (ľavý horný štvorec má súradnice [1, 1], pravý dolný [N, M]).

Výstup: Pre každú platňu zo vstupného súboru obsahuje výstupný súbor jeden riadok s maximálnym počtom pamäťových čipov, ktoré možno z platne vyrezať.

Príklad

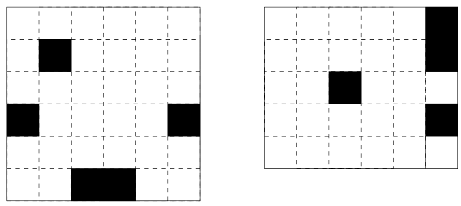
Vstup:

```
2
6 6 5
1 4
4 6
2 2
3 6
6 4
```

```
6 5 4
3 3
6 1
6 2
6 4
```

Výstup:

```
3
4
```



Obr. 64

Dobyvateľov prápor

V celej histórii ľudstva sa odohralo niekoľko kurióznych bitiek. Jednou z nich bola bitka vo Francúzsku v roku 1747...

V malej dedinke Bassignac-le-Haut, ležiacej na ľavej strane rieky Dordogne, hneď pri priehrade Chastang, stála pevnosť. Medzi priehradou a pevnosťou bolo široké schodište postavené z červeného mramoru. Jedného rána zazrel strážca veľký prápor približujúci sa k pevnosti. Na jeho čele kráčal hrozný vodca – Dobyvateľ.

Keď sa Dobyvateľ priblížil, veliteľ pevnosti ho už očakával. Keďže mal k dispozícii len málo vojakov, navrhol Dobyvateľovi: *„Vidím, že máš za sebou na schodišti veľa vojakov. Poďme hrať takúto 'hru'. V každom kole rozdelíš svojich vojakov na dve skupiny ľubovoľným spôsobom. Ja sa potom rozhodnem, ktorá z nich ostane a ktorá pôjde domov. Všetci zostávajúci vojaci postúpia o jeden schod vyššie. Ak aspoň jeden vojak dosiahne najvyšší schod, budeš víťazom. Ináč vyhrám ja a ty skončíš v priehrade.“* dodal veliteľ ukazujúc na Chastang.

Dobyvateľovi sa táto hra zapáčila a začal s „dobývaním“.

Úloha: Predstavte si, že ste v úlohe Dobyvateľa. K pevnosti vedie N ($2 \leq N \leq 2000$) schodov a máte maximálne 1 000 000 000 vojakov. Schody sú očíslované od čísla 1 (pre najvyšší schod) po N (pre najnižší schod). Viete, koľko vojakov stojí na každom schode. Na začiatku žiaden vojak nestojí na schode číslo 1.

Pre každú štartovaciu pozíciu, ktorá je vyhrávajúca (teda existuje stratégia, ktorá umožní vyhrať bez ohľadu na kroky protihráča) by mal Váš program vyhrať. V ostatných prípadoch by mal program dohrať celú hru korektne až do konca (prehrať).

Toto je interaktívny problém. Váš program bude hrať proti nižšie popísanej knižnici. V každom kole Váš program vyberie skupinu vojakov. Knižničný program na základe výberu tejto skupiny vráti číslo 1 alebo 2, ktoré určí tú skupinu, ktorá ostane (1 znamená, že ostane vybraná skupina, 2 že ostane zvyšok vojakov). Ak hra skončí (buď vyhráte alebo už neostane žiaden vojak), knižničný program ukončí korektne Váš program. Iným spôsobom Váš program nesmie byť ukončený.

Knižničné rozhranie

Knižnica `libconq` pozostáva z dvoch funkcií:

- `start` – vráti číslo N a vyplní pole stairs počtami vojakov stojacich na schodoch (t.j. na schode i stojí $stairs[i]$ vojakov)
- `step` – vyžaduje pole subset (obsahujúce aspoň N prvkov (N+1 prvkov v C/C++)), popisujúce vybranú skupinu vojakov, vráti číslo 1 alebo 2 podľa vyššie uvedeného pravidla. Skupina vojakov je popísaná počtom vojakov na každom schode (tak ako vo funkcii start).

V prípade chybného popisu skupiny vojakov bude hra ukončená a Váš program dostane v tomto teste 0 bodov. Nezabudnite, že aj v C/C++ sú schody očíslované od 1.

Nasledujú deklarácie týchto funkcií vo FreePascal-e a v C/C++:

```
procedure start(var N: longint; var stairs:array of longint);
function step(subset:array of longint): longint;

void start(int *N, int *stairs);
int step(int *subset);
```

Na príklade môžete vidieť použitie knižnice vo FreePascal-e aj v C/C++. Obidva príklady robia to isté – odštartujú hru a zahrajú jedno kolo s výberom skupiny pozostávajúcej zo všetkých vojakov na náhodne vybraných schodoch. Váš program bude zrejme pracovať v nekonečnom cykle.

Doporučujeme definovať polia `stairs` a `subset` takým istým spôsobom ako v tomto príklade. (Všimnite si, že knižnica pre FreePascal vráti odpoveď v prvých N prvkoch poľa nezávisle od jeho deklarácie, knižnica pre C/C++ vráti odpoveď v prvkoch poľa s indexami 1 až N.)

FreePascal príklad:

```
uses libconq;
var stairs: array[1..2000] of longint;
    subset: array[1..2000] of longint;
    i,N,result: longint;

...
start(N,stairs);
...
for i:=1 to N do
  if random(2)=0 then subset[i]:=0
  else subset[i]:=stairs[i];
result:=step(subset);
...
```

C/C++ príklad:

```
#include "libconq.h"
int stairs[2001];
int subset[2001];
int i,N,result;

...
start(&N, stairs);
...
for (i=1;i<=N;i++)
  if (rand()%2==0) subset[i]=0;
  else subset[i]=stairs[i];
result=step(subset);
...
```

Knižnicu `libconq` musíte pripojiť k svojmu programu použitím `uses libconq;` vo FreePascal-e a `#include "libconq.h"` v C/C++, pričom je potrebné preložiť program s pridaním argumentu `libconq.c`.

Príklad hry

Vy:	Knižnica:
`start(N,stairs)`	N=8, stairs=(0,1,1,0,3,3,4,0)
`step((0,1,0,0,1,0,1,0))`	vráti 2
`step((0,1,0,0,0,1,0,0))`	vráti 2
`step((0,0,0,3,2,0,0,0))`	vráti 1
`step((0,0,2,0,0,0,0,0))`	vráti 2
`step((0,1,0,0,0,0,0,0))`	vráti 2
`step((0,1,0,0,0,0,0,0))`	nevráti nič: vyhrali ste

Ozdobný plot

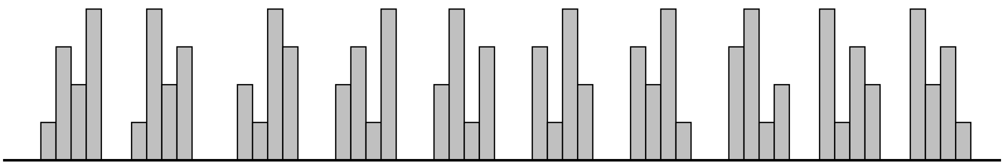
Richard si práve postavil nový dom. Jediné, čo domu ešte chýba, je malý ozdobný drevený plot. Pretože nemá s jeho stavbou skúsenosti, rozhodol sa nejaký objednať. Náhodou sa mu dostal do rúk katalóg firmy ACME (A Company Making Everything) Ploty 2002, najväčšieho výrobcu malých ozdobných drevených plotov na svete. Po prečítaní úvodných strán sa hneď dozvedel, čo robí drevené ploty ozdobnými.

Drevený plot pozostáva z N drevených dosák, uložených zvisle v rade vedľa seba. Plot vyzerá ozdobne práve vtedy, ak platia nasledujúce podmienky:

- Dosky majú rôzne dĺžky, konkrétne 1, 2, ..., N doskových dĺžkových jednotiek.
- Ak doska má v plote dve susedné dosky, tak je buď väčšia ako obidve, alebo menšia ako obidve tieto dosky. (Čo spôsobuje, že vrcholky plota striedavo stúpajú a klesajú.)

To znamená, že každý ozdobný plot s N doskami môžeme jednoznačne popísať permutáciou $a_1, \ldots, a_N$ čísel 1, ..., N takou, že $(\forall i; 1 < i < N)\, (a_i - a_{i-1}) * (a_i - a_{i+1}) > 0$ a naopak, každá takáto permutácia popisuje nejaký ozdobný plot.

Je samozrejmé, že z N dosák možno postaviť veľa rôznych drevených plotov. Aby bol v katalógu poriadok, obchodný zástupca firmy ACME sa rozhodol usporiadať ploty takýmto spôsobom: plot A (reprezentovaný permutáciou $a_1, \ldots, a_N$) je v katalógu pred plotom B (reprezentovaným permutáciou $b_1, \ldots, b_N$) práve vtedy, ak existuje i také, že $a_i < b_i$ a súčasne $(\forall j < i)\, a_j = b_j$. (Teda, keď chce zistiť, ktorý z dvoch plotov sa nachádza v katalógu skôr, stačí uvažovať im prislúchajúce permutácie, nájsť prvé miesto, kde sa permutácie líšia, a porovnať čísla na tomto mieste.) Všetky ozdobné ploty obsahujúce N dosák sú v katalógu očíslované vzostupne (od čísla 1). Toto číslo sa nazýva katalógové číslo.



Obr. 65: Všetky ozdobné ploty vyrobené z $N = 4$ dosák, usporiadané podľa katalógových čísel.

Po starostlivom preskúmaní všetkých malých ozdobných drevených plotov sa Richard rozhodol niektoré z nich objednať. Pre každý si poznačil počet dosák a jeho katalógové číslo. Neskôr, keď stretol svojho priateľa, chcel mu objednané ploty ukázať. Niekde však stratil katalóg. Jediné, čo mu ostalo, boli jeho poznámky. Prosíme, pomôžte mu určiť, ako objednané ploty vyzerali.

Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje počet K ($1 \leq K \leq 100$) vstupných sád. Za ním nasleduje K riadkov, každý z nich popisuje jednu vstupnú sadu.

Každý z týchto K riadkov obsahuje dve prirodzené čísla N a C ($1 \leq N \leq 20$), oddelené medzerou. N je počet dosák v plote a C je katalógové číslo plotu.

Môžte predpokladať, že celkový počet malých ozdobných drevených plotov pozostávajúcich z 20 dosák sa dá zapísať do 64-bitovej celočíselnej premennej so znamienkom (`long long` v C/C++, `int64` vo FreePascale). Taktiež môžete predpokladať, že vstup je korektný, teda C je najmenej 1 a neprekročí počet ozdobných plotov s N doskami.

Výstup: Pre každú vstupnú sadu výstupný súbor obsahuje jeden riadok popisujúci C-ty plot s N doskami v katalógu. Presnejšie, ak plot je reprezentovaný permutáciou $a_1, \ldots, a_N$, potom príslušný riadok výstupného súboru by mal obsahovať čísla a_i (v správnom poradí), oddelené jednou medzerou.

Príklad

Vstup:	**Výstup:**
`2`	`1 2`
`2 1`	`2 3 1`
`3 3`	

Diaľnica a sedem trpaslíkov

Kde bolo tam bolo, bola raz jedna krajina, v ktorej žilo viacero rodín trpaslíkov. Túto krajinu nazývali Trpaslíkovo. Každá rodina žila v jednom domčeku. Trpaslíci často navštevovali priateľov z ostatných rodín. Pretože ale v Trpaslíkove nepoznali hádky, všetci sa navzájom navštevovali.

Jedeného dňa sa ľudia žijúci v krajinách v susedstve Trpaslíkova rozhodli postaviť niekoľko diaľnic. Pretože ľudia nemali strach z trpaslíkov, niektoré z nich naplánovali cez Trpaslíkovo. Trpaslíci, ktorí objavili tieto plány, boli z toho veľmi smutní, keďže sú veľmi malí a pomalí, a teda nedokážu bezpečne cez diaľnice prechádzať. Majú však magickú moc pomocou kúziel zabrániť ľuďom, aby ich postavili.

Radi by sa naďalej navštevovali (každý každého) tak, aby nemuseli prechádzať cez diaľnicu, ktorá oddeľuje ich domčeky.

Trpaslíci sú veľmi malí a nedosiahnu na klávesnicu, a tak Vás požiadali o pomoc.

Úloha: Je daných N bodov (domčekov) v rovine a niekoľko priamok (diaľnic). Vašou úlohou je pre každú priamku zistiť, či všetkých N bodov leží v tej istej polrovine určenej touto priamkou. Váš program musí odpovedať pred načítaním ďalšej priamky. Môžete predpokladať, že žiadna diaľnica neprechádza cez domček.

Popis vstupu a výstupu: Váš program by mal očakávať vstupné údaje zo štandardného vstupu (*stdin* v C/C++, *input* vo FreePascal-e) a zapisovať výstup na štandardný výstup (*stdout* v C/C++, *output* vo FreePascal-e). Prvý riadok vstupu obsahuje celé číslo N ($0 \leq N \leq 100\,000$). Nasleduje N riadkov, z ktorých i-ty obsahuje dve reálne čísla x_i, y_i ($-10^9 \leq x_i, y_i \leq 10^9$) oddelené jednou medzerou – súradnice i-teho domčeka.

Každý nasledujúci riadok obsahuje 4 reálne čísla X_1, Y_1, X_2, Y_2 ($-10^9 \leq X_1, Y_1, X_2, Y_2 \leq 10^9$) oddelené jednou medzerou. Tieto čísla sú súradnice dvoch rôznych bodov $[X_1, Y_1]$ a $[X_2, Y_2]$, ležiacich na priamke (diaľnici). Váš program by mal pre každý vstupný riadok vypísať riadok obsahujúci reťazec „`GOOD`“ ak všetky zadané body (domčeky) ležia v jednej polrovine určenej touto priamkou alebo reťazec „`BAD`“ ak priamka body (domčeky) rozdeľuje. Po zapísaní každého riadku by mal Váš program vyprázdniť výstupný buffer (v nasledujúcich odstavcoch je uvedený príklad ako na to).

Váš program bude prerušený po zapísaní odpovede pre poslednú diaľnicu. Váš program svoju činnosť nesmie sám ukončiť. Môžete predpokladať, že v zadaní nie je viac ako 100 000 diaľnic.

Vstupná a výstupná funkcia v C/C++

Načítanie jedného riadku (všimnite si, že po poslednom %lf nie je medzera):
```
double X_1, Y_1, X_2, Y_2;
scanf(" %lf %lf %lf %lf",&X_1,&Y_1,&X_2,&Y_2);
```
Zapísanie výsledku pre jeden vstupný riadok:
```
printf("GOOD\n"); fflush(stdout);
```

Vstupná a výstupná funkcia vo FreePascal-e

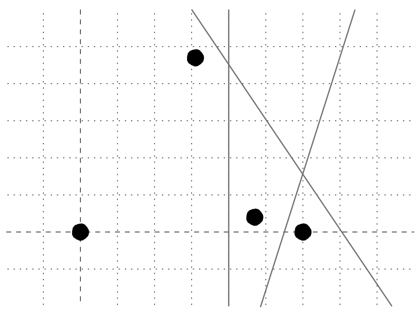
Načítanie jedného riadku:
```
var X_1, Y_1, X_2, Y_2 : double;
read(X_1,Y_1,X_2,Y_2);
```
Zapísanie výsledku pre jeden vstupný riadok:
```
writeln('GOOD'); flush(output);
```

Upozornenie: Oporúčame Vám používať reálny typ `double` (v C/C++ aj vo FreePascal-e) na ukladanie reálnych čísel. Nezabudnite, že pri používaní reálnej aritmetiky môžu vzniknúť zaokrúhľovacie chyby. Pri testovaní, či sa dve reálne čísla x, y rovnajú, nepoužívajte test $x = y$, ale $|x - y| < \varepsilon$ (kde ε je malá konštanta, stačí 10^{-4}).

Príklad

Vstup:
```
4
0.0 0.0
6.00 -0.001
3.125 4.747
4.747 0.47
5 3 7 0
4 -4.7 7 4.7
4 47 4 94
```

Výstup:
```
GOOD
BAD
BAD
```



Obr. 66

Kráľovská stráž

Kde bolo tam bolo, bolo raz jedno kráľovstvo a v ňom, ako to už býva, žil vo svojom zámku kráľ. Pôdorys zámku tvoril obdĺžnik rozdelený do $M \times N$ jednotkových štvorcov. Na niektorých štvorcoch stáli múry, niektoré ostali prázdne. Prázdne štvorce sa nazývali izbami. Keďže kráľ bol veľmi paranoidný, jedného dňa rozhodol vyhĺbiť v niektorých izbách tajné pasce naplnené nebezpečnými aligátormi.

To mu však stále nestačilo. O týždeň neskôr sa rozhodol rozmiestniť v zámku čo najviac strážcov. Lenže to nebolo jednoduché. Strážcovia sú vycvičení, že strieľajú po každom, koho zbadajú. Preto ich musí kráľ rozmiestniť tak, aby na seba nedovideli (ináč by sa okamžite postrieľali!). Zároveň však strážcovia nemôžu byť umiestnení v izbe s pascou.

Dvaja strážcovia v jednej izbe na seba vidia, takže v každej izbe môže byť najviac jeden strážca. Dvaja strážcovia sa navzájom vidia práve vtedy, ak štvorce odpovedajúci izbám, v ktorých sa nachádzajú, sa nachádzajú v tom istom riadku alebo v tom istom stĺpci pôdorysu zámku a medzi nimi nie je žiadny múr. (Strážca vidí len v štyroch smeroch, podobne ako veža v šachu.)

Úloha: Vašou úlohou je zistiť, koľko strážcov môže kráľ umiestniť v zámku (podľa uvedených pravidiel) a nájsť jedno možné rozmiestnenie takéhoto počtu strážcov do izieb.

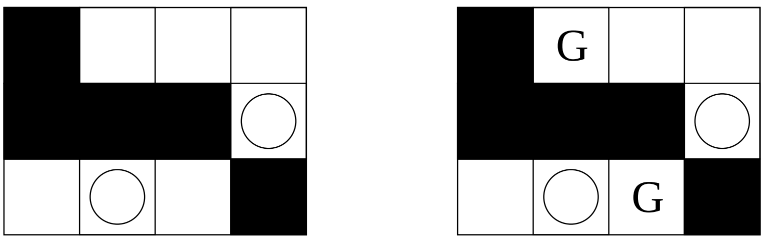
Vstup: Prvý riadok vstupného súboru obsahuje dve prirodzené čísla M, N ($1 \leq M, N \leq$ ≤ 200) – rozmery pôdorysu zámku. Nasleduje M riadkov, pričom i-ty riadok obsahuje N čísel $a_{i,1}, \ldots, a_{i,N}$, oddelených medzerou, pričom:

- $a_{i,j} = 0$ znamená, že štvorec $[i, j]$ je prázdny, teda je to izba bez pasce
- $a_{i,j} = 1$ znamená, že v štvorci $[i, j]$ je pasca
- $a_{i,j} = 2$ znamená, že na štvorci $[i, j]$ stojí múr

Prvá súradnica je číslo riadku a druhá súradnica je číslo stĺpca v pôdoryse zámku.

Výstup: Prvý riadok výstupného súboru by mal obsahovať maximálny počet K strážcov, ktorých môže kráľ v zámku rozmiestniť. Nasledujúcich K riadkov by malo obsahovať jedno možné rozmiestnenie K strážcov do prázdnych izieb zámku tak, aby žiadna dvojica strážcov na seba nedovidela.

Presnejšie, i-ty riadok tvoria dve prirodzené čísla r_i, c_i oddelené jednou medzerou – súradnice izby, v ktorej bude stáť i-ty strážca (r_i je číslo riadku a c_i je číslo stĺpca).



Obr. 67: Pôdorys zámku z príkladu a jedna zo správnych odpovedí

Príklad

Vstup:
```
3 4
2 0 0 0
2 2 2 1
0 1 0 2
```

Výstup:
```
2
1 2
3 3
```

Narodeninová oslava

Jankove narodeniny sa blížia. Tak ako každý rok, chce Janko zorganizovať veľkú záhradnú oslavu. Rád by pozval všetkých svojich priateľov, ale (bohužiaľ) vie, že je to skoro nemožné. Napríklad Zuzka minulý týždeň nechala Števka, a teda nemôže ich pozvať obidvoch naraz. Posledný týždeň Janko navštívil všetkých svojich priateľov a zisťoval, či prídu. Dostal niekoľko prísľubov, ale o to viac požiadaviek. („Ak pozveš mňa, musíš pozvať aj môjho priateľa!“ zvolala Veronika. „Ak pozvete dvojčatá Burdiliakové, tak ani ja ani Jožko neprídeme!“ poznamenal Peter). Janko si uvedomil, že to bude asi ťažký oriešok.

Úloha: Dostanete popis všetkých požiadaviek, ktoré Janko dostal od svojich priateľov. Vašou úlohou je nájsť skupinu ľudí, ktorých má pozvať (a nikoho ďalšieho) tak, aby všetky požiadavky boli splnené. Požiadavky sú popísané nasledujúcim spôsobom:

- `meno` je požiadavka. Táto požiadavka je splnená práve vtedy, keď Janko pozve `meno`.
- `-meno` je požiadavka. Táto požiadavka je splnená práve vtedy, keď Janko nepozve `meno`. (V obidvoch prípadoch je `meno` reťazec najviac 20 malých písmen bez medzier.)
- Ak `R1`, …, `Rk` sú požiadavky, potom aj `(R1 & ... & Rk)` je požiadavka. Táto požiadavka je splnená práve vtedy, keď sú splnené všetky požiadavky `R1`, …, `Rk`.
- Ak `R1`, …, `Rk` sú požiadavky, potom aj `(R1 | ... | Rk)` je požiadavka. Táto požiadavka je splnená práve vtedy, keď je splnená aspoň jedna z požiadaviek `R1`, …, `Rk`.
- Ak `R1`, `R2` sú požiadavky, potom aj `(R1 => R2)` je požiadavka. Táto požiadavka nie je splnená práve vtedy, keď požiadavka `R1` je splnená a požiadavka `R2` nie je splnená.

Vstup: Na stránke nájdete 10 vstupných súborov s názvami `party1.in` až `party10.in`. Za vyriešenie každého z nich môžete získať 10 bodov.

Na prvom riadku vstupného súboru je počet Jankových priateľov F, ďalších F riadkov obsahuje ich mená, na každom riadku jedno. Nasleduje riadok s počtom požiadaviek N. Každý z ďalších N riadkov obsahuje jednu požiadavku.

Výstup: Pre každý vstupný súbor `partyX.in` vytvorte odpovedajúci výstupný súbor `partyX.out`, obsahujúci jedno správne riešenie. Prvý riadok výstupného súboru bude obsahovať počet priateľov K, ktorých by mal Janko pozvať. Ich mená budú v nasledujúcich K riadkoch (v každom riadku jedno meno). Môžete predpokladať, že každý zo vstupných súborov má riešenie (nie nutne jediné). V prípade viacerých riešení uveďte ľubovoľné z nich.

Príklad

Vstup:	**Výstup:**
`3`	`2`
`veronica`	`steve`
`steve`	`dick`
`dick`	
`3`	
`(veronica => dick)`	
`(steve => -veronica)`	
`(steve & dick)`	

14. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 18.–25. augusta 2002 sa v Južnej Kórei v meste Yong-In uskutočnil 14. ročník Medzinárodnej informatickej olympiády (IOI). Zúčastnilo sa na ňom 277 súťažiacich z vyše 70 krajín sveta. Reprezentačné družstvo Slovenska bolo vybrané spomedzi najlepších študentov stredných škôl podľa ich výsledkov na celoštátnom kole Matematickej olympiády, kategória P (programovanie) a na týždňovom výberovom sústredení, ktoré sa konalo v dňoch 21.–27. mája 2002 v priestoroch Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK).

Na celoštátne kolo bolo pozvaných 26 najlepších riešiteľov z celého Slovenska, 11 najlepších spomedzi nich bolo pozvaných na výberové sústredenie, ktoré rozhodlo o tom, že tento rok budú Slovensko na IOI reprezentovať Peter Bella a Jozef Tvarožek z Gymnázia Jura Hronca v Bratislave, Radovan Bauer z Gymnázia Poštová 9 v Košiciach a Tomáš Dzetkulič z Gymnázia P. Horova v Michalovciach. Pred IOI sa naši reprezentanti zúčastnili tradičného česko-poľsko-slovenského prípravného stretnutia vo Varšave a Stredoeurópskej olympiády v informatike (CEOI), ktorá bola tento rok v Košiciach.

Vďaka podpore sponzorov (hlavne Slovenskej informatickej spoločnosti) sa mohli ako pedagogický dozor výpravy zúčastniť tohtoročnej IOI až štyria ľudia. Vedúcim výpravy bol RNDr. Andrej Blaho z FMFI UK, podpredseda Slovenskej komisie Matematickej olympiády pre kategóriu P, členmi výpravy doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc. z Prírodovedeckej fakulty Univerzity P. J. Šafárika v Košiciach, Michal Forišek a Ján Oravec, obaja študenti FMFI UK.

Súťaž sa skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Kórejskí organizátori si podľa očakávania dali na úlohách veľmi záležať, a tak pripravili súťaž, ktorá bola síce o niečo náročnejšia ako po minulé roky, ale úlohy boli veľmi kvalitné a takisto testovacie dáta umožňovali získať nejaké body aj riešiteľom, ktorí nevymysleli optimálne riešenie. Jedna z úloh bola netradičná – ani organizátorom nebolo vopred známe najlepšie riešenie, úlohou súťažiacich bolo nájsť čo najlepšie riešenie pre niekoľko konkrétnych vstupov a za každý vstup dostal plný počet bodov ten súťažiaci, ktorý preň našiel najlepšie riešenie, ostatní dostali primerane menej podľa toho, o koľko horšie riešenie našli.

Medzi úlohy pedagogického dozoru patrí vybrať súťažné úlohy spomedzi úloh navrhnutých organizátormi a hlavne zabezpečovať preklad zadaní úloh do národného jazyka a počas súťaže preklad otázok, ktoré kladú súťažiaci, do angličtiny. O zadaniach príkladov na súťažný deň sa hlasuje večer vopred a následne sa zadania prekladajú, pričom ich preklad často trvá až do skorých ranných hodín. Vďaka tomu, že tento rok tvorili pedagogický dozor až štyria ľudia, boli preklady hotové v rekordnej dobe a už o druhej ráno sme boli späť v ubytovni. Medzinárodná olympiáda je aj výborná príležitosť nadviazať kontakt s organizátormi olympiád v iných krajinách a vymieňať si s nimi skúsenosti.

Tento rok sa na reprezentačné družstvo kládli pomerne vysoké nároky, keďže všetci štyria reprezentanti už boli žiakmi 4. ročníka a mali skúsenosti z predchádzajúcich medzinárodných súťaží (nielen v informatike, ale aj v matematike a fyzike). Chlapci naše očakávania splnili a všetci štyria si z Kórei priniesli medaily. Konkrétne výsledky:

Meno	Body	Medaila
Peter Bella	339	zlato
Tomáš Dzetkulič	286	striebro
Jozef Tvarožek	231	striebro
Radovan Bauer	224	bronz

Treba dodať, že chýbala len trocha „športového šťastia“ a mohli sme dopadnúť ešte o niečo lepšie. Veď Tomášovi Dzetkuličovi chýbalo do zlata len 10 bodov a Radovanovi Bauerovi do striebra dokonca iba 2 body! V neoficiálnom poradí krajín podľa získaných medailí sa Slovensko umiestnilo na výbornom 5.–10. mieste, keď lepšie dopadli len súťažiaci z Číny (3 zlaté, 1 strieborná), domácej Južnej Kórei (3 zlaté, 1 bronzová), Ruska (2 zlaté, 2 strieborné) a Spojených štátov (1 zlatá, 3 strieborné). Tradiční súperi Poliaci získali rovnako ako my 1 zlatú, 2 strieborné a 1 bronzovú medailu, Česi sa tento rok museli uspokojiť s 1 zlatou a 1 bronzovou medailou.

Organizátori si dali záležať aj na neodbornom programe. Mali sme možnosť obzrieť si, ako vyzeral život v tradičnej kórejskej dedine, navštívili sme Suwonský futbalový štadión, kráľovský palác Chandeokgung, tradičnú kórejskú reštauráciu, expozíciu o demilitarizovanej zóne medzi Severnou a Južnou Kóreou, najväčší kórejský zábavný park a mnoho iných zaujímavých miest.

Na záver treba spomenúť, že slovenské družstvo dosahuje na IOI každoročne vynikajúce výsledky, takmer každý rok získal aspoň jeden súťažiaci zlatú medailu. O podobných úspechoch v iných predmetových olympiádach zatiaľ môžeme iba snívať. Podľa slov našich súťažiacich dôležitú úlohu pri ich príprave zohral Korešpondenčný seminár z programovania (KSP), ktorý všetci riešili. KSP poskytuje talentovaným stredoškolákom možnosť riešiť zaujímavé úlohy olympiádneho charakteru v priebehu celého roka a pre najlepších riešiteľov organizuje sústredenia, kde im prednášajú študenti (ale aj pozvaní pedagógovia) z vysokých škôl.

Zaželajme teda do budúcna našim mladým reprezentantom veľa šťastia, nech sa budúci rok môžeme tešiť z aspoň rovnako dobrých výsledkov!

Michal Forišek

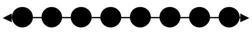
Zadania úloh 14. Medzinárodnej informatickej olympiády

Nepríjemná žabka

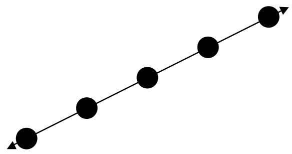
Po celej Kórei je neslávne známa žabka *cheonggaeguri*. Svoju reputáciu si získala neustálym ničením úrody a teda ohrozovaním labilnej kórejskej ekonomiky, závislej práve od pestovania ryže. Táto žabka v noci s radosťou preskáče cez ryžovú plantáž a zadupe stonky ryže do bahna. Ráno, keď roľník uvidel stopy žabiek (polámané rastliny) na svojej plantáži, chcel nájsť stopu žabky, ktorá mu spôsobila najväčšiu škodu. Žabky vždy skáču cez plantáž po priamke a všetky skoky žabky sú rovnako dlhé. Žabka po každom skoku dopadne na mrežový bod myslenej štvorcovej siete.

Obr. 68

Rôzne žabky môžu mať rôzne dĺžky skoku a môžu skákať rôznymi smermi.

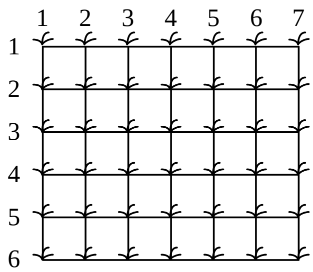


Obr. 69

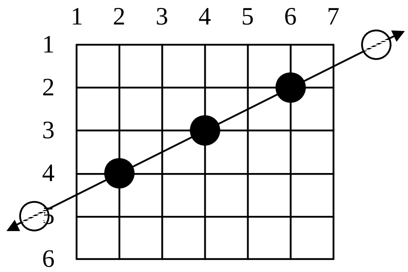


Obr. 70

Plantáž je obdĺžnikového tvaru. Na plantáži rastú rastliny práve vo všetkých mrežových bodoch, ako na obrázku 71. Každá žabka preskákala krížom cez celú plantáž, teda začala aj prestala skákať niekde mimo nej. Trasa jednej žabky spolu s možným začiatkom a koncom je znázornená na obrázku 72.

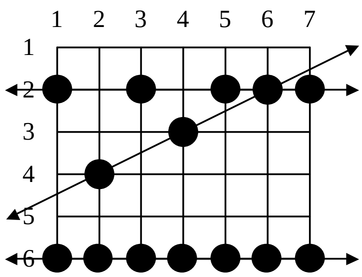


Obr. 71

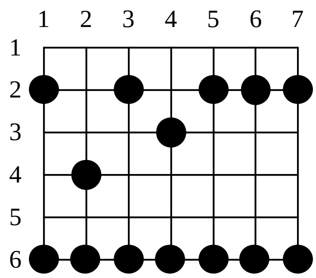


Obr. 72

Cez plantáž mohlo preskákať veľa žabiek. Každým skokom, ktorý skončil vnútri plantáže, žabka dopadla na rastlinu a zadupla ju. Niektoré rastliny mohlo počas noci postupne zadupnúť viacero žabiek. Samozrejme, okrem zadupaných rastlín nezostali po žabkách žiadne iné stopy. Ak noc vyzerala tak, ako je znázornené na obrázku 73, roľník bude vidieť situáciu na obrázku 74.



Obr. 73



Obr. 74

Zo situácie, ktorú vidí roľník, sa dajú zostrojiť všetky možné cesty, kadiaľ mohli žabky cez plantáž skákať. Nás budú zaujímať len tie z nich, počas ktorých žabka aspoň trikrát dopadla vnútri plantáže. Tieto cesty budeme nazývať *stopy žabiek*. V tomto prípade trasy znázornené na obrázku 73 (a aj iné) predstavujú *stopy žabiek*. Zvislá cesta po stĺpci

1 s dĺžkou skoku 4 nie je *stopa žabky*, lebo žabka dopadla len dvakrát. Šikmá cesta prechádzajúca políčkami (riadok 2, stĺpec 3), (riadok 3, stĺpec 4) a (riadok 6, stĺpec 7) nie je *stopa žabky*, lebo dĺžka skoku nie je rovnaká. Všimnite si, že na priamke, na ktorej je *stopa žabky*, môžu byť aj ďalšie, inou žabkou zadupnuté rastliny (napr. na vodorovnej ceste v riadku 2 políčko v stĺpci 6). Dokonca niektoré zadupnuté rastliny nemusia ležať na žiadnych *stopách žabiek*.

Vašou úlohou je spomedzi všetkých *stôp žabiek* nájsť tú, po ktorej skáčúca žabka zadupla najviac rastlín, a teda spôsobila kórejskej ekonomike najväčšiu škodu. Táto žabka bude odchytená severokórejskou armádou a následne jej bude udelená pochvala pred nastúpenou čatou. Na obrázku 74 by to bola *stopa žaby* vedúca v riadku 6, ktorá zadupe 7 rastlín.

Vstup: Váš program bude vstup čítať zo štandardného vstupu. Na prvom riadku budú dve celé čísla R, C ($1 \le R, C \le 5\,000$) – počet riadkov a stĺpcov plantáže. Na druhom riadku je jedno celé číslo N ($3 \le N \le 5\,000$) – počet zadupnutých rastlín. Nasleduje N riadkov, každý z nich obsahuje súradnice jednej zadupnutej rastliny r_i a c_i ($1 \le r_i \le R$, $1 \le c_i \le C$). Každá zadupnutá rastlina je uvedená práve raz.

Výstup: Váš program má písať na štandardný výstup. Má vypísať jediný riadok a na ňom jediné celé číslo K – najväčší počet rastlín, ktoré mohla zadupnúť jedna žabka skáčúca po nejakej *stope žabky*. Ak neexistuje žiadna *stopa žabky*, vypíšte ako výsledok číslo 0.

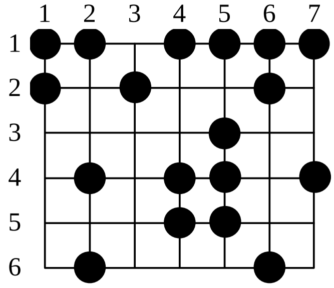
Hodnotenie: Ak dáte v časovom limite správnu odpoveď pre nejaký vstup, dostanete zaň plný počet bodov, v opačnom prípade zaň nedostanete žiadne body.

Príklad

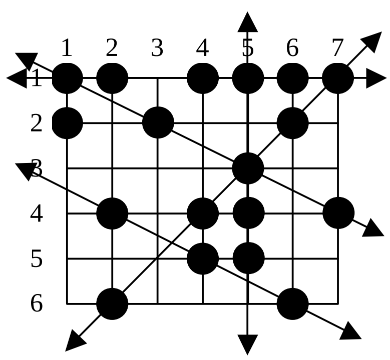
(viď obrázok 75 – zadanie a obrázok 76 – riešenie):

Vstup:
```
6 7
18
1 1        2 1
6 2        2 3
3 5        2 6
1 5        4 2
4 7        4 4
1 2        4 5
1 4        5 4
1 6        5 5
1 7        5 6
```

Výstup:
```
4
```



Obr. 75



Obr. 76: najviac 4 rastliny

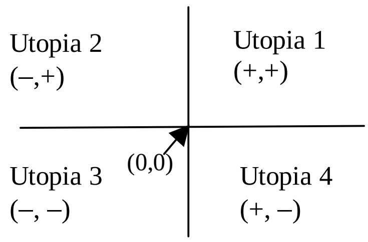
Príklad

Vstup: **Výstup:**

```
6 7                                       7
14
2 1         2 7         6 3
6 6         3 4         6 4
4 2         6 1         6 5
2 5         6 2         6 7
2 6         2 3
```

Rozdelená Utópia

Prekrásna krajina Utópia bola raz spustošená vojnou. Potom, ako ju nepriatelia obsadili, rozdelili ju na štyri regióny pomocou poludníka (sever–juh) a rovnobežky (východ–západ). Priesečník týchto čiar označili ako bod $(0, 0)$. Všetky štyri časti si nárokovali meno Utópia, ale časom sa stali všeobecne známymi ako Utópia 1 (severovýchod), Utópia 2 (severozápad), Utópia 3 (juhozápad) a Utópia 4 (juhovýchod). Bod v ľubovoľnom regióne bol identifikovaný svojou vzdialenosťou na východ a na sever od bodu $(0, 0)$. Tieto vzdialenosti mohli byť aj záporné; a teda bod v Utópii 2 bol označovaný dvojicou (záporné, kladné), v Utópii 3 dvojicou (záporné, záporné), v Utópii 4 dvojicou (kladné, záporné) a v Utópii 1 dvojicou kladných čísel.



Obr. 77

Hlavným problémom bolo, že obyvatelia mali zakázané prechádzať cez hranice. Našťastie, geniálni IOI súťažiaci z Utópie (nejakí Jano a Mišo) navrhli bezpečné zariadenie pre teleportáciu. Tento stroj vyžaduje kódové čísla, z ktorých každé môže byť použité iba raz. Teraz úlohou riešiaceho tímu (teda vašou) je viesť teleportovaného z jeho počiatočnej pozície cez regióny Utópie v požadovanom poradí. Nemusíte sa starať, kde v regióne pristane, ale musíte dodržať postupnosť N čísel regiónov, v ktorých treba postupne pristáť. Mali by ste počítať s tým, že môže prísť požiadavka, aby teleportovaný pristál dva alebo viackrát za sebou v tom istom regióne. Po opustení počiatočného bodu $(0, 0)$ už nikdy nesmie pristáť na hraniciach.

Na vstupe dostanete postupnosť $2N$ kódových čísel, ktoré bude treba rozdeliť do N dvojíc, predstavujúcich kódy. Pritom pred každé číslo umiestnite znamienko plus alebo mínus. Ak sa teleportovaný práve nachádza v bode (x, y) a použije kódovú dvojicu

$(+u, -v)$, bude teleportovaný do bodu $(x + u, y - v)$. Daných $2N$ čísel je možné použiť v ľubovoľnom poradí, každé musí mať znamienko plus alebo mínus.

Predpokladajte, že sú dané kódové čísla 7, 5, 6, 1, 3, 2, 4, 8 a treba viesť teleportovaného podľa postupnosti čísel regiónov 4, 1, 2, 1. Postupnosť kódových dvojíc $(+7, -1)$, $(-5, +2)$, $(-4, +3)$, $(+8, +6)$ dosiahne, že teleportovaný sa dostane z bodu $(0, 0)$ postupne v tomto poradí do pozícií $(7, -1)$, $(2, 1)$, $(-2, 4)$, $(6, 10)$. Tieto body sú umiestnené v Utópii 4, v Utópii 1, v Utópii 2 a v Utópii 1.

Úloha: Je daných $2N$ rôznych kódových čísel a postupnosť N čísel regiónov, ktorá určuje, kde má teleportovaný pristávať. Vytvorte z týchto čísel postupnosť kódových dvojíc, ktorá povedie teleportovaného danou postupnosťou čísel regiónov.

Vstup: Váš program bude čítať zo štandardného vstupu. Prvý riadok obsahuje kladné celé číslo N $(1 \le N \le 10\,000)$. Druhý riadok obsahuje $2N$ rôznych kódových čísel typu integer ($1 \le$ kódové číslo $\le 100\,000$), ktoré sú oddelené jednou medzerou. Posledný riadok obsahuje postupnosť N čísel regiónov, t.j. čísla spomedzi 1, 2, 3 alebo 4.

Výstup: Váš program vypisuje na štandardný výstup. Výstup pozostáva z N riadkov. Každý riadok obsahuje dvojicu kódových čísel, pred ktorými sa nachádzajú znamienka. Tieto kódové dvojice budú riadiť teleportovaného podľa zadanej postupnosti čísel regiónov. Medzi znamienkom a číslom nesmie byť medzera, ale po prvom čísle musí byť práve jedna medzera.

Ak má úloha viac riešení, váš program má z nich vypísať jedno ľubovoľné. Ak úloha nemá riešenie, váš program vypíše číslo 0.

Príklad

Vstup:	**Výstup:**
`4`	`+7 -1`
`7 5 6 1 3 2 4 8`	`-5 +2`
`4 1 2 1`	`-4 +3`
	`+8 +6`

Príklad

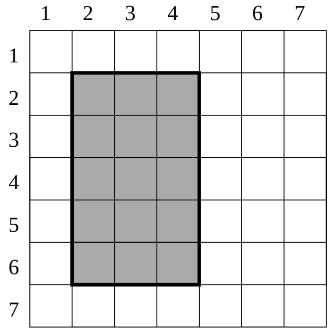
Vstup:	**Výstup:**
`4`	`+3 -2`
`2 5 4 1 7 8 6 3`	`-4 +5`
`4 2 2 1`	`-6 +1`
	`+8 +7`

Hodnotenie: Ak váš program pre daný testovaný príklad dá v časovom limite správny výstup, tak zaň získate plný počet bodov, inak zaň dostanete 0 bodov.

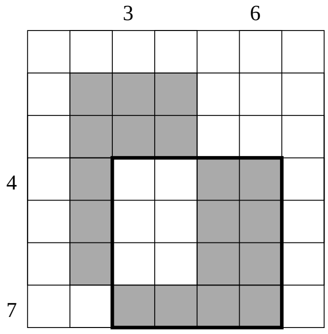
XOR

Treba napísať aplikáciu pre mobilné telefóny spoločnosti, ktorá tohtoročnú súťaž sponzoruje. Ich mobily majú čiernobiele obrazovky tvorené malými štvorčekmi, z ktorých každý môže byť čierny alebo biely. Pritom súradnice štvorčekov sú číslované x-ová zľava doprava a y-ová zhora nadol ako na obrázku. Sponzor chce mať v aplikácii viacero obrázkov rôznych veľkostí. Aby sa nemuseli ukladať celé obrázky ako bitmapy do pamäte, bude ich treba kresliť prostredníctvom grafickej knižnice mobilu. Táto knižnica vie robiť jedinú operáciu – `XOR(L, R, T, B)`, ktorá zneguje farbu všetkých štvorčekov v obdĺžniku s ľavým horným rohom (L, T) a pravým dolným rohom (R, B). (*Teda L je najľavejšia a R najpravejšia x-ová súradnica, T je najhornejšia a B najdolnejšia y-ová súradnica obdĺžnika. Všimnite si, že v niektorých iných grafických knižniciach je poradie argumentov iné.*) Na začiatku kreslenia sú všetky štvorčeky biele.

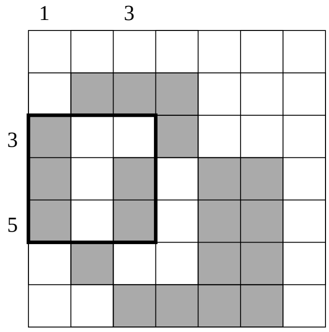
Všimnite si napríklad obrázok 80. Tento vieme nakresliť napríklad nasledovným postupom: Začneme s bielou obrazovkou. Zavolaním `XOR(2,4,2,6)` dostaneme výsledok, ktorý vidíte na obrázku 78. Keď na ten zavoláme `XOR(3,6,4,7)`, dostaneme obrázok 2 a z toho príkazom `XOR(1,3,3,5)` výsledný obrázok 80.



Obr. 78



Obr. 79



Obr. 80

Dostanete niekoľko čiernobielych obrázkov. Vašou úlohou bude pre každý z nich nájsť čo najkratšiu (nie nutne optimálnu) postupnosť volaní funkcie `XOR`, ktorá na bielu obrazovku tento obrázok nakreslí. Obrázky dostanete v samostatných vstupných súboroch a pre každý z nich máte odovzdať výstupný súbor, obsahujúci postupnosť volaní funkcie `XOR`, ktorá ho nakreslí. *Neodovzdávate* program, ktorý použijete pri riešení tejto úlohy.

Vstup: budú volať `xor1.in` až `xor10.in`. Štruktúra vstupného súboru je nasledovná: Na prvom riadku je jedno celé číslo N $(5 \leq N \leq 2\,000)$, udávajúce rozmer obrazovky. Teda obrazovka sa skladá z $N \times N$ štvorčekov. Nasledujúce riadky súboru predstavujú riadky obrázku v poradí zhora nadol. Každý z nich obsahuje N celých čísel, určujúcich farby štvorčekov v príslušnom riadku v poradí zľava doprava. Každé z týchto čísel je buď 0 (biely štvorček) alebo 1 (čierny štvorček).

Výstup: Máte odovzdať 10 výstupných súborov, ktoré budú zodpovedať jednotlivým vstupným súborom.
Prvý riadok musí obsahovať text:
`#FILE xor I`
kde I je číslo zodpovedajúceho vstupu. Druhý riadok má obsahovať celé číslo K – počet volaní funkcie `XOR`. Nasledujúcich K riadkov bude popisovať jej jednotlivé volania. Každý riadok bude obsahovať štyri celé čísla L, R, T, B v tomto poradí – parametre funkcie.

Príklad

xor1.in

```
7
0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0
1 0 0 1 0 0 0
1 0 1 0 1 1 0
1 0 1 0 1 1 0
0 1 0 0 1 1 0
0 0 1 1 1 1 0
```

xor1.out

```
#FILE xor 1
3
2 4 2 6
3 6 4 7
1 3 3 5
```

Hodnotenie: V nasledovných prípadoch váš program dostane za obrázok 0 bodov:

- ak vami odovzdané volania funkcie `XOR` nevytvoria tento obrázok
- ak počet volaní `XOR` vo vašom súbore nie je K
- ak vo vašom súbore $K > 40\,000$
- ak váš výstup bude obsahovať riadok s $L > R$ alebo $T > B$
- ak váš výstup bude obsahovať riadok s nekladnou hodnotou L, R, T alebo B
- ak váš výstup bude obsahovať riadok s hodnotou L, R, T alebo B väčšou ako N

V opačnom prípade sa váš počet bodov za tento obrázok určí podľa vzorca:

$$1 + 9 \times (\text{Počet volaní najlepšieho riešenia / Váš počet volaní})$$

Tento počet bodov bude pre každý obrázok samostatne zaokrúhlený na jedno desatinné miesto. Po sčítaní bodov za všetky obrázky bude váš výsledný počet bodov zaokrúhlený na celé číslo.

Príklad: Odovzdali ste riešenie so 121 volaniami funkcie `XOR`. Ak je toto najlepšie dosiahnuté riešenie spomedzi všetkých súťažiacich, dostanete za príslušný obrázok 10 bodov. Ak by najlepšie riešenie malo povedzme 98 volaní, dostali by ste $1+9\times(98/121) = 8.289$, teda po zaokrúhlení 8.3 bodu.

Dávkové úlohy

Daná je postupnosť N úloh, ktoré treba spracovať na jednom počítači. Úlohy sú očíslované číslami 1, 2, …, N. Pred vykonaním ich treba rozdeliť do niekoľkých dávok, pričom každá dávka musí obsahovať niekoľko po sebe idúcich úloh. Vykonávanie úloh začína v čase 0. Dávky sú postupne spracované v takom poradí, aby ak dávka b obsahuje úlohy s číslami menšími ako dávka c, bola dávka b vykonaná pred dávkou c. Úlohy v dávke sú postupne vykonané. Až keď počítač dokončí poslednú úlohu v dávke, dá na výstup výsledky všetkých úloh v dávke.

Pred vykonaním každej z dávok potrebuje počítač čas S na nastavenie parametrov. Pre každú úlohu i vieme čas T_i, potrebný na jej spracovanie a jej koeficient ceny F_i. Ak dávka obsahuje úlohy x, $x+1$, …, $x+k$ a začína v čase t, výstup každej z úloh v tejto dávke dostaneme v čase $t + S + (T_x + T_{x+1} + ... + T_{x+k})$. Všimnite si, že počítač dá na výstup výsledky všetkých úloh v dávke v rovnakom čase. Ak čas, v ktorom sa dozvieme výsledok úlohy i je O_i, jej cena je $O_i \times F_i$. Napríklad majme 5 úloh, čas na nastavenie parametrov $S = 1$, $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = (1, 3, 4, 2, 1)$ a $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) = = (3, 2, 3, 3, 4)$. Ak úlohy rozdelíme do troch dávok $\{1, 2\}$, $\{3\}$ a $\{4, 5\}$, budú časy, keď sa dozvieme výstupy $(O_1, O_2, O_3, O_4, O_5) = (5, 5, 10, 14, 14)$. Ceny jednotlivých úloh teda budú $(15, 10, 30, 42, 56)$. Celková cena tohoto rozdelenia do dávok je súčet cien všetkých úloh, v našom príklade je to 153.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde pre dané úlohy cenu ich najlacnejšieho rozdelenia do dávok.

Vstup: Váš program má čítať zo štandardného vstupu. Na prvom riadku bude počet úloh N $(1 \leq N \leq 10\,000)$. Na druhom riadku je celé číslo S $(0 \leq S \leq 50)$ – čas, ktorý počítač potrebuje na nastavenie parametrov pred každou dávkou. Nasledujúcich N riadkov popisuje úlohy v poradí od 1 do N. Na i-tom z nich sú dve celé čísla T_i, F_i $(1 \leq T_i, F_i \leq 100)$ oddelené medzerou, kde T_i je čas potrebný na vykonanie a F_i koeficient ceny i-tej úlohy.

Výstup: Na štandardný výstup vypíšte jeden riadok a na ňom jedno celé číslo – najmenšiu možnú cenu rozdelenia úloh do dávok.

Príklad

Vstup:	**Výstup:**

`2`
`50`
`100 100`
`100 100`
	`45000`

Príklad

Vstup:	**Výstup:**

`5`
`5`
`1`
`1 3`
`3 2`
`4 3`
`2 3`
`1 4`
	`153`

Poznámka: Pre žiadny vstup cena žiadneho rozdelenia do dávok neprekročí $2^{31} - 1$.

Hodnotenie: Ak v časovom limite dáte správny výstup pre daný vstup, dostanete zaň plný počet bodov, ináč 0.

Autobusové zastávky

Mesto Yong-In plánuje vybudovať autobusovú sieť s N zastávkami. Každá zastávka je na rohu ulice. Yong-In je moderné mesto a preto má jeho mapa tvar štvorcovej siete rovnako veľkých štvorcov. Dve z týchto zastávok je potrebné vybrať ako kľúčové, označme ich H_1 a H_2. Tieto kľúčové zastávky budú navzájom spojené priamou expresnou autobusovou linkou a každá spomedzi zostávajúcich $N-2$ zastáviek bude spojená buď s H_1 alebo s H_2 (nie s oboma), ale už nie so žiadnou inou zastávkou.

Vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvomi zastávkami je dĺžka najkratšej možnej cesty prechádzajúcej ulicami. Zastávka je reprezentovaná bodom so súradnicami (x, y). Vzdialenosť medzi dvoma zastávkami (x_1, y_1) a (x_2, y_2) je $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Ak sú zastávky A a B pripojené k tej istej kľúčovej zastávke H_i, potom dĺžka cesty z A do B je súčet vzdialeností z A do H_i a H_i do B. Ak sú zastávky A a B spojené s rôznymi kľúčovými zastávkami, napr. A s H_1 a B s H_2, potom dĺžka cesty z A do B je súčet vzdialeností z A do H_1, z H_1 do H_2 a z H_2 do B.

Plánovací odbor mesta Yong-In by sa rád uistil, že každý občan môže dosiahnuť ľubovoľný bod v meste čo najrýchlejšie. Preto tento odbor chce vybrať dve zastávky, ktoré vyhlási za kľúčové, takým spôsobom, že vo výslednej autobusovej sieti dĺžka najdlhšej cesty medzi ľubovoľnými dvoma zastávkami bude najkratšia možná.

Voľba P dvoch kľúčových a k nim pripojených zastáviek je lepšia než iná voľba Q, ak dĺžka najdlhšej autobusovej cesty je kratšia v P ako v Q. Vašou úlohou je napísať program, ktorý vypočíta dĺžku tejto najdlhšej cesty pre najlepšiu možnú voľbu P.

Vstup: Váš program číta zo štandardného vstupu. Prvý riadok obsahuje kladné celé číslo N $(2 \leq N \leq 500)$ – počet autobusových zastáviek. Každý z nasledujúcich N riadkov obsahuje x-ovú a y-ovú súradnicu (v tomto poradí) autobusovej zastávky. Obe súradnice sú kladné celé čísla ≤ 5000. Žiadne dve zastávky nie sú na tom istom mieste.

Výstup: Váš program vypisuje na štandardný výstup. Výstup obsahuje jeden riadok s jediným kladným celým číslom, ktoré predstavuje minimálnu dĺžku najdlhšej autobusovej cesty pre daný vstup.

Príklad

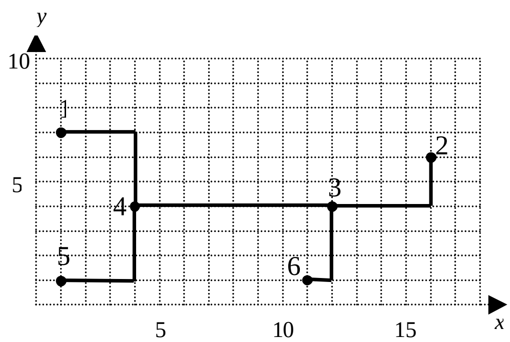
Vstup:		**Výstup:**
6		20
1 7	4 4	
16 6	1 1	
12 4	11 1	

Príklad

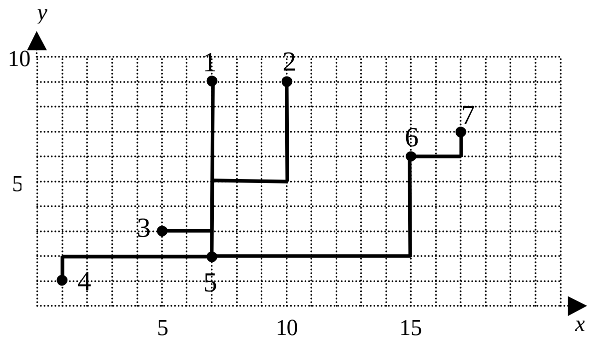
Vstup:		**Výstup:**
7		25
7 9	7 2	
10 9	15 6	
5 3	17 7	
1 1		

Nasledujúce obrázky predstavujú autobusové siete pre vyššie uvedené vstupy. Ak v Príklade 1 sú zvolené ako kľúčové zastávky 3 a 4, potom najdlhšia cesta je buď medzi zastávkami 2 a 5 alebo medzi zastávkami 2 a 1. Neexistuje lepšia voľba pre kľúčové zastávky a teda odpoveď je 20.

Pre autobusovú sieť v Príklade 2, sk sú zvolené ako kľúčové zastávky 5 a 6, potom najdlhšia cesta je medzi zastávkami 2 a 7. Neexistuje lepšia voľba pre kľúčové zastávky a teda odpoveď je 25.



Obr. 81

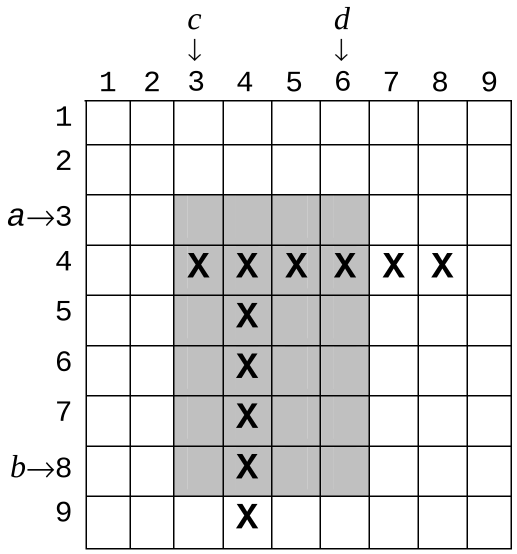


Obr. 82

Hodnotenie: Ak váš program pre daný test dá v časovom limite na výstup správnu odpoveď, tak zaň dostanete plný počet bodov, inak dostanete 0 bodov.

Dve tyčky

Tyčka je vodorovná alebo zvislá postupnosť aspoň 2 susedných políčok štvorcovej siete. Dve tyčky, jedna vodorovne a jedna zvislo, sú umiestnené na sieti rozmerov $N \times N$. Na obrázku sú znázornené **X**-kami. Tyčky môžu a nemusia byť rovnako dlhé, navyše sa môžu aj pretínať. Ak nie je jasné, či obe zaberajú niektoré políčko (ako políčko $(4,4)$ na obrázku), dohodneme sa, že sú na ňom obe. Teda na obrázku je horné políčko zvislej tyčky $(4,4)$, nie $(5,4)$.



Obr. 83

Na začiatku nevieme o pozícii tyčiek nič, preto vašou úlohou bude napísať program, ktorý ich nájde. Vodorovnú budeme volať `ROD1` a zvislú `ROD2`. Každé políčko štvorcovej siete je jednoznačne určené svojimi súradnicami (r, c), kde r je riadok a c stĺpec. Ľavý horný roh štvorcovej siete má súradnice $(1, 1)$. Každú tyčku vieme popísať súradnicami jej koncových bodov, budeme ju značiť $\langle (r_1, c_1), (r_2, c_2) \rangle$. Na obrázku `ROD1` je $\langle (4, 3), (4, 8) \rangle$ a `ROD2` je $\langle (4, 4), (9, 4) \rangle$.

Pri riešení tejto úlohy budete komunikovať s knižnicou. Rozmer štvorcovej siete vám vráti funkcia `gridsize`, ktorú musíte zavolať na začiatku spracovania každého vstupu. Hľadať tyčky budete pomocou funkcie `rect(a,b,c,d)`, ktorá preskúma obdĺžnikový región s rohmi (a, c) a (b, d), kde $a \le b$ a $c \le d$. *Dajte si na správnosť poradia parametrov tejto funkcie dobrý pozor!* Ak sa v tomto obdĺžniku nachádza nejaké **X**, teda časť nejakej tyčky, funkcia vráti hodnotu 1. V opačnom prípade vráti hodnotu 0. *Teda v príklade na obrázku* `rect(3,8,3,6)` *vráti 1.* Vašou úlohou je napísať program, ktorý nájde presné pozície tyčiek, pričom bude mať obmedzený počet volaní funkcie `rect`.

Keď váš program bude vedieť presné pozície tyčiek, oznámi ich knižnici volaním funkcie `report(r1,c1,r2,c2,p1,q1,p2,q2)`, kde `ROD1` je $\langle (r_1, c_1), (r_2, c_2) \rangle$ a `ROD2` je $\langle (p_1, q_1), (p_2, q_2) \rangle$. Zavolanie tejto funkcie váš program ukončí. Nezabudnite, že `ROD1` je vodorovná a `ROD2` je zvislá tyčka. Navyše (r_1, c_1) musí byť ľavý koniec vodorovnej a (p_1, q_1) horný koniec zvislej tyčky. Teda $r_1 = r_2$, $c_1 < c_2$, $p_1 < p_2$ a $q_1 = q_2$. Ak vaše volanie nebude spĺňať tieto obmedzenia, knižnica vypíše na štandardný výstup chybové hlásenie.

Obmedzenia:

- Informácie získava váš program len volaním funkcií `gridsize` a `rect`.
- Rozmer štvorcovej siete N spĺňa nerovnosť $5 \le N \le 10\,000$.
- Počet volaní funkcie `rect` môže byť najviac 400. Každé ďalšie volanie tejto funkcie váš program ukončí.
- Funkciu `rect` má váš program zavolať viac ako jedenkrát, funkciu `report` práve jedenkrát.
- Ak funkciu `rect` zavoláte s nekorektnými parametrami (napr. niektorá zo súradníc je väčšia ako N), váš program bude ukončený.
- Váš program nesmie používať žiadne súbory ani štandardný vstup a výstup.

Knižnice

FreePascal-ová knižnica (`prectlib.ppu`, `prectlib.o`) obsahuje:

```
function gridsize: LongInt;
function rect(a,b,c,d : LongInt) : LongInt;
procedure report(r1, c1, r2, c2, p1, q1, p2, q2 : LongInt);
```

Inštrukcie: Aby ste skompilovali svoj súbor `rods.pas`, musíte v ňom mať riadok:

```
uses prectlib;
```

a skompilovať ho príkazom:

```
fpc -So -O2 -XS rods.pas
```

V programe `prodstool.pas` nájdete príklad použitia tejto knižnice.

Knižnica pre **GNU C/C++** (`crectlib.h`, `crectlib.o`) obsahuje:

```
int gridsize();
int rect(int a, int b, int c, int d);
void report(int r1, int c1, int r2, int c2, int p1, int q1,
            int p2, int q2);
```

Inštrukcie: Aby ste skompilovali svoj súbor `rods.c`, musíte v ňom mať riadok:

```
#include "crectlib.h"
```

a skompilovať ho príkazom:

```
gcc -O2 -static rods.c crectlib.o -lm
g++ -O2 -static rods.cpp crectlib.o -lm
```

V programe `crodstool.c` nájdete príklad použitia tejto knižnice.

C/C++ v RHIDE: Nezabudnite v menu *Option* → *Linker* pripísať `crectlib.o`.

Experimentovanie:

Ak chcete svoj program ladiť s použitím príslušnej knižnice, potrebujete vytvoriť súbor `rods.in`. Tento súbor musí obsahovať 3 riadky. Na prvom z nich bude jedno celé číslo N – rozmer štvorcovej siete. Druhý riadok obsahuje súradnice r_1, c_1, r_2, c_2, popisujúce vodorovnú tyčku. Tretí riadok obsahuje súradnice p_1, q_1, p_2, q_2, popisujúce zvislú tyčku. Pritom (r_1, c_1) musí byť ľavý koniec vodorovnej a (p_1, q_1) horný koniec zvislej tyčky.

Potom ako váš program zavolá funkciu `report`, vytvorí knižnica výstupný súbor `rods.out`. V tomto súbore bude počet volaní funkcie `rect` a súradnice koncov tyčiek, ktoré váš program oznámil knižnici. Ak váš program komunikoval s knižnicou nekorektne, v tomto súbore bude príslušné chybové hlásenie.

Celá komunikácia medzi vaším programom a knižnicou sa ukladá do súboru `rods.log`. Riadky tohoto súboru majú nasledovný formát:

```
k : rect(a,b,c,d) = ans.
```

Takýto riadok znamená, že ako k-tu zavolal váš program funkciu `rect(a,b,c,d)` a dostal odpoveď `ans`.

Príklad

Vstup:	**Výstup:**
9	20
4 3 4 8	4 3 4 8
4 4 9 4	4 4 9 4

Hodnotenie:

Ak váš program poruší niektoré z obmedzení (napr. viac ako 400 volaní funkcie `rect`), dostane za príslušný vstup 0 bodov. Takisto 0 bodov dostane, ak jeho odpoveď je nesprávna.

Ak je jeho odpoveď správna, počet bodov závisí od počtu volaní funkcie `rect`, ktorý ste potrebovali na nájdenie tyčiek. Ak je nanajvýš 100, dostanete 5 bodov. Ak potreboval medzi 101 a 200 volaní, dostanete 3 body. Ak potreboval medzi 201 a 400 volaní, dostanete za tento vstup 1 bod.

Korešpondenčný seminár SK MO

V 51. ročníku matematickej olympiády prebiehal pre najúspešnejších olympionikov predchádzajúceho ročníka MO zo Slovenska korešpondenčný seminár SK MO. Tento korešpondenčný seminár vznikol už v 24. ročníku MO preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. V súčasnosti, pretože existuje veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov (niektorým je venovaná samostatná kapitola), a pretože počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, seminár SK MO sa zameriava na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšujú akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár sa stáva dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu. V 44. ročníku MO bol KS SK MO prvýkrát zorganizovaný samostatne na Slovensku. Pozostáva z piatich sérií po sedem úloh. Do riešenia sa v tomto ročníku zapojilo 13 študentov.

Korešpondenčný seminár viedol *Tomáš Jurík* a opravovanie zabezpečovali študenti FMFI UK (všetko bývalí olympionici).

Celkové poradie KS SK MO 2001/2002

1. *Andrej Osuský*, 4. ročník, Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 106 bodov
2. *Katarína Quittnerová*, 4. ročník, Gymnázium Bilíkova, Bratislava, 94,5 bodov
3. *Marek Tesař*, 4. ročník, Gymnázium B.S.– Timravy, Lučenec, 80 bodov
4. *Radovan Bauer*, 4. ročník, Gymnázium Poštová, Košice, 51,5 bodov
5. *Ján Mazák*, 4. ročník, Gymnázium Poštová, Košice, 49 bodov
6. *Peter Bella*, 4. ročník, Gymnázium J. Hronca, Bratislava, 45 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, prevažne študentskými. Príklady boli vyberané z národných olympiád či iných súťaží týchto krajín: Bulharsko, India, Irán, Írsko, Japonsko, Južná Kórea, Kanada, Maďarsko, Poľsko, Rakúsko, Rumunsko, Rusko a Vietnam.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Dokážte, že všetky prirodzené čísla môžeme rozdeliť do štyroch disjunktných množín takých, že platí: Ak je pre nejaké $m, n \in \mathbb{N}$ rozdiel $|m-n|$ rovný jednému z čísel 2, 3, 5, tak m a n ležia v rôznych množinách. Dokážte tiež, že všetky prirodzené čísla nevieme rozdeliť do troch takých množín.

(Írsko, 1998)

1.2 Pre kladné reálne čísla a, b, c dokážte nerovnosť

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqq 2\cdot\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

(Ázijská tichomorská MO, 1998)

1.3 V nejakej krajine je 2 000 letísk, niektoré z nich sú spojené priamymi linkami. Z ľubovoľných troch letísk je možné vybrať dve tak, že medzi nimi neexistuje priama linka. Aký je najväčší možný počet priamych liniek v tejto krajine?

(Japonsko, 1998)

1.4 Dĺžky strán trojuholníka ABC a priemer jemu vpísanej kružnice sú štyri po sebe idúce prirodzené čísla (nie nutne v tomto poradí). Nájdite všetky trojuholníky ABC s touto vlastnosťou.

(neznámy zdroj)

1.5 Pre prirodzené číslo n označme $\varphi(n)$ počet prirodzených čísel menších ako n, ktoré sú nesúdeliteľné s n. Nech $p(n)$ označuje počet prvočíselných deliteľov čísla n. Dokážte, že ak $\varphi(n)$ delí číslo $n-1$ a $p(n) \leqq 3$, tak n je prvočíslo.

(Južná Kórea, 1998)

1.6 Nájdite všetky reálne čísla x spĺňajúce rovnicu

$$x = \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\ .$$

(Kanada)

1.7 V trojuholníku ABC s vlastnosťou $|AB| > |BC|$ označíme M stred strany AC a L taký bod úsečky AC, že priamka BL je osou uhla ABC. Priamka rovnobežná s BC prechádzajúca bodom L pretína BM v bode E. Dokážte, že potom sú priamky EC a BL navzájom kolmé.

(Rusko, 1998)

Druhá séria

2.1 V množine prirodzených čísel vyriešte rovnicu

$$x^2 + y^2 = 2001(x - y).$$

(Bulharsko, 1998)

2.2 Nech A_n označuje množinu slov dĺžky n z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré neobsahujú dve po sebe idúce písmená a ani dve po sebe idúce písmená b. Nech B_n označuje množinu slov dĺžky n z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré neobsahujú tri po sebe idúce navzájom rôzne písmená. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí $|B_{n+1}| = 3|A_n|$. (Číslo $|M|$ označuje počet prvkov množiny M.)

(Rumunsko, 1998)

2.3 Nech $ABCDEF$ je stredovo súmerný konvexný šesťuholník a P, Q, R body po rade na úsečkách AB, CD, EF. Dokážte, že obsah trojuholníka PQR je najviac polovicou obsahu šesťuholníka $ABCDEF$.

(Maďarsko, 1998)

2.4 Povieme, že číslo m je *pekné*, ak je prirodzené a zároveň existujú také celé čísla a, b, že platí $a^2 + 3b^2 = m$. Dokážte, že platia nasledujúce tvrdenia.

a) Súčin dvoch pekných čísel je pekné číslo.

b) Ak je číslo $7n$ pekné ($n \in \mathbb{N}$), tak je aj číslo n pekné.

(India, 1998)

2.5 Dokážte, že pre kladné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqq 2$) platí implikácia

$$\frac{1}{x_1 + 2001} + \ldots + \frac{1}{x_n + 2001} = \frac{1}{2001} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}{n - 1} \geqq 2001.$$

(Vietnam, 1998)

2.6 Dve kružnice sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A a B. Priamka ℓ prechádzajúca bodom A pretína tieto dve kružnice v bodoch C a D. Nech M a N sú stredy oblúkov BC a BD príslušných kružníc neobsahujúcich bod A. Označme K stred úsečky CD. Dokážte, že priamky MK a NK sú navzájom kolmé.

(Rumunsko, 1999)

2.7 Nájdite všetky množiny $\mathcal{A}$ reálnych nezáporných čísel také, že platí:

a) Počet prvkov množiny $\mathcal{A}$ je konečný a $\mathcal{A}$ obsahuje aspoň štyri rôzne prvky;

b) pre ľubovoľné štyri rôzne prvky (a, b, c, d) z množiny $\mathcal{A}$ platí, že aj číslo $ab + cd$ je prvkom množiny $\mathcal{A}$.

(Bulharsko, 1998)

Tretia séria

3.1 Nech sú priamky KL a KN dotyčnicami ku kružnici k, body L, N ležia na kružnici k. Na polpriamke KN za bodom N zvoľme bod M. Označme P druhý priesečník kružnice opísanej trojuholníku KLM a kružnice k (jeden je bod L). Nech Q je päta kolmice z bodu N na priamku ML. Dokážte, že platí

$$|\sphericalangle MPQ| = 2 \cdot |\sphericalangle KML|.$$

(Irán, 1998)

3.2 Do tabuľky $n \times n$ sú vpísané čísla 1, -1 a 0 tak, že v každom riadku a každom stĺpci je napísané číslo 1 aj číslo -1 práve raz. Dokážte, že je možné poprehadzovať riadky a stĺpce tabuľky tak, aby sme zmenili znamienko každého čísla v pôvodnej tabuľke na opačné.

(Irán, 1998)

3.3 Nech n, a, b sú prirodzené čísla spĺňajúce rovnosť $n^{a+b} = a^b b$. Zistite, či potom musí platiť $a = n$ a zároveň $b = n^n$.

(Irán, 1998)

3.4 Nech reálne čísla x, y, z spĺňajú vzťahy $x, y, z > 1$ a $1/x + 1/y + 1/z = 2$. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$\sqrt{x+y+z} \geqq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

(Irán, 1998)

3.5 Všetky vrcholy pravidelného 2^n-uholníka sú zafarbené červenou alebo modrou farbou. Krok pozostáva z prefarbenia každého z jeho vrcholov na červenú farbu, ak mali jeho susedné vrcholy rovnakú farbu v predchádzajúcom kroku a na modrú farbu v opačnom prípade. Dokážte, že po 2^{n-1} krokoch budú mať všetky vrcholy červenú farbu a dokážte tiež, že po menej krokoch nemusí táto situácia nastať.

(Irán, 1998)

3.6 V trojuholníku ABC zvoľme na polpriamke BC za bodom C bod D tak, aby platilo $|CD| = |AC|$. Nech P je druhý priesečník kružnice opísanej trojuholníku ACD s kružnicou opísanou nad stranou BC (so stredom na BC). Označme priesečník BP a AC ako E a CP a AB ako F. Dokážte, že body D, E a F ležia na jednej priamke.

(Irán, 1998)

3.7 Nájdite všetky reálne čísla x, y spĺňajúce rovnice

$$2 - x^3 = y, \qquad 2 - y^3 = x.$$

(rakúsko-poľské stretnutie, 1998)

ŠTVRTÁ SÉRIA

4.1 Kružnica k ležiaca v danom rovnobežníku $ABCD$ sa dotýka jeho strán AB, AD a pretína jeho uhlopriečku BD v dvoch bodoch E a F. Dokážte, že existuje kružnica prechádzajúca bodmi E a F, ktorá sa dotýka strán BC a CD.

(India, 1998)

4.2 Máme tabuľku $n \times n$ políčok, v $n-1$ políčkach je napísané číslo 1 a vo zvyšných sú napísané nuly. V jednom kroku si môžeme vybrať jedno políčko, zmenšiť hodnotu čísla v ňom o 1 a zväčšiť hodnotu čísel v políčkach v rovnakom riadku a stĺpci tiež o 1. Dokážte, že takýmito krokmi nemôžeme dosiahnuť situáciu, aby boli čísla vo všetkých políčkach tabuľky rovnaké.

(Rusko, 1998)

4.3 Pre kladné reálne čísla a, b, c, ktoré spĺňajú $a+b+c = abc$, dokážte nerovnosť

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leqq \frac{3}{2}.$$

(Južná Kórea, 1998)

4.4 Veľkosti strán trojuholníka ABC sú prirodzené čísla. Pre veľkosti jeho uhlov navyše platí

$$|\sphericalangle BAC| < 2 \cdot |\sphericalangle ABC| \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ACB| > 90^\circ.$$

Zistite, aký najmenší obvod môže mať taký trojuholník.

(Írsko, 1998)

4.5 Myslím si prirodzené číslo od 1 do 144 vrátane. Ty si môžeš vybrať ľubovoľnú podmnožinu množiny $\{1, 2, \ldots, 144\}$ a opýtať sa ma, či je to moje číslo z tejto podmnožiny. Za moju odpoveď „áno“ zaplatíš 2 koruny a odpoveď „nie“ ťa bude stáť 1 korunu. Koľko najmenej korún potrebuješ, aby si si mohol byť istý, že uhádneš číslo, ktoré som si myslel?

(Rusko, 1998)

4.6 Nech A je množina všetkých permutácii $\varphi : (1, 2, \ldots, n) \to (1, 2, \ldots, n)$ takých, že navyše platí

(a) $\varphi(k) \leqq k + 1$ pre $k = 1, 2, \ldots, n$;

(b) $\varphi(k) \neq k$ pre $k = 2, 3, \dots, n$.

Aká je pravdepodobnosť javu $\varphi(1) \neq 1$ pre náhodne vybranú φ z množiny A?

(Južná Kórea, 1998)

4.7 Dokážte, že obsah konvexného päťuholníka s vrcholmi v mrežových bodoch (body s oboma celočíselnými súradnicami v rovine) je aspoň 5/2.

(Rumunsko, 1998)

Piata séria

5.1 Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka príslušných strán v bodoch A', B', C'. Stred oblúka AB opísanej kružnice trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod C, označme C''. Podobne zostrojíme aj body A'' a B''. Dokážte, že priamky $A'A''$, $B'B''$ a $C'C''$ prechádzajú jedným bodom.

(Maďarsko, 1998)

5.2 V súradnicovom systéme O_{xy} v rovine nakreslime priamky

$$x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad \text{a} \qquad y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Vzniknutý obrázok nazveme *jednotkovou mriežkou.* Uvažujme konečnú množinu M úsečiek v rovine, súčet dĺžok ktorých je menší ako $\sqrt{2}$. Dokážte, že v tej rovine existuje nekonečne veľa jednotkových mriežok takých, že nemajú prienik so žiadnou úsečkou z M.

(Rumunsko, 1998)

5.3 Majme dané prirodzené číslo M a zostrojme množinu

$$S = \{n \in \mathbb{N} : M^2 \leqq n \leqq (M+1)^2\}.$$

Dokážte, že všetky súčiny dvoch rôznych čísel ab z tejto množiny S sú navzájom rôzne.

(India, 1998)

5.4 Dané je prirodzené číslo $m \geqq 2$. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že pre ľubovoľné rozdelenie množiny

$$\{m, m+1, \dots, n\}$$

na dve disjunktné časti existuje v aspoň jednej z nich taká trojica čísel a, b, c, že platí $a^b = c$.

(Rumunsko, 1998)

5.5 Daný je rovnostranný trojuholník ABC a prirodzené číslo $n > 1$. Označme S množinu $n-1$ priamok rovnobežných s AB takých, že rozdeľujú trojuholník ABC na n častí (jeden trojuholník a $n-1$ rovnoramenných lichobežníkov) s rovnakým obsahom. Podobne označme S' množinu n–1 priamok rovnobežných s AB, ktoré rozdelia trojuholník ABC na n častí s rovnakým obvodom. Dokážte, že S a S' nemajú spoločnú priamku.

(Bulharsko, 1998)

5.6 Nech m je prirodzené číslo. Definujme postupnosť $\{a_n\}_{n\geqq 0}$ takto:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = m, \quad a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1} \text{ pre } n \geqq 1.$$

Dokážte, že usporiadaná dvojica nezáporných celých čísel (a, b), $a \leqq b$ je riešením rovnice

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$$

práve vtedy, keď platí $(a, b) = (a_k, a_{k+1})$ pre nejaké $k \geqq 0$.

(Kanada, 1998)

5.7 Označme P množinu všetkých bodov v $\mathbb{R}^n$ takých, že všetky ich súradnice sú racionálne čísla. Z bodu $A = (a_1, a_2 \ldots, a_n) \in P$ sa vieme dostať do bodu $B = (b_1, b_2 \ldots, b_n) \in P$, keď platí

$$|AB|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2 = 1.$$

Dokážte, že z každého bodu v P sa vieme dostať do každého iného bodu z P práve vtedy, keď $n \geqq 5$.

(Irán, 1998)

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Rozdeľme prirodzené čísla do štyroch disjunktných množín podľa ich zvyšku po delení štyrmi. Potom pre m, n z rovnakej skupiny platí, že 4 delí číslo $|m-n|$. Takže ak $|m-n| \in \{2,3,5\}$, potom $4 \nmid |m-n|$. Preto m a n sú v rôznych skupinách, takéto rozdelenie vyhovuje zadaniu.

Ďalej predpokladajme, že prirodzené čísla možno rozdeliť do troch takýchto množín. Označme ich A, B, C. Čísla 1, 3, 6 sú v rôznych množinách, pretože platí $|1-3|=2$, $|1-6|=5$, $|3-6|=3$. Preto bez ujmy na všeobecnosti nech

$$1 \in A, \qquad 3 \in B, \qquad 6 \in C.$$

Rozoberme možnosti, do ktorých množín môžu patriť čísla 4, 8, 54, 2 a ukážeme, že číslo 7 potom nemôže patriť ani do jednej z množín.

- $4 \in B$, pretože $|4-1|=3$ a $|6-4|=2$.
- $8 \in A$, pretože $|8-3|=5$ a $|8-6|=2$.
- $5 \in C$, pretože $|5-8|=3$ a $|5-3|=2$.
- $2 \in A$, pretože $|4-2|=2$ a $|2-5|=3$.

Zatiaľ teda máme $A=\{1,2,8\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6\}$. Potom skutočne

$$7 \notin A,\ (|7-2|=5) \quad 7 \notin B,\ (|7-4|=3) \quad 7 \notin C,\ (|7-5|=2),$$

čo je spor, lebo aj číslo 7 musí ležať v jednej z tých troch množín. Tým sme dokázali, že všetky prirodzené čísla (my sme ukázali niečo silnejšie, ako bolo v zadaní, lebo sme sa zaoberali len číslami do 10) nemožno rozdeliť do troch množín podľa zadania.

1.2 (Podľa *Petra Komorníka*.) Zrejme platí AH-nerovnosť

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{3} &\geqq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\\
\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} &\geqq \frac{3}{a+b+c}\\
\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{6} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} - \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} &\geqq \frac{3}{2\,(a+b+c)}\\
\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2} - \frac{3}{2\,(a+b+c)} &\geqq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}\\
\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) - 3 &\geqq \frac{2\,(a+b+c)}{\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}
\end{aligned}$$

$$2+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b} \geqq 2+\frac{2\,(a+b+c)}{\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}}$$

Z GH-nerovnosti máme

$$\sqrt[3]{abc} \geqq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

teda

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqq 2+\frac{2\,(a+b+c)}{\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}} \geqq 2+\frac{2\,(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Kvôli použitým nerovnostiam rovnosť platí iba v prípade $a=b=c$.

1.3 (Podľa *Radovana Bauera*.) Letiská sú vlastne vrcholy grafu, linky medzi letiskami sú hrany. Úlohu budeme riešiť všeobecne pre n vrcholov. Vrcholy rozdelíme do dvoch disjunktných množín, v prvej bude $\lfloor n/2 \rfloor$ a v druhej $\lceil n/2 \rceil$ vrcholov. (symboly $\lfloor x \rfloor$, resp. $\lceil x \rceil$ označujú dolnú, resp. hornú celú časť čísla x). Dva vrcholy spojíme hranou práve vtedy, ak ležia v opačných množinách. Takýto graf zrejme vyhovuje podmienkam úlohy. Obsahuje

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

hrán. Dokážeme, že toto je maximum. Budeme postupovať indukciou. Pre $n=3$ sú dve hrany evidentne maximum. Pozrime sa teraz na graf o $n+1$ vrcholoch, zamerajme sa konkrétne na dva jeho vrcholy spojené hranou. Nakoľko graf neobsahuje trojuholníky, tieto dva vrcholy nemôžu byť spojené s tým istým vrcholom. To znamená, že oba tieto vrcholy sú dohromady pospájané s najviac $n+1$ vrcholmi (uvažujeme aj ich vzájomné prepojenie). Potom ale jeden vrchol musí byť spojený s najviac $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ vrcholmi. Tento vrchol, vrátane všetkých hrán z neho idúcich, teraz z grafu odoberme. Dostávame graf s n vrcholmi, ktorý zrejme tiež neobsahuje trojuholníky a podľa indukčného predpokladu má najviac $\lfloor n^2/4 \rfloor$ hrán. To ale značí, že náš graf pred odobratím vrcholu mohol mať najviac

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{4} \right\rfloor$$

hrán. Tým je dokázaný indukčný krok a sme hotoví. Všetko počítanie s celými časťami sme preskočili, na ukázanie správnosti použitých vzťahov stačí rozobrať možnosti, keď n je párne a keď n je nepárne.

Poznámka. Andrej Osuský dokonca úlohu zovšeobecnil tak, že podmienku z úlohy preformuloval na „Z ľubovolných m letísk je možné vybrať dve tak, že …“. V grafe s n vrcholmi je potom počet hrán najviac

$$\frac{a(a-1)}{2}k^2+b(a-1)k+\frac{b(b-1)}{2},$$

kde $a = m - 1$, $k = n \div a$, $b = n \pmod{a}$ (t.j. k, resp. b je celočíselný podiel, resp. zvyšok n po delení a). Dôkaz tohto vzťahu spravil indukciou, avšak odlišnou od indukcie v uvedenom riešení.

1.4 Označme r polomer vpísanej kružnice trojuholníka ABC a a, b, c jeho strany. Bez ujmy na všeobecnosti nech $a < b < c$. Zrejme platí aj $2r < v_c \leqq a$, kde v_c je výška na stranu c. Čiže platí $2r < a < b < c$. Potom podľa zadania $a = 2r + 1$, $b = 2r + 2$, $c = 2r + 3$. Ďalej využijeme vzorec na výpočet polomeru vpísanej kružnice $r = S/s$ a Herónov vzorec $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde S je obsah trojuholníka ABC a $s = (a + b + c)/2$ je jeho „semiobvod“.

$$r = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{a+b+c}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r(2r+4)(2r+2)}{6r+6}} = \sqrt{\frac{r(r+2)}{3}}.$$

Keďže čísla na oboch stranách rovnice $r = \sqrt{r(r+2)/3}$ sú kladné, umocnenie celej rovnice na druhú je ekvivalentná úprava. Ďalším riešením tejto rovnice dostaneme vzťah $r(2r-2) = 0$. Keďže $r > 0$, tak $2r = 2$. Potom $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Nakoľko sme používali iba ekvivalentné úpravy, toto riešenie je skutočne riešením pôvodnej rovnice. Čiže naše $r = 2$ je polomerom vpísanej kružnice trojuholníka so stranami dĺžok 3, 4 a 5, ale to len za predpokladu, že naozaj existuje takýto trojuholník. Jeho existenciu by sme mohli overiť napríklad pomocou trojuholníkovej nerovnosti. Pri tomto trojuholníku sa však obmedzíme len na konštatovanie, že existuje.

1.5 (Podľa *Kataríny Quittnerovej* a *Andreja Osuského*.) Nech kanonický rozklad čísla n je $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < \ldots < p_k$ sú prvočísla a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\varphi(n) = n \cdot \frac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k - 1}{p_k} = p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k - 1} \cdot (p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_k - 1).$$

Nech $\varphi(n) \mid (n-1)$ a $p(n) \leqq 3$. Pre ľubovoľné p_i máme $p_i \nmid (n-1)$, takže $p_i \nmid \varphi(n)$, preto $\alpha_i - 1 = 0$ a teda $\alpha_i = 1$; i=1,...,k. Potom $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$; $k \leqq 3$.

Ak $k = 2$, $n = p_1 \cdot p_2$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $p_1 < p_2$. Potom $\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \mid p_1p_2 - 1 = p_1(p_2 - 1) + (p_1 - 1)$, odkiaľ $(p_2 - 1) \mid (p_1 - 1)$ a tak $p_2 \leqq p_1$, čo je spor.

Ak $k = 3$, $n = p_1p_2p_3$, $p_1 < p_2 < p_3$. Ak by bolo p_1 rovné dvom, tak by párne číslo $\varphi(n) = (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)$ muselo byť deliteľom nepárneho čísla $n-1 = p_1p_2p_3-1$, čo nemôže nastať. Preto $p_1 \geqq 3$. Ak $p_1 \geqq 5$ a teda $p_2 \geqq 7$ a $p_3 \geqq 11$, tak máme

$$1 < \frac{n-1}{\varphi(n)} = \frac{p_1p_2p_3 - 1}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} = 1 + \frac{1}{p_1 - 1} + \frac{1}{p_2 - 1} + \frac{1}{p_3 - 1} +$$
$$+ \frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)} + \frac{1}{(p_1-1)(p_3-1)} + \frac{1}{(p_2-1)(p_3-1)} \leqq$$
$$\leqq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = 1 + \frac{38}{60} < 2,$$

preto číslo $n-1$ nemôže byť celočíselným násobkom čísla $\varphi(n)$.

Takže $p_1 = 3$ a teda $p_2 \geqq 5$ a $p_3 \geqq 7$. V tomto prípade dostaneme podobný odhad

$$1 < \frac{n-1}{\varphi(n)} \leqq 2 + \frac{1}{6},$$

odkiaľ

$$\begin{aligned} n-1 &= 2\cdot\varphi(n) \\ 3p_2p_3 - 1 &= 2\cdot 2(p_2-1)(p_3-1) \\ 0 &= p_2p_3 - 4p_2 - 4p_3 + 5 \\ 11 &= (p_2-4)(p_3-4), \end{aligned}$$

a keďže $4 < p_2 < p_3$, dostávame $p_2 - 4 = 1$ a $p_3 - 4 = 11$, takže $p_2 = 5$ a $p_3 = 15$. Ale $p_3 = 15$ nie je prvočíslo a to je spor.

Takže jediná možnosť, kedy platí $\varphi(n) \mid (n-1)$ a $p(n) \leqq 3$ je (okrem $k=0$ a teda $n=1$, čo je malá výnimka) $k=1$ a teda n je prvočíslo.

Poznámka. Andrej Osuský dokázal o niečo silnejšie tvrdenie, keď si zadaní upravil podmienku $p(n) \leqq 3$ na $p(n) \leqq 8$.

1.6 Úpravou oboch výrazov pod odmocninami dostaneme, že aby mali výrazy pod odmocninami zmysel, musí súčasne platiť

$$\frac{x^2-1}{x} = (x+1)\,\frac{x-1}{x} \geqq 0, \qquad \frac{x-1}{x} \geqq 0 \quad \text{a} \quad x \neq 0.$$

Vyriešením týchto dvoch nerovností dostaneme riešenie $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$. Aby rovnica mala zmysel, vyhovuje iba $x \geqq 1$ (súčet odmocnín je kladné číslo). Potom rovnicu v zadaní môžeme umocniť na druhú a dostávame

$$x^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right) + 2\sqrt{x-\frac{1}{x}}\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Po vynásobení tejto rovnice číslom x a úprave dostávame rovnicu

$$x^3 - x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x^3-x^2-x+1},$$

ktorú môžeme upraviť na tvar

$$\left(\sqrt{x^3-x^2-x+1} - 1\right)^2 = 0.$$

Aby bola splnená posledná rovnica, musí platiť

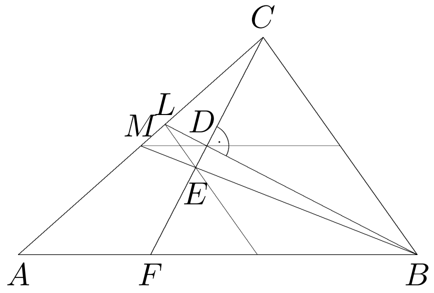
$$x^3 - x^2 - x + 1 = 1 \Longleftrightarrow x\left(x^2 - x - 1\right) = 0.$$

Riešením tejto kubickej rovnice dostávame tri korene

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3 = 0.$$

Podmienke $x \geqq 1$ však vyhovuje len koreň x_1. Vzhľadom na ekvivalentnosť použitých úprav dostávame, že úloha má jediné riešenie $x = (1+\sqrt{5})/2$.

1.7 (Podľa *Andreja Osuského*.) Označme F priesečník priamok CE a AB, ďalej tradične a, b, c dĺžky strán trojuholníka ABC. Keďže BL je os uhla ABC, tak platí



Obr. 84

$|CL|/|AL| = a/c$, čo spolu s $|CL| + |AL| = b$ dáva

$$|CL| = \frac{ab}{a+c}. \tag{1}$$

Podľa vety (uu) sú trojuholníky LME a CMB podobné, z čoho máme pomery (využívame (1))

$$\frac{|ME|}{|MB|} = \frac{|ML|}{|MC|} = \frac{|MC| - |CL|}{|MC|} = \frac{\frac{b}{2} - \frac{ab}{a+c}}{\frac{b}{2}} = \frac{c-a}{c+a}. \tag{2}$$

Z Menelaovej vety pre priamku CF a trojuholník MAB vyplýva

$$\frac{|BF|}{|AF|} \cdot \frac{|ME|}{|BE|} \cdot \frac{|AC|}{|MC|} = 1. \tag{3}$$

Pomery (využívame (2))

$$\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BF|}{c - |BF|}$$
$$\frac{|BE|}{|ME|} = \frac{|MB| - |ME|}{|ME|} = \frac{c+a}{c-a} - 1 = \frac{2a}{c-a}$$
$$\frac{|AC|}{|MC|} = 2$$

dosadíme do vzťahu (3) a dostaneme

$$\frac{|BF|}{c-|BF|}\cdot\frac{c-a}{2a}\cdot 2=1,$$

odkiaľ vyplýva $|BF|=a$. To ale znamená, že trojuholník CFB je rovnoramenný so základňou CF a v ňom iste os BL uhla FBC je totožná s výškou z tohto vrcholu, a teda je kolmá na základňu CF. Inak povedané, priamka CE je kolmá na priamku BL.

Poznamenajme na záver, že vďaka podmienke $|AB|>|BC|$ sú všetky prípadné menovatele vo výrazoch nenulové a poloha bodov je naozaj taká, ako je naznačená na obr. 84.

DRUHÁ SÉRIA

2.1 Pretože $2\,001=3\cdot 23\cdot 29$, pravá strana rovnice je deliteľná číslami 3 a 23, a teda aj ľavá strana musí byť. Štvorec prirodzeného čísla po delení číslom 3 (resp. 23) dáva zvyšok 0 alebo 1 (resp. 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16 alebo 18), a tak jediná možnosť, kedy súčet x^2+y^2 je deliteľný číslom 3 (resp. 23) je, ak obe čísla x a y sú deliteľné číslom 3 (resp. 23). Potom $x=3\cdot 23\cdot m$, $y=3\cdot 23\cdot n$, $m,n\in\mathbb{N}$ a rovnica nadobudne tvar

$$m^2+n^2=29(m-n),$$
$$(m+n)^2+(29-m+n)^2=29^2.$$

Ľahko sa overí, že jediný spôsob, ako napísať 29^2 ako súčet dvoch štvorcov, je $29^2=$ $=21^2+20^2$, odkiaľ máme dve možnosti

$$\left.\begin{aligned} m+n&=21\\ 29-m+n&=20\end{aligned}\right\}\quad m=15,\ \ n=6$$
$$\left.\begin{aligned} m+n&=20\\ 29-m+n&=21\end{aligned}\right\}\quad m=14,\ \ n=6,$$

čiže pôvodná rovnica má dve riešenia $(1035,414)$ a $(966,414)$.

2.2 (Podľa *Petra Bellu.*) Zrejme $|A_1|=3$, $|A_2|=7$. Vyjadrime počet slov dĺžky n rekurzívne. Pre $n>2$ uvažujme slová dĺžky $n-1$. Možno ich rozdeliť do disjunktných množín. Ak sa končia na:

- písmeno a, môžeme vytvoriť slovo dĺžky n pridaním jedného z písmen b, c;
- písmeno b, môžeme vytvoriť slovo dĺžky n pridaním jedného z písmen a, c;
- písmeno c, môžeme vytvoriť slovo dĺžky n pridaním jedného z písmen a, b, c.

Ku každému slovu možno pridať dve písmená, preto máme $2\cdot|A_{n-1}|$ slov dĺžky n. Ak sa slovo končí na c, možno pridať aj tretie písmeno. Slová končiace sa na c dĺžky $n-1$

však získame tak, že k slovu dĺžky $n-2$ pridáme c (c možno pridať vždy), preto máme ďalších $|A_{n-2}|$ slov dĺžky n. Dostávame

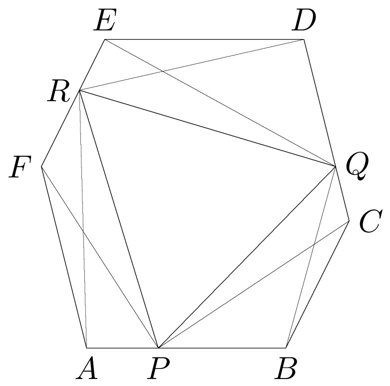
$$|A_n| = 2\cdot|A_{n-1}| + |A_{n-2}|, \quad |A_1| = 3, \quad |A_2| = 7.$$

Podobne to platí pre $|B_n|$. $|B_1| = 3$, $|B_2| = 9$. Slová dĺžky $n-1$ rozdelíme na dve množiny podľa toho, či sú posledné dve písmená slova rovnaké. Slová, v ktorých sú posledné dve písmená rovnaké, zrejme dostaneme zo slov dĺžky $n-2$ tak, že na koniec slova priradíme rovnaké písmeno. Teda takýchto slov je $|B_{n-2}|$. Za takéto slovo zrejme môžeme napísať ľubovolné písmeno, t.j. máme $3\cdot|B_{n-2}|$ slov dĺžky n. Ak posledné dve písmená v slove dĺžky $n-1$ nie sú rovnaké (to sú zrejme ostatné slová, je ich $|B_{n-1}| - |B_{n-2}|$), môžeme pridať iba dve rôzne písmená, a tak dostávame ďalších $2\cdot$ $\cdot(|B_{n-1}| - |B_{n-2}|)$ slov, čo v súčte dáva

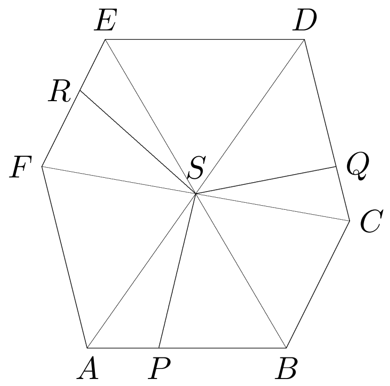
$$|B_n| = 2\cdot|B_{n-1}| + |B_{n-2}|, \quad |B_1| = 3, \quad |B_2| = 9.$$

Teraz už požadované tvrdenie ľahko dokážeme matematickou indukciou.

2.3 Zo stredovej súmernosti šesťuholníka $ABCDEF$ vyplýva, že strany AB a ED sú rovnobežné, rovnako dlhé a ak S je stred súmernosti, tak $|AB,S| = |DE,S| =$ $= 2|AB,DE|$ (obr. 85 a obr. 86). Preto $S_{ABS} = S_{DES}$. Analogické tvrdenia platia aj o zvyšných dvojiciach protiľahlých strán BC, EF a CD, FA. Súčet výšok na strany AP a DE v trojuholníkoch APR a DER je dvojnásobkom výšky na stranu AP v trojuholníku APS.



Obr. 85



Obr. 86

Keďže $|DE| = |AB| \geqq |AP|$, tak $S_{APR} + S_{DER} \geqq 2S_{APS}$. Treba si uvedomiť, že toto platí aj v prípade $A \equiv P$ alebo $E \equiv R$. Podobne platí aj ďalších päť analogických nerovností, na základe ktorých môžeme tvrdiť

$$\begin{aligned}
&2(S_{ABCDEF} - S_{PQR}) = 2S_{PBCQ} + 2S_{QDER} + 2S_{RFAP} = \\
&= (S_{PBC} + S_{BCQ} + S_{CQP} + S_{QPB}) + (S_{QDE} + S_{DER} + S_{ERQ} + S_{RQD}) + \\
&+ (S_{RFA} + S_{FAP} + S_{APR} + S_{PRF}) = (S_{APR} + S_{DER}) + (S_{PBQ} + S_{DEQ}) + \\
&+ (S_{CQP} + S_{FAP}) + (S_{QDR} + S_{FAR}) + (S_{ERQ} + S_{BCQ}) + (S_{RFP} + S_{BCP}) \geqq \\
&\geqq 2S_{APS} + 2S_{PBS} + 2S_{CQS} + 2S_{QDS} + 2S_{ERS} + 2S_{RFS} = \\
&= 2(S_{ABS} + S_{CDS} + S_{EFS}) = S_{ABCDEF}.
\end{aligned}$$

A teda platí $S_{PQR} \geqq S_{ABCDEF}/2$.

2.4

a) Majme dve pekné čísla $x = a^2 + 3b^2$ a $y = c^2 + 3d^2$. Chceme ukázať, že aj $x \cdot y$ je pekné. Úpravou výrazu dostávame

$$x \cdot y = (a^2 + 3b^2) \cdot (c^2 + 3d^2) = \ldots = (ac + 3bd)^2 + 3(ad - bc)^2. \qquad (1)$$

b) Všimnime si, že platí $7 = (\pm 2)^2 + 3(1)^2$ (to hovorí, že číslo 7 je tiež pekné). Ak do (1) dosadíme $(a_1, b_1) = (2, 1)$ a $(a_2, b_2) = (-2, 1)$, dostaneme

$$7n = \big((\pm 2)^2 + 3(1)^2\big) \cdot \big(c^2 + 3d^2\big) = (\overbrace{\pm 2c + 3d}^{e})^2 + 3(\overbrace{\pm 2d - c}^{f})^2 = e^2 + 3f^2$$

a príslušné riešenia vzhľadom na neznáme c, d sú

$$c_1 = \frac{2(2c_1 + 3d_1) - 3(2d_1 - c_1)}{7} = \frac{2e - 3f}{7},\ d_1 = \frac{(2c_1 + 3d_1) + 2(2d_1 - c_1)}{7} = \frac{e + 2f}{7},$$
$$\text{podobne } c_2 = \frac{2e + 3f}{7},\ d_2 = \frac{e - 2f}{7}.$$

Aby sme dokázali, že n je pekné, stačí ukázať, že vieme voliť jednu z vyššie uvedených dvoch možností tak, aby c_1, d_1 (resp. c_2, d_2) boli celé čísla. Z predpokladu, že $7n$ je pekné číslo, máme (všetko modulo 7)

$$7n \equiv e^2 + 3f^2 \equiv 0 \iff e^2 \equiv 4f^2 \iff e \equiv \pm 2f.$$

V prípade $e \equiv -2f$ sú obe čísla $c_1 = -f$ a $d_1 = 0$ celé, v druhom prípade $(e \equiv 2f)$ sú celými čísla $c_2 = f$ a $d_2 = 0$. Preto sa číslo n dá zapísať v tvare pekného čísla $(n = c^2 + 3d^2)$.

2.5 (Podľa *Andreja Osuského*.) Označme $a_i = (x_i - 2001)/(x_i + 2001)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Zrejme platí

$$0 < 1 - a_i \iff a_i = \frac{x_i - 2001}{x_i + 2001} < 1 \iff x_i - 2001 < x_i + 2001 \iff 0 < 2 \cdot 2001, \quad (1)$$

pretože sme nerovnosti násobili kladným výrazom. Upravujme ďalej výraz

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - 2001}{x_i + 2001} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{4002}{x_i + 2001}\right) = n - 4002 \cdot \frac{1}{2001} = n - 2, \qquad (2)$$

pričom sme v tretej rovnosti využili predpoklad zo zadania. Z rovnosti (2) tak dostávame

$$1 + a_k = 1 + \left((n-2) - \sum_{i=1;\ i \neq k}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1;\ i \neq k}^{n} (1 - a_i) \overset{AG}{\geqq} (n-1) \cdot \sqrt[n-1]{\prod_{i=1;\ i \neq k}^{n} (1 - a_i)}.$$

Použitie AG-nerovnosti pre členy $(1-a_i)$ je korektné, lebo z (1) máme $(1-a_i)>0$. Vynásobením tejto nerovnosti pre $i=1,2,\dots,n$ dostaneme

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqq (n-1)^n\cdot\sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)^{n-1}} = (n-1)^n\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+a_k}{1-a_k}\right) \geqq (n-1)^n.$$

Spätným nahradením $a_i=(x_i-2001)(x_i+2001)$ a úpravou tak dostaneme

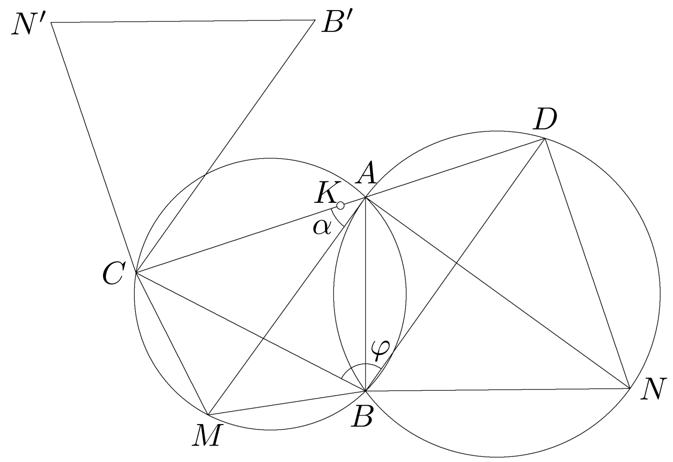
$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{2001}\right) \geqq (n-1)^n,$$

čo po odmocnení dáva požadovanú nerovnosť

$$\frac{\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_n}}{n-1} \geqq 2001.$$

2.6 (Podľa *Andreja Osuského*.) Ak $K=A$, tak $|\sphericalangle MKN| = |\sphericalangle MAN| = |\sphericalangle MAB| + |\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle BAC|/2 + |\sphericalangle BAD|/2 = 180^\circ/2 = 90^\circ$, takže tvrdenie platí (použili sme poznatok, že os vnútorného uhla v trojuholníku pretína oblúk nad protiľahlou stranou v polovici, teda v našom prípade AM je os uhla CAB, atď). Ďalej predpokladajme, že $K\neq A$ a že bod A leží vnútri úsečky CD (obr. 87). Druhému prípadu sa budeme venovať neskôr.

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle MAC|$ (vďaka vyššie uvedenej vlastnosti osi uhla). Potom $|\sphericalangle BAN| = |\sphericalangle NAD| = 90^\circ-\alpha$. Z vety o obvodových a stredových uhloch máme $|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle MCB| = \alpha$ a $|\sphericalangle NBD| = |\sphericalangle NDB| = 90^\circ-\alpha$.



Obr. 87

Uvažujme stredovú súmernosť $\mathcal{S}_K$ so stredom K. Nech $N' = \mathcal{S}_K(N)$ a $B' = \mathcal{S}_K(B)$. Ukážeme, že $|MN'| = |MN|$.

Označme $\varphi = |\sphericalangle CBD|$. Keďže $B'C = \mathcal{S}_K(BD)$, tak $B'C \parallel BD$, a teda $|\sphericalangle BCB'| = 180° - \varphi$. Ďalej $|\sphericalangle N'CB'| = 90° - \alpha$, pretože

$$\triangle B'CN' = \mathcal{S}_K(\triangle BDN).$$

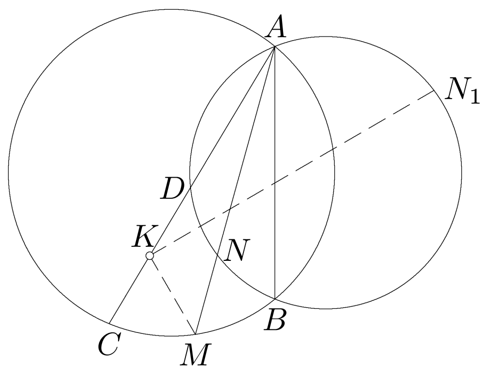
Teraz už vidíme, že $|\sphericalangle MBN| = |\sphericalangle MCN'| = \varphi + 90°$ alebo $360° - (\varphi + 90°) = 270° - \varphi$ (podľa toho, či $\varphi \leqq 90°$ alebo $\varphi > 90°$).

Trojuholníky MNB a $MN'C$ sú potom zhodné (podľa vety *sus*, lebo $|MB| = |MC|$, $|BN| = |DN| = |CN'|$, $|\sphericalangle MBN| = |\sphericalangle MCN'|$). To znamená, že $|MN| = |MN'|$. (Ak by $\varphi = 90°$, tak platí $|MN| = |MB| + |BN| = |MC| + |CN'| = |MN'|$, takže opäť to isté.)

To ale znamená, že trojuholník $NN'M$ je rovnoramenný so základňou NN'. Potom je jeho ťažnica MK zároveň aj výškou, a teda $|\sphericalangle MKN| = 90°$, čo sme chceli dokázať.

Tvrdenie však neplatí pre situáciu, keď A neleží na úsečke CD, ale mimo nej. Potom sa dá dokázať, že nutná a postačujúca podmienka na platnosť tvrdenia v zadaní je potrebná špeciálna pozícia daných kružníc – taká, že $|\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle ACB| = 90°$.

Vo všeobecnosti sa ale dá vypozorovať analogické tvrdenie, a to ak namiesto bodu N budeme brať bod N_1, stred oblúka BD, ktorý obsahuje A (obr. 88). Dôkaz pre tento prípad je veľmi podobný uvedenému riešeniu.



Obr. 88

2.7 Najprv dokážeme, že množina $\mathcal{A}$ nemôže mať viac ako 5 prvkov. Nech $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pričom platí

$$0 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_n. \tag{1}$$

Vzhľadom na (1) máme, že platí

$$\begin{aligned} &a_1a_2 + a_3a_4 < a_1a_2 + a_3a_5 < \ldots < a_1a_2 + a_3a_n < a_1a_2 + a_4a_n < \\ &< a_1a_2 + a_5a_n < \ldots < a_1a_2 + a_{n-1}a_n < a_1a_3 + a_{n-1}a_n < \ldots < \\ &< a_1a_{n-2} + a_{n-1}a_n < a_2a_{n-2} + a_{n-1}a_n < \ldots < a_{n-3}a_{n-2} + a_{n-1}a_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Ľahko nahliadneme, že sme dostali $4n-15$ rôznych čísel. My ich v našej množine máme len n, teda musí platiť $4n-15 \leqq n$, čo je ekvivalentné s tým, že $n \leqq 5$.

Ak $n = 5$, tak položme $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e\}$, pričom $0 \leqq a < b < c < d < e$. Potom dostávame, že platí

$$ac + bd < ab + cd < ab + ce < ab + de < ac + de < bc + de. \tag{3}$$

Prvá nerovnosť vyplýva z toho, že $(d-a)(c-b) > 0$, lebo $a < d$ a aj $b < c$. Ďalšie štyri nerovnosti vyplývajú z (2). Dostali sme teda šesť rôznych čísel v množine $\mathcal{A}$, čo je spor s tým, že má päť prvkov.

Ostal nám prípad $n = 4$. Nech $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$, pričom

$$0 \leqq a < b < c < d. \tag{4}$$

Potom čísla $x = ab+cd$, $y = ac+bd$ a $z = ad+bc$ musia patriť do množiny $\mathcal{A}$. Vzhľadom na to, že platí

$$(b-a)(d-c) > 0 \tag{5}$$
$$(d-a)(c-b) > 0, \tag{6}$$

dostávame, že platí $x < y < z$. Tu môžu nastať vzhľadom na usporiadanie čísel a, b, c, d štyri možnosti.

1. $x = a$, $y = b$, $z = c$. Z (5) máme $b - a = (b-a)(d-c)$, odkiaľ dostávame

$$c = d - 1. \tag{7}$$

Podobne z (6) máme $c - b = (d-a)(c-b)$, odkiaľ dostávame

$$a = d - 1. \tag{8}$$

To znamená, že $a = c$, čo je v spore s (4).

2. $x = a$, $y = b$, $z = d$. Keďže $a = x = ad + bc$, dosadením $d = c + 1$ (tento vzťah platí aj tu, lebo x a y ostalo rovnaké ako v prvom prípade) dostávame $0 = c(a + b)$, čo vzhľadom na (4) nemôže nastať.
3. $x = a$, $y = c$, $z = d$. Potom $c + a = x + y = ad + bc + ac + bd = (a+b)(c+d)$. Keďže $0 < a + b < a + c$, tak musí platiť

$$c + d > 1. \tag{9}$$

Zo vzťahu

$$d = z = ab + cd \tag{10}$$

máme $bc = a(a - d)$. Z (4) máme $a < b$. Z (9) máme $c > 1 - d$. Potom máme $bc > a(1 - d)$, čo je v spore s (10).

4. $x = b$, $y = c$, $z = d$. Keďže $b + d = x + z = (a + c)(b + d)$, tak $a + c = 1$, lebo $b + d > > 0$. Dosadením $a = 1 - c$ do $x = b$ dostávame $b = d - cd + bc$, čo je ekvivalentné s $(b - d)(c - 1) = 0$. Vzhľadom na (4) dostávame $c = 1$ a odtiaľ $a = 0$. Z $y = c$ dostávame $bd = 1$, odkiaľ $d = 1/b$. Dostali sme teda, že jediná možnosť pre $\mathcal{A}$ je

$$\mathcal{A} = \{0, b, 1, \frac{1}{b}\}, \tag{11}$$

kde $b \in (0, 1)$. Overením zistíme, že táto možnosť vyhovuje.

Jediná množina spĺňajúca podmienky zo zadania je $\mathcal{A}$ popísaná vzťahom (11).

Iné riešenie. Dokážme si najprv pomocné tvrdenie

Lema: Nech $\mathcal{A}$ je množina rôznych reálnych nezáporných čísel taká, že platí
a) počet prvkov množiny $\mathcal{A}$ je aspoň štyri;
b) pre ľubovoľné štyri rôzne prvky (a, b, c, d) z množiny $\mathcal{A}$ platí, že aj číslo $ab + cd$ je prvkom množiny $\mathcal{A}$;
c) hodnota každého prvku z $\mathcal{A}$ je menšia ako 1.
Potom množina $\mathcal{A}$ má nekonečne veľa prvkov.

Dôkaz: Predpokladajme, že $\mathcal{A}$ je konečná, usporiadajme jej prvky

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \text{ pričom } 1 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geqq 0 \text{ a } n \geqq 4. \tag{1}$$

Keby platilo $a_n = 0$, tak by malo platiť aj to, že $a_1 a_n + a_{n-1} a_{n-2} \in \mathcal{A}$. Z usporiadania (1) máme $a_1 a_n + a_{n-1} a_{n-2} = a_{n-1} a_{n-2} < a_{n-1} \neq 0$, teda toto číslo leží medzi a_n a a_{n-1}, čo je spor. Preto ak je $\mathcal{A}$ konečná, musí platiť $a_n > 0$. Označme ďalej

$$a = a_1 a_2 + a_3 a_4, \quad b = a_1 a_3 + a_2 a_4, \quad c = a_1 a_4 + a_2 a_3. \tag{2}$$

Zrejme $a, b, c \in \mathcal{A}$ a aj $a > b > c$ (stačí upraviť na súčin a využiť (1)).

Ak by platilo $c > a_4$, tak $a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$. Z prvej a tretej rovnice by sme dosadením (2) dostali

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_3 a_4 = a = a_1 &\iff a_1(1 - a_2) = a_3 a_4 \\ a_1 a_4 + a_2 a_3 = c = a_3 &\iff a_3(1 - a_2) = a_1 a_4. \end{aligned} \tag{3}$$

Ich vynásobením máme

$$\begin{aligned} a_1 a_3 (1 - a_2)^2 &= a_1 a_3 a_4^2 && (a_1 a_3 > 0) \\ (1 - a_2)^2 &= a_4^2 && (a_4, 1 - a_2 \geqq 0) \\ 1 - a_2 &= a_4, \end{aligned}$$

čo po dosadení do (3) dáva $a_1 = a_3$ (pokiaľ $a_4 \neq 0$, teda pokiaľ $n \geqq 5$), čo je spor.

Preto musí platiť $c \geqq a_4$, dosadíme (2) a upravíme na $a_4(1-a_1) \geqq a_2a_3$. Ak využijeme aj to, že $a_3 > a_4$, a $(1-a_1) > 0$ dostaneme

$$a_3(1-a_1) > a_4(1-a_1) \geqq a_2a_3 \overset{a_4 \leq a_3}{\Longrightarrow} 1-a_1 \geqq a_2 \Longleftrightarrow 1 \geqq a_1 + a_2.$$

Z tohto máme $a_4 < a_2 < 1/2$, dosadíme do (2) $a = a_1a_2 + a_3a_4 < a_1/2 + a_3/2 < a_1$.

Ak by platilo $c = a_4$, muselo by byť $a = a_2$, $b = a_3$, $c = a_4$. Z prvej a tretej rovnice by sme dosadením (2) dostali

$$\begin{aligned} a_1a_2 + a_3a_4 = a = a_2 &\Longleftrightarrow a_3(1-a_1) = a_2a_4 \\ a_1a_4 + a_2a_3 = c = a_4 &\Longleftrightarrow a_4(1-a_1) = a_2a_3, \end{aligned} \tag{4}$$

A tento prípad by sme riešili ako (3) a dostali by sme $1 - a_1 = a_2 = 0$, čo je spor. Preto musí platiť $c < a_4$ a preto určite existuje c_5. Aplikovaním tohto postupu na štvoricu (a_2, a_3, a_4, a_5) namiesto štvorice (a_1, a_2, a_3, a_4) by sme dostali existenciu a_6 a tak podobne. Preto musí byť v tomto prípade $\mathcal{A}$ nekonečná množina.

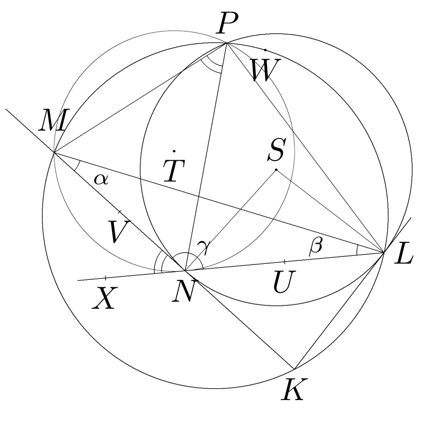
Vráťme sa k dôkazu úlohy. Použime rovnaké označenie ako v (1). Z lemy vyplýva, že musí byť $a_1 \geqq 1$. Z vlastnosti (2) dostaneme $c > a_4$ a preto máme $a = a_1$, $b = a_2$ a $c = a_3$. Keďže aj $\mathcal{A}$ má byť konečná, musí byť

$$\begin{aligned} &(1-a_2) = a_4 = 0 \Longleftrightarrow a_2 = 1 \text{ a } a_4 = 0 \\ &b \overset{(2)}{=} a_1a_3 = a_2 = 1 \text{ teda } a_2 = \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

Preto ostáva už len overiť, že skutočne $\mathcal{A} = \{a_1, 1, 1/a_1, 0\}$; $a_1 > 1$ (lebo ak $a_1 = 1$, dostaneme iba dvojprvkovú množinu) vyhovuje všetkým podmienkam úlohy.

Tretia séria

3.1 (Podľa *Radovana Bauera*.) Najprv by sa zišlo trocha zamyslieť, prečo je vzájomná poloha bodov, aká je naznačená na obr. 89, aj v skutočnosti takáto. (A ak nie je, zmení to niečo na riešení?)



Obr. 89

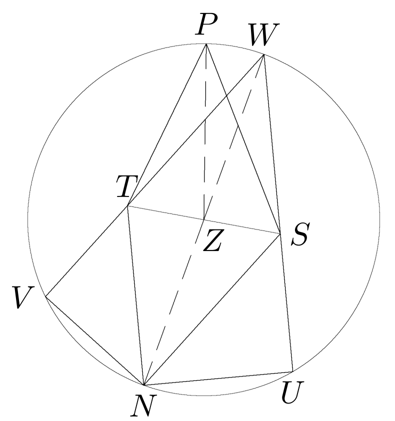
Označme uhly $|\sphericalangle NML| = \alpha$, $|\sphericalangle NLM| = \beta$, $|\sphericalangle MNL| = \gamma$. Potom však platí $|\sphericalangle LNK| = |\sphericalangle NLK| = 180^\circ - \gamma$, teda $|\sphericalangle NKL| = 180^\circ - |\sphericalangle LNK| - |\sphericalangle NLK| = 2\gamma - - 180^\circ$. Štvoruholník $KLSN$ je tetivový, preto $|\sphericalangle LSN| = 180^\circ - |\sphericalangle NKL| = 360 - 2\gamma$, teda $|\sphericalangle NPL| = 180^\circ - \gamma$ (vrcholový a stredový uhol). Štvoruholník $KLPM$ je tetivový zo zadania, teda $|\sphericalangle MPL| = 180^\circ - |\sphericalangle NKL| = 360^\circ - 2\gamma$. Potom ale platí $|\sphericalangle MPN| = = |\sphericalangle MPL| - |\sphericalangle NPL| = 180^\circ - \gamma$ (naznačené na obr. 89 dvoma oblúčikmi).

Ak označíme X nejaký bod na predĺžení LN za bodom N, tak jasne $|\sphericalangle MNX| = = 180^\circ - \gamma$. Z vety o úsekovom uhle potom vyplýva, že XL je dotyčnica kružnice opísanej trojuholníku MNP (jej stred označme T).

Označme teraz ešte U, V stredy NL a MN, W stred opísanej kružnice trojuholníku NML. Platí $S \in UW$ a $T \in VW$ (stačí si uvedomiť, že ako stredy kružníc opísaných, ležia S, W na osi úsečky NL a T, W na osi úsečky MN). Z práve spomenutých faktov ešte môžeme vyťažiť $UV \perp NL$ a $VW \perp MN$, teda $VW \parallel NS$ a $UW \parallel NT$ (využili sme, že polomery NS a NT sú po rade kolmé na dotyčnice MK a XL ku príslušným kružniciam). Teda $NSWT$ je rovnobežník.

Trojuholník NUV je rovnoľahlý s trojuholníkom NLM s koeficientom $1/2$ a stredom N; teda stred jeho opísanej kružnice (označme ho Z) bude rovnoľahlý v tej istej rovnoľahlosti s bodom W (so stredom opísanej kružnice trojuholníku NLM), takže to bude priesečník uhlopriečok rovnobežníka $NSWT$.

Presuňme svoju pozornosť k obr. 90, ktorý je len mierne zväčšenou časťou pôvodného obrázku (samozrejme, sú v ňom kreslené iné čiary, ale určitú paralelu možno vybadať).

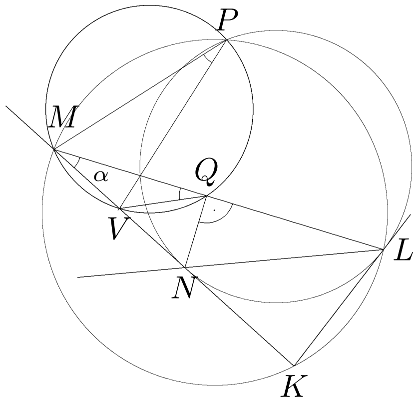


Obr. 90

Štvoruholník $NSPT$ je deltoid súmerný podľa TS, teda $|ZN| = |ZP|$, čiže aj bod P (a aj bod W) bude ležať na kružnici opísanej trojuholníku NUV. Teda štvoruholník $NUPV$ je tetivový. Zo spomínanej rovnoľahlosti vidno aj $|\sphericalangle NUV| = \beta$, takže $|\sphericalangle NPV| = |\sphericalangle NUV| = \beta$ (vrcholové uhly). Využijúc toto dostávame

$$|\sphericalangle VPM| = |\sphericalangle NPM| - |\sphericalangle NPV| = 180^\circ - \gamma - \beta = \alpha.$$

Napokon sa dostávame k obr. 91, ktorý zasa odráža rovnakú matematickú skutočnosť ako obr. 89, akurát sú zdôraznené iné vzťahy.



Obr. 91

Keďže trojuholník NQM je pravouhlý, tak $|VQ| = |VM|$, teda $|\sphericalangle VMQ| = |\sphericalangle VQM| = \alpha$. To ale znamená, že štvoruholník $VMPQ$ je tetivový. Teda $|\sphericalangle QVM| = 180° - 2\alpha$. Potom platí

$$|\sphericalangle MPQ| = 180° - |\sphericalangle MVQ| = 2\alpha = 2|\sphericalangle KML|,$$

čo bolo treba dokázať.

3.2 (Podľa *Radovana Bauera.*) Niektoré políčka obsahujúce 1 a -1 si očíslujeme, a to nasledovne. Políčku s 1 v ľubovoľnom riadku priradíme číslo 1. Políčku s -1 v tom istom riadku priradíme 2. Políčku s 1 v tom istom stĺpci ako 2 priradíme 3. Políčku s -1 v tom istom riadku ako 3 priradíme 4. Takto budeme pokračovať, až kým neočíslujeme číslom m políčko, ktoré je v tom istom stĺpci ako prvé políčko. To, že táto situácia nastane, sa poľahky ukáže pomocou konečnosti našej tabuľky. Treba si uvedomiť, že nepárne políčka obsahujú 1 a párne -1, takisto každé dve po sebe idúce čísla ležia spolu v jednom stĺpci alebo riadku. Prvé políčko je v stĺpci so samými nulami a s jedným políčkom s -1, preto m obsahuje -1, čiže je párne. Ľahko nahliadneme, že výmenami stĺpcov alebo riadkov obsahujúcich políčka z tohoto očíslovania nezmeníme polohu neočíslovaných políčok s 1 alebo -1. Označme $[(i,j)-(k,\ell)]$ výmenu stĺpca, resp. riadku, v ktorom sú i, j za stĺpec, resp. riadok s k, ℓ. Urobme výmeny $[(1,2)-(m,m-1)]$, $[(2,3)-(m-1,m-2)]$, $[(3,4)-(m-2,m-3)]$, …, $[(m/2-1,m/2)-(m/2+2,m/2+1)]$. Pri týchto výmenách hýbeme s políčkami 1 a m práve raz, a to pri prvej výmene. Keďže 1 a m ležia v rovnakom stĺpci, pri tejto výmene si tieto políčka vymenia polohu. Rovnako hýbeme práve raz aj s políčkami $m/2$ a $m/2+1$, a to pri poslednej výmene a tu si tieto políčka tiež vymenia polohu. Ďalej s každými ďalšími políčkami i a $m-i+1$ (bez ujmy na všeobecnosti $1 < i < m/2$) hýbeme len pri výmenách $[(i-1,i)-(m-i+2,m-i+1)]$ a $[(i,i+1)-(m-i+1,m-i)]$. Toto sú dve po sebe idúce výmeny, a teda jedna z nich je riadková a druhá stĺpcová. Čiže pri jednej z nich si tieto dve políčka vymenia riadkovú pozíciu a stĺpcovú si ponechajú a pri druhej si vymenia stĺpcovú pozíciu a ponechajú si riadkovú. Po obidvoch výmenách budú mať teda tieto dve políčka vymenené pozície. Čiže po uskutočnení všetkých spomenutých výmen bude pre každé i ($1 \leqq i \leqq n$) na políčku s pôvodným číslom i ležať číslo $m-i+1$. Políčka i a $m-i+1$ majú rôznu paritu, a teda na očíslovaných políčkach, kde bola predtým 1, bude teraz -1 a naopak.

Tento postup zopakujeme aj pre zvyšné políčka s 1 a -1 v tabuľke. Je zrejmé, že políčka, ktoré očíslujeme novým očíslovaním, budú disjunktné s tými starými. Toto budeme opakovať, až kým nepovymieňame všetky políčka s 1 a -1.

3.3 Ak $n=1$, tak $a=b=1$ a teda $a=n$ a $b=n^n$. Majme teda $n>1$. Nech kanonický rozvoj čísla n je $n=p_1^{\gamma_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\gamma_k}$, kde p_i sú rôzne prvočísla. Potom aj a a b majú vo svojom rozvoji len tieto prvočísla; nech $a=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ a $b=p_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$, $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{N}_0$ pre $i=1,\ldots,k$.

Ak niektoré $\beta_i=0$, tak $p_i\nmid b$. Potom porovnaním exponentov pri p_i v rovnosti dostaneme $\gamma_i(a+b)=\alpha_i b$, takže $(\alpha_i-\gamma_i)b=a\gamma_i$. Pretože $p_i^{\alpha_i}\mid a$ a $p_i\nmid b$, musí $p_i^{\alpha_i}\mid$ $\mid(\alpha_i-\gamma_i)$, čo ale znamená, že $p_i^{\alpha_i}\leqq(\alpha_i-\gamma_i)\leqq\alpha_i$, takže nutne $p_i=1$, čo je spor. Takže $\beta_i>0$ pre všetky $i=1,\ldots,k$.

Teraz si vo vzťahu $\gamma_i(a+b)=\beta_i+b\alpha_i$ všimneme, že $p_i^{\beta_i}\mid b$ a $p_i^{\beta_i}\nmid\beta_i$, preto aj $p_i^{\beta_i}\nmid a$, z čoho vyplýva, že $\alpha_i<\beta_i$ pre všetky i, a tak $a\mid b$. Navyše, z toho istého vzťahu dostávame, že aj $a\mid\beta_i$ a teda číslo b je a-tou mocninou nejakého prirodzeného čísla $c\geqq 2$.

Ukážme teraz, že $n\mid a$. Nech $n/a=p/q$, kde $(p,q)=1$. Potom pôvodnú rovnosť môžeme prepísať na $n^a p^b=bq^b$. Potom ale $p_b\mid bq^b$ a tak $p^b\mid b$, odkiaľ $p=1$ a teda naozaj $n\mid a$.

Ak $n<a$, tak pre nejaké i platí $\gamma_i+1\leqq\alpha_i$, potom

$$\gamma_i(a+b)=\beta_i+b\alpha_i>b\alpha_i\geqq b(\gamma_i+1),$$

z čoho $\gamma_i a>b$. Na druhej strane, a je násobok n, teda $p_i^{\gamma_i}\mid a$, a tak $\gamma_i<p_i^{\gamma_i}\leqq a$, preto $a^2>b=c^a$, čo je ekvivalentné s $\sqrt{c}<a^{1/a}$. Pre $a\geqq 5$ je $a^{1/a}<\sqrt{2}$, pre $a=2$ a $a=4$ máme $a^{1/a}=\sqrt{2}$, teda jediné riešenie, ktoré prichádza do úvahy, je $a=3$ a $c=2$, no vtedy $b=2^3=8$ nie je deliteľné a, čo je spor s tým, čo sme odvodili vyššie.

Preto $n=a$ a teda $n^{n+b}=n^b b$, odkiaľ okamžite dostávame požadované $b=n^n$.

3.4 (Podľa *Kataríny Quittnerovej*.) Po zavedení substitúcie $a=\sqrt{x-1}$, $b=\sqrt{y-1}$, $c=\sqrt{z-1}$ (zrejme $a,b,c\in\mathbb{R}^+$) sa nerovnosť v zadaní zmení na

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2 \iff \frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2,$$

čo po roznásobení a úprave dáva

$$2a^2b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=1, \tag{1}$$

pričom treba dokázať $\sqrt{a^2+b^2+c^2+3}\geqq a+b+c$, čo je postupne ekvivalentné s nerovnosťami (obe strany sú kladné)

$$a^2+b^2+c^2+3\geqq a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc),$$
$$\frac{3}{2}\geqq ab+ac+bc. \tag{2}$$

Po ďalšej substitúcii $k = 1 - ab$, $\ell = 1 - bc$, $m = 1 - ac$ (z (1) vyplýva, že $ab, bc, ac < 1$, takže platí aj $0 < k, \ell, m < 1$) vidíme, že nerovnosť (2) je ekvivalentná s $k+\ell+m \geqq 3/2$. Z nerovnosti (1) pritom vieme, že platí

$$\begin{aligned}
1 &= 2(1-k)(1-\ell)(1-m) + (1-k)^2 + (1-\ell)^2 + (1-m)^2,\\
1 &= 2 - 2(k+\ell+m) + 2(k\ell + \ell m + km) - 2k\ell m + 3 - 2(k+\ell+m) + k^2 + \ell^2 + m^2 =\\
&= 5 - 4(k+\ell+m) - 2k\ell m + (k+\ell+m)^2 \geqq\\
&\geqq 5 - 4(k+\ell+m) + (k+\ell+m)^2 - 2\left(\frac{k+\ell+m}{3}\right)^3 =\\
&= 5 - 4(k+\ell+m) + (k+\ell+m)^2 - \frac{2}{27}(k+\ell+m)^3
\end{aligned}$$

(využili sme pri tom AG-nerovnosť kladných čísel k, ℓ, m). Dostávame tak kubickú rovnicu

$$(k+\ell+m)^3 - \frac{27}{3}(k+\ell+m)^2 + 54(k+\ell+m) - 54 \geqq 0,$$
$$(k+\ell+m-\frac{3}{2})(k+\ell+m-6)^2 \geqq 0,$$

odkiaľ vyplýva dokazované $k+\ell+m \geqq 3/2$.

Iné riešenie. Z Cauchyho nerovnosti (pre kladné čísla $(x-1)/x$, $(y-1)/y$ a $(z-1)/z$) dostávame

$$\sqrt{x+y+z}\,\sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}} \geqq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

K ukončeniu dôkazu požadovanej nerovnosti si už len stačí všimnúť, že predpoklad $1/x + 1/y + 1/z = 2$ je ekvivalentný s rovnosťou

$$\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1.$$

3.5 Zaoberajme sa prípadom $n \geqq 2$, pretože pre $n = 1$ úloha triviálne platí. Očíslujme si vrcholy 2^n-uholníka postupne $1, 2, \ldots, 2^n$. Ďalej budeme používať číslovanie vrcholov modulo 2^n (0 modulo 2^n považujeme za 2^n). Farbu vrcholu i po k krokoch reprezentujeme číslom $a_{i,k} \in \{0, 1\}$, pričom $a_{i,k} = 0$, ak je farba príslušného vrcholu červená a $a_{i,k} = 1$, ak je modrá. Podľa zadania dostávame

$$a_{i,k-1} = a_{i-1,k} +_2 a_{i+1,k}, \tag{1}$$

kde $+_2$ je sčítanie modulo 2. Pomocou vzťahu (1) dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na počet krokov k vzťah

$$a_{i,k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_{i-k+2j,0}. \tag{2}$$

1° $k = 1$.

$$a_{i,1} = \binom{1}{0}\ a_{i-1,0} +_2 \binom{1}{1}\ a_{i+1,0} = a_{i-1,0} +_2\ a_{i+1,0},$$

čo platí podľa (1).

2° Predpokladajme platnosť (2) pre k. Potom platí

$$\begin{aligned} a_{i,k+1} &= a_{i-1,k} +_2\ a_{i+1,k} \overset{IP}{=} \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_{i-k+2j-1,0} +_2 \sum_{j=0}^{k} a_{i-k+2j+1,0} = \binom{k}{0} a_{i-k-1,0}\ +_2 \\ &+_2 \sum_{j=1}^{k} \left(\binom{k}{j}\ a_{i-k+2j-1,0} +_2 \binom{k}{j+1}\ a_{i-k+2j-1,0} \right) +_2 \binom{k}{k}\ a_{i+k+1,0} = \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}\ a_{i-(k+1)+2j,0}. \end{aligned}$$

Tým sme dokázali platnosť tvrdenia

$$a_{i,2^{n-1}} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{j}\ a_{i-2^{n-1}+2j,0}. \tag{3}$$

Pre $1 \leqq j \leqq 2^{n-1} - 1$ však platí

$$\binom{2^{n-1}}{j} = \binom{2^{n-1}-1}{j-1} \frac{2^{n-1}}{j}.$$

Keďže 2^{n-1} delí čitateľa zlomku, ale zrejme 2^{n-1} nedelí menovateľ zlomku, $j \leqq \leqq 2^{n-1} - 1$. Potom musí dvojka deliť aj číslo

$$\frac{\binom{2^{n-1}-1}{j-1} 2^{n-1}}{j} = \binom{2^{n-1}}{j}, \tag{4}$$

to ale podľa rovnosti (3) znamená, že platí

$$a_{i,2^{n-1}} = a_{i-2^{n-1},0} +_2 \sum_{j=1}^{2^{n-1}-1} a_{i-2^{n-1}-2j,0} +_2\ a_{i+2^{n-1},0}$$

a podľa (4) je každý člen vo vyššie uvedenej sume nulový, a preto

$$a_{i,2^{n-1}} = a_{i-2^{n-1},0} +_2\ a_{i+2^{n-1},0} = 2a_{i+2^{n-1},0}$$

(pretože $(i-2^{n-1})+2^n = i+2^{n-1}$). Tým sme ukázali, že po 2^{n-1} prefarbeniach budú všetky vrcholy ofarbené červenou farbou.

Pre počiatočné ofarbenie $a_{1,0}=1$ a $a_{i,0}=0$ pre $i=2,3,\dots 2^n$ platí

$$\begin{aligned} a_{2^{n-1},2^{n-1}-1} &\overset{(2)}{=} \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} a_{2^{n-1}-2^{n-1}+1+2j,0}\binom{2^{n-1}-1}{j} = \\ &= a_{1,0} + {}_2 \sum_{j=1}^{2^{n-1}-1} a_{1+2j,0}\binom{2^{n-1}-1}{j}. \end{aligned}$$

Pretože v sume platí $3 \leqq 1+2j \leqq 2^n-1$, musí platiť aj $a_{1+2j,0}=0$, a teda dostaneme $a_{2^{n-1},2^{n-1}-1}=a_{1,0}=1$. Preto je vrchol 2^{n-1} ofarbený na modro po $2^{n-1}-$ -1 prefarbeniach. Zrejme ani nikdy predtým nemohla nastať situácia, že by boli všetky vrcholy červené, lebo potom by červenými ostali aj po $2^{n-1}-1$ krokoch a v tej situácii je aspoň jeden vrchol modrej farby.

3.6 Označme D' priesečník AP a BC. Z Cèvovej vety pre trojuholník ABC a body D', E a F máme rovnosť

$$\frac{|AF|}{|FB|}\cdot\frac{|BD'|}{|D'C|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|}=1. \tag{1}$$

K dôkazu požadovaného nám vďaka Menelaovej vete pre trojuholník ABC a body D, E a F (využitím (1)) stačí dokázať rovnosť

$$\frac{|BD'|}{|D'C|}=\frac{|BD|}{|CD|}. \tag{2}$$

Ak označíme φ veľkosť uhla CAD, tak využitím zhodnosti uhlov pri základni v rovnoramennom trojuholníku ACD a rovnosti obvodových uhlov tetivového štvoruholníka $ACDP$ dostaneme

$$\left.\begin{aligned} \varphi = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CPD| \\ 180^\circ - 2\varphi = |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle APD| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |\sphericalangle CPD'| = \varphi. \tag{3}$$

Vidíme, že PC je osou uhla $D'PD$. Pretože $|\sphericalangle BPD| = 90^\circ$ (P leží na Tálesovej kružnici nad stranou BC), tak z (3) máme $|\sphericalangle BPD'| = 90^\circ - \varphi$. Nakoniec už len dorátame za pomoci sínusových viet pomery v trojuholníkoch PDD' a BPD.

$$\left.\begin{aligned} \frac{|CD|}{\sin\varphi} = \frac{|DP|}{\sin|\sphericalangle PCD|} \\ \frac{|CD'|}{\sin\varphi} = \frac{|D'P|}{\sin|\sphericalangle PCD'|} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\sin\varphi}{\sin|\sphericalangle PCD'|} = \frac{|DP|}{|CD|} = \frac{|D'P|}{|CD'|},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{|DP|}{\sin|\sphericalangle PBD|} &= \frac{|BD|}{\sin\underbrace{|\sphericalangle BPD|}_{90^\circ+\varphi}}\\ \frac{|PD'|}{\sin|\sphericalangle PBD|} &= \frac{|BD'|}{\sin(90^\circ-\varphi)}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\sin|\sphericalangle PBD|}{\sin(90^\circ+\varphi)} = \frac{|BD|}{|DP|} = \frac{|BD'|}{|DP'|}.$$

Po vyjadrení pomeru $|DP|/|D'P|$ z týchto rovností dostaneme vzťah, ktorého úpravou máme práve rovnosť (2)

$$\frac{|DP|}{|D'P|} = \frac{|CD|}{|CD'|} = \frac{|BD|}{|BD'|}.$$

3.7 (Podľa *Jána Mazáka.*) Nech $x = y$, potom dosadením dostávame

$$\begin{aligned}2 - x^3 &= x,\\ x^3 + x - 2 &= 0,\\ (x-1)(x^2+x+2) &= 0.\end{aligned}$$

Teda jediným koreňom v tomto prípade je $(x, y) = (1, 1)$.

Nech $x \neq y$. Sčítajme a odčítajme naše rovnice. Dostávame

$$\begin{aligned}4 - x^3 - y^3 &= x + y,\\ y^3 - x^3 &= y - x.\end{aligned} \tag{1}$$

Druhú rovnicu v (1) môžeme vydeliť $(y - x)$. Dostávame

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 - 1 &= 0,\\ x^2 - xy + y^2 + 1 &= 2 - 2xy.\end{aligned} \tag{2}$$

Z rovníc (1) máme

$$\begin{aligned}4 - (x^3 + y^3) &= x + y,\\ (x+y)(x^2 - xy + y^2 + 1) &= 4.\end{aligned} \tag{3}$$

Pretože $(x^2 - xy + y^2 + 1) = (x - y)^2/2 + (x^2 + y^2)/2 + 1 > 0$, z rovnosti (4) platí $x + y > 0$. Dosadením (2) do rovnice (3) a zavedením substitúcie $x + y = a$, (vieme, že musí platiť $(a > 0)$), $xy = b$ dostaneme

$$\begin{aligned}2a(1-b) &= 4,\\ b &= 1 - \frac{2}{a}.\end{aligned} \tag{4}$$

Z rovnice (3) potom dostaneme

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy + 1) &= 4,\\ (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy + 1\right) &= 4,\\ a(a^2 - 3b + 1) &= 4.\end{aligned}$$

Dosadením vzťahu (3) do rovnice (4) máme

$$
\begin{aligned}
a\left(a^2 - \left(1 - \frac{2}{a}\right) + 1\right) &= 4,\\
a^3 - 3(a-2) + a &= 4,\\
a^3 - 2a + 2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Rozoberieme možnosti pre a.

Ak $a \in (0, 1\,\rangle$, potom $a^3 - 2a + 2 > -2a + 2 = 2(1-a) \geqq 0$.

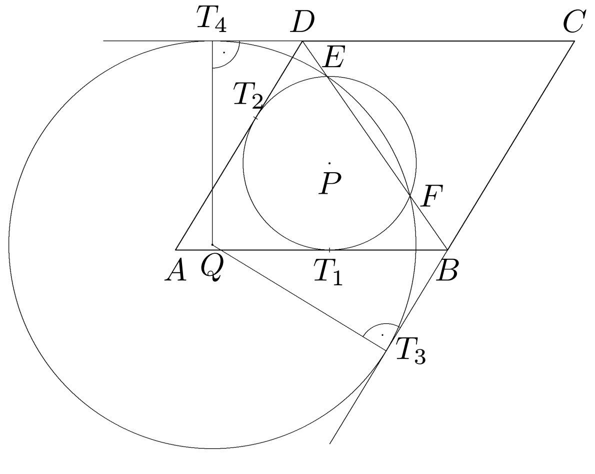
Ak $a \in (1, \infty)$, tak platí $a^3 - 2a + 2 > a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 > 0$.

Preto $a^3 - 2a + 2 > 0$ pre $a > 0$, a teda v tomto prípade rovnica nemá korene a jediným riešením sústavy je dvojica $(x, y) = (1, 1)$.

Štvrtá séria

4.1 Nech k_1 je daná kružnica, P jej stred, T_1, T_2 päty kolmíc z P po rade na priamky AB a AD (čiže sú to body dotyku). Nech $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |DA|$. Priamky AT_1 a AT_2 sú dotyčnice, teda nech $x = |AT_1| = |AT_2|$.

Teraz, nech T_3 leží na polpriamke CB tak, že $|BT_3| = |BT_1|$, ale T_3 neleží na úsečke BC. Nech sa kolmica na BC cez bod T_3 pretne s osou uhla BCD v bode Q. Tvrdíme, že kružnica k_2 so stredom Q a polomerom QT_3 je vyhovujúca (obr. 92).



Obr. 92

Keďže Q je na osi uhla BCD a $QT_3 \perp BC$, tak sa k_2 dotýka aj priamok CD a BC. Stačí už len ukázať, že pretína BD v bodoch E, F. Označme T_4 bod dotyku k_2 a CD. Máme $|BT_3| = |BT_1| = |AB| - |AT_1| = a - x$. Vďaka dotyčniciam $|CT_4| = |CT_3| = |CB| + |BT_3| = b + a - x$. Pretože $a > x$, máme $|CT_4| > |CD|$ a teda D je medzi C a T_4. Potom ale

$$|DT_4| = |CT_4| - |CD| = (b + a - x) - a = b - x = |DT_2|.$$

Takže máme $|BT_1| = |BT_3|$ a $|DT_2| = |DT_4|$. Z dôvodu, že BT_1 a BT_3 sú dotyčnice z B na k_1 a k_2, B má rovnakú mocnosť k obom kružniciam. Podobne je na tom D. Teda BD je chordála týchto dvoch kružníc. Teda, keďže k_1 ju pretína v bodoch E, F, rovnako je to pre k_2. A máme, čo sme chceli.

4.2 (Podľa *Kataríny Quittnerovej*.) Riadky, resp. stĺpce tabuľky si označme $r_1, \dots, r_n$, resp. $s_1, \dots, s_n$. Číslo v políčku, ktoré sa nachádza v r_i-tom riadku a s_j-tom stĺpci označíme (r_i, s_j). Na začiatku bolo $n-1$ čísel 1 a zvyšné boli nuly, takže existuje aspoň jeden „nulový" riadok, bez ujmy na všeobecnosti nech je to r_1, t. j. $(r_1, s_j) = 0$ pre $j = 1, 2, \dots, n$. Podobne musí existovať nulový stĺpec, nech je to s_1, t. j. $(r_i, s_1) = 0$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. (Zámenou jednotlivých riadkov, resp. stĺpcov sa na úlohe nič nezmení.) Označme niektoré počiatočné „nenulové" políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci, teda $(r_i, s_j) = 1$ (zrejme $i, j \neq 1$). Uvážme štvoricu čísel tabuľky

$$\begin{array}{ccc} (r_1, s_1) & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & (r_1, s_j) \\ \vdots & & \vdots \\ (r_i, s_1) & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & (r_i, s_j) \end{array}$$

Označme si výraz $S = (r_1, s_1) - (r_1, s_j) - (r_i, s_1) + (r_i, s_j)$. Pred prvým krokom v úlohe bolo $S = 1 \equiv 1 \pmod 3$. Ukážeme, že pri jednotlivých krokoch sa súčet S modulo 3 nemení. Máme 4 možnosti, ako sa mení súčet S:

1. Číslo vo zvolenom políčku je jedným z našich štyroch čísel vyskytujúcich sa v S. Toto číslo zmenšíme o 1 a obe čísla, ktoré majú vo výraze S opačné znamienko ako to zvolené číslo zväčšíme o 1, štvrté číslo vo výraze S nezmeníme. Týmto zmeníme S o ± 3.
2. Zvolené políčko leží v jednom z riadkov r_1, r_i alebo v jednom zo stĺpcov s_1, s_j (a je rôzne od našich štyroch políčok). Takýto riadok, resp. stĺpec označme t. V tejto situácii zväčšíme o 1 dve z našich čísel, pričom tieto čísla (ležiace v t) majú v súčte S opačné znamienka, takže S vôbec nezmeníme.
3. Zvolené políčko neleží v žiadnom z riadkov resp. stĺpcov r_1, r_i, s_1, s_j. V tomto naše štyri čísla v S vôbec nezmeníme.

Na začiatku sme mali $S \equiv 1 \pmod 3$ a na konci by sme mali dosiahnuť $S \equiv 0 \pmod 3$ (všetky čísla majú byť rovnaké), to je ale spor, lebo $S \pmod 3$ sa pri našom krokovaní nezmení.

4.3 (Podľa *Andreja Osuského*.) Položme $x = \sqrt{a^2+1} > 1$, $y = \sqrt{b^2+1} > 1$, pretože zo zadania máme $a, b > 0$. Zvoľme si parameter $p > 1$. Potom $5p^2 - 12p + 8 = 5(p - - 6/5)^2 + 4/5 > 0$. Definujeme kvadratickú funkciu premennej t ako

$$f(t) = (5p^2 - 12p + 8)t^2 - 4(3p^2 - 5p + 2)t + 8p(p-1)$$

s kladným koeficientom pri t^2. Jej diskriminant $D(p) = -16(p^2-1)(p-2)^2$ je nekladný a to znamená, že funkcia f je nezáporná, t. j. $f(t) \geqq 0$. Preto pre všetky $x, y > 1$ platí

$$\begin{aligned}
(5y^2 - 12y + 8)x^2 - 4(3y^2 - 5y + 2)x + 8y(y-1) &\geqq 0,\\
5x^2y^2 - 12x^2y + 8x^2 - 12x^2y + 20xy - 8x + 8y^2 - 8y &\geqq 0,\\
9x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2 + 4 - 12x^2y - 12xy^2 + 12xy + 8xy - 8x - 8y - &\\
-4(x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1) &\geqq 0,\\
(3xy - 2x - 2y + 2)^2 - 4(x^2-1)(y^2-1) &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Zrejme $(3xy - 2x - 2y + 1)^2 \geqq 0$, $x^2 - 1 > 0$, $y^2 - 1 > 0$ z definície x a y, úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
3xy - 2x - 2y + 2 &\geqq 2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)},\\
\frac{3}{2} &\geqq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} - 1}{xy}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Z podmienky zo zadania máme $1 < ab$ (inak by sme dostali, že $a + b + c = abc \leqq c$ a z toho $a + b \leqq 0$, čo nemôže platiť, pretože a a b majú byť kladné reálne čísla). Preto si zo zadania vieme vyjadriť $c = (a+b)/(ab-1)$, a z toho dostávame

$$\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{ab-1}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)} - 1}{xy}.$$

Dosadením tohto vzťahu do (1) dostávame požadovanú nerovnosť.

Nerovnosť sa dala dokázať aj pomocou goniometrickej substitúcie $a = \operatorname{tg}^{-1}\alpha$, $b = \operatorname{tg}^{-1}\beta$, $c = \operatorname{tg}^{-1}\gamma$. Podmienka v zadaní by sa tak zmenili na $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ a $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 90°)$ a dokazovaná nerovnosť by dostala tvar $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqq 3/2$.

4.4 Označme si strany a uhly v trojuholníku zvyčajným spôsobom. Potom zadanie hovorí

$$\underline{90°} < \gamma = 180° - \beta - \overset{=2\beta}{\alpha} = \underline{180° - 3\beta}, \text{ z toho } 0 < \beta < 30° \Longrightarrow 1 > \cos\beta > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{6}{7}.$$

Platnosť poslednej nerovnosti je zrejmá hneď po umocnení. Zo sínusovej vety máme:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin(2\beta)}{\sin\beta} = \frac{2\cos\beta\sin\beta}{\sin\beta} = 2\cos\beta. \tag{1}$$

Preto $\cos\beta \in \mathbb{Q}^+$, zapíšme si $\cos\beta = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ a $(p, q) = 1$. Ďalej počítajme pomer

$$\begin{aligned}
\frac{c}{b} &= \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(180° - 3\beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(3\beta)}{\sin\beta} = \frac{[\sin\beta\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos\beta]}{\sin\beta} = \\
&= \cos(2\beta) + 2\cos\beta\cos\beta = 4\cos^2\beta - 1 = 4\cdot\frac{p^2}{q^2} - 1 = \frac{4p^2 - q^2}{q^2}\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Využili sme vzťah $\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \cos^2\beta - (1 - \cos^2\beta) = 2\cos^2\beta - 1$.

Keďže však $(p, q) = 1$, má zlomok c/b v základnom tvare menovateľa buď q^2 alebo, ak $2 \mid q$, je menovateľ $q^2/4$. To znamená, že $b \geqq q^2/4$, lebo zápis kladného zlomku má minimálny menovateľ, ak je v základnom tvare.

Ďalej z predchádzajúcich úvah vyplýva

$$b \geqq \frac{q^2}{4}, \quad c \overset{(2)}{=} b\left(\frac{4p^2}{q^2} - 1\right) \geqq \frac{q^2}{4}\left(\frac{4p^2}{q^2} - 1\right) = p^2 - \frac{q^2}{4},$$
$$a \overset{(1)}{=} 2 \cdot (\cos\beta) \cdot b = \frac{2pb}{q} \geqq \frac{pq}{2}.$$

Obvod trojuholníka ABC vieme ohraničiť výrazom

$$o = a + b + c \geqq \frac{pq}{2} + \frac{q^2}{4} + \left(p^2 - \frac{q^2}{4}\right) \geqq \frac{pq}{2} + p^2. \tag{3}$$

Pritom vieme, že

$$1 > \frac{p}{q} = \cos\beta \Longrightarrow q > p \Longrightarrow q \geqq p + 1 \Longrightarrow p \leqq q - 1,$$
$$\text{pre } q \leqq 7: \ \frac{6}{7} < \frac{p}{q} \leqq \frac{q-1}{q} = 1 - \frac{1}{q} \leqq \frac{6}{7}, \text{ spor, preto } q \geqq 8,$$
$$\text{pre } p \leqq 6: \ \frac{6}{7} < \frac{p}{q} \leqq \frac{p}{8} \leqq \frac{6}{8} < \frac{6}{7}, \text{ opäť spor.}$$

Preto musí platiť $q \geqq 8$ a $p \geqq 7$. Takto pre obvod trojuholníka ABC dostaneme pomocou (3) odhad $o \geqq pq/2 + p^2 \geqq 7.8 + 7.7/2 = 77$. Rovnosť nastane pre $a = 28$, $b = 16$, $c = 23$, pre ktoré platia trojuholníkové nerovnosti. Splnenie podmienok zadania overíme pomocou kosínusovej vety

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{7}{8}, \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17}{32}.$$

Pretože $\cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1 = 2\cdot\frac{49}{64} - 1 = 17/32 = \cos\alpha$ a funkcia $\cos(x)$ je na intervale $(0, \pi/2)$ prostá, platí $\alpha = 2\beta$. Zároveň $7/8 > \sqrt{3}/2$ (dôkaz umocnením) a preto $\beta < 30°$, odkiaľ $\gamma = 180° - 3\beta > 90°$. Teda tento trojuholník ozaj vyhovuje zadaniu a hľadané minimum je 77.

4.5 (Podľa *Kataríny Quittnerovej* a *Mareka Tesařa*.) Pod pojmom rozlíšenia množiny čísel budeme v tomto príklade chápať určenie mysleného čísla podľa pravidiel v zadaní. Označme F_i maximálnu mohutnosť množiny čísel, ktorá sa dá rozlíšiť pri strate najviac i korún. Jednoprvkovú množinu netreba rozlišovať, ale na rozlíšenie dvoj a viacprvkových množín potrebujeme aspoň dve koruny. Preto zrejme $F_0 = F_1 = 1$. Nech $n \geqq 2$ je ľubovoľné prirodzené číslo. Chceme dokázať, že platí $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Majme n korún a N-prvkovú množinu, kde $N = F_{n-1} + F_{n-2}$. V prvej otázke sa opýtame, či je to číslo z nejakej ľubovoľnej F_{n-1}-prvkovej podmnožiny. Ak je odpoveď áno, stratíme 2 koruny a ostane nám $n-2$ korún na rozlíšenie F_{n-2}-prvkovej množiny, čo zjavne pôjde. Prípad s odpoveďou nie je analogický, ibaže so stratou 1 koruny a potrebou rozlíšiť F_{n-1}-prvkovú množinu. Čiže N-prvkovú množinu vieme rozlíšiť pomocou n korún a teda platí $F_n \geqq N = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Majme teraz ľubovoľnú F_n-prvkovú množinu. Vieme, že pre ňu existuje systém otázok, pomocou ktorých sa táto množina dá rozlíšiť zaplatením maximálne n korún. Nech sa prvou otázkou v tomto systéme opýtame na nejakú M-prvkovú podmnožinu. Ak je odpoveď áno, ostane nám $n-2$ korún na rozlíšenie M-prvkovej množiny a teda $M \leqq F_{n-1}$. Analogicky pre odpoveď nie potom platí $F_n - M \leqq F_{n-2}$. Čiže platí $F_n = M + F_n - M \leqq F_{n-1} + F_{n-2}$.

Tým sme dokázali rovnosť $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Postupným vyrátaním členov postupnosti $\{F_n\}$ zistíme, že $F_{10} = 89$ a $F_{11} = 144$. To znamená, že potrebujeme minimálne 11 korún.

4.6 Označme $P(n)$ počet permutácií φ spĺňajúcich (a) aj (b) takých, že $\varphi(x) = 1$ a $Q(n)$ počet permutácií φ spĺňajúcich (a) aj (b) takých, že $\varphi(x) \neq 1$. Potom $|A| = P(n) + Q(n)$. Zrejme $P(1) = 1$, $P(2) = 0$, $Q(1) = 0$ a $Q(2) = 1$. Ďalej uvažujme $n \geqq 3$. Najskôr predpokladajme, že $\varphi(1) = 1$, vyrátajme $P(n)$. Z podmienok (a) a (b) vyplýva, že $\varphi(n-1) = n$.

a) Ďalej nech $\varphi(n) = n-1$. Zrejme $(\varphi(1), \dots, \varphi(n-2))$ je permutáciou $(1, 2, \dots, n-2)$ a spĺňa (a), (b) aj $\varphi(1) = 1$. Preto počet takýchto permutácií je zrejme $P(n-2)$.

b) Nech $\varphi(n) \neq n-1$. Označme $\sigma(k) = \varphi(k)$ pre $k = 1, 2, \dots, n-2$ a $\sigma(n-1) = \varphi(n)$; σ je permutácia $(1, 2, \dots, n-1) \to (1, 2, \dots, n-1)$, ktorá navyše spĺňa (a), (b) a zároveň $\sigma(1) = 1$. Takýchto permutácií je teda $P(n-1)$. Teda $P(n) = P(n-1) + P(n-2)$. Keďže $P(2) = 0 = F_0$ a $P(3) = 1 = F_1$, máme

$$P(n) = F_{n-2} \text{ pre } n \geqq 2,\ P(1) = 1,\ P(2) = 0.$$

Analogicky možno postupovať pre $Q(n)$. Dostávame $Q(n) = F_{n-1}$. Hľadaná pravdepodobnosť je

$$p(1) = 1$$

$$p(n) = \frac{Q(n)}{P(n) + Q(n)} = \frac{F_{n-1}}{F_n} = 2 \cdot \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n-1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n}} \quad \text{pre } n \geqq 2.$$

4.7 Ukážme najprv, že v danom päťuholníku leží aspoň jeden ďalší mrežový bod alebo aspoň ďalšie dva sú na jeho stranách. Pre päť vrcholov nášho päťuholníka existujú len štyri možnosti parity súradníc (pre každú súradnicu dve), existujú teda dva vrcholy, ktorých obe súradnice majú rovnakú paritu. Potom stred úsečky spájajúcej tieto vrcholy má celočíselné súradnice, a teda je to mrežový bod. Ak nájdené dva vrcholy nie sú susedné, nový mrežový bod je zrejme stred uhlopriečky, ktorý, vďaka konvexnosti leží vnútri nášho päťuholníka.

Nech teda stred S strany AB päťuholníka $ABCDE$ je mrežový bod. Použitím podobnej úvahy pre (konvexný) päťuholník $SBCDE$ dostávame, že stred niektorej jeho strany alebo uhlopriečky je mrežový bod. Ak tento bod leží vnútri päťuholníka $ABCDE$, sme hotoví, ak nie, on spolu s bodom S sú dva hľadané body na obvode päťuholníka $ABCDE$.

Pre odhad obsahu päťuholníka $ABCDE$ použijeme Pickovu vetu, podľa ktorej obsah n-uholníka s vrcholmi v mrežových bodoch je rovný

$$S = v + \frac{1}{2}h - 1,$$

kde v je počet mrežových bodov vnútri a h na obvode daného n-uholníka. My sme už ukázali, že $v \geqq 1$ a $h \geqq 5$ alebo $h \geqq 7$, v oboch prípadoch dostávame požadovaný odhad $S \geqq 5/2$.

Iné riešenie. Podobne ako v prvom riešení ukážeme, že nájdeme aspoň jeden mrežový bod vnútri alebo aspoň ďalšie dva na obvode daného päťuholníka. V oboch prípadoch potom päťuholník vieme rozdeliť na päť trojuholníkov s vrcholmi v mrežových bodoch. Aby sme dokázali, že obsah tohto päťuholníka je aspoň 5/2, stačí ukázať, že obsah ľubovoľného trojuholníka s vrcholmi v mrežových bodoch je aspoň 1/2.

Ak (aspoň) jedna dvojica vrcholov má jednu súradnicu rovnakú, tak táto strana trojuholníka je celočíselná, takisto výška takéhoto trojuholníka je celé číslo. Potom jeho obsah podľa známeho vzorca $S = a \cdot v/2$ je polovica celého čísla, teda aspoň 1/2.

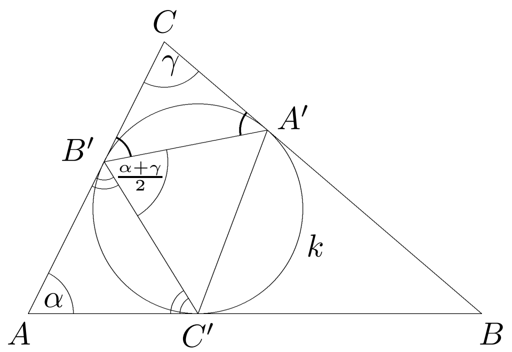
Trojuholník vo všeobecnej polohe doplníme troma pravouhlými trojuholníkmi nad jeho stranami na pravouholník. Obsahy doplnkových trojuholníkov sú podľa úvahy vyššie tvaru $k_i/2$, $k_i \in \mathbb{N}$; obsah celého pravouholníka je zrejme celočíselný. Potom ale obsah S nášho trojuholníka ako rozdiel obsahu celého pravouholníka a súčtu obsahov doplnkových trojuholníkov je opäť číslo tvaru $k/2$, $k \in \mathbb{N}$, teda je aspoň 1/2.

PIATA SÉRIA

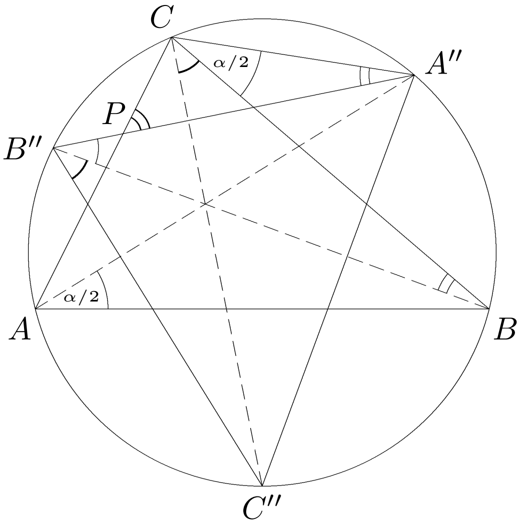
5.1 (Podľa *Andreja Osuského*.) Všetky uvedené úvahy možno previesť pre všetky trojuholníky (ostro-, pravo-, tupouhlé). Dokážeme, že priamky $A'B'$ a $A''B''$ sú rovnobežné a $|\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle A''B''C''|$. Označme si uhly v trojuholníku ABC tradične, priamky CA', CB' sú dotyčnicami ku kružnici k vpísanej trojuholníku ABC (obr. 93). Preto zrejme platí

$$|CA'| = |CB'|,\ |\sphericalangle CA'B'| = |\sphericalangle CB'A'| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle A'CB'|}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}, \quad \text{podobne}$$
$$|AB'| = |AC'|,\ |\sphericalangle AB'C'| = |\sphericalangle AC'B'| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle B'AC'|}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Pri bode B' dostaneme počítaním priameho uhla $|\sphericalangle A'B'C'| = 180° - |\sphericalangle AB'C'| - |\sphericalangle CB'A'| = (\alpha + \gamma)/2$. Analogicky si takto vieme vyrátať veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka $A'B'C'$.



Obr. 93



Obr. 94

Nech A'' je stred oblúka podľa zadania. Ukážme, že A'' leží na osi uhla BAC. Pretože A'' je stredom oblúka opísanej kružnice, ktorý neobsahuje bod C, je zrejme trojuholník $A''BC$ rovnoramenný so základňou BC. Navyše vieme, že štvoruholník $ABA''C$ je tetivový, preto je veľkosť uhla $BA''C$ rovná $180° - \alpha$. Spolu nám to dáva

$$|\sphericalangle A''CB| = |\sphericalangle A''BC| = \frac{180° - |\sphericalangle BA''C|}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Z obvodových uhlov v štvoruholníku $ABA''C$ vidíme, že $|\sphericalangle A''AB| = |\sphericalangle A''CB| = \alpha/2$. Celkovo sú priamky AA'', BB'' a CC'' osami vnútorných uhlov trojuholníka ABC, a preto prechádzajú jedným bodom. Označme si bod P podľa obr. 94 a zistime veľkosť uhla pri tomto bode. Z vlastností obvodových uhlov zistíme

$$\left.\begin{aligned} |\sphericalangle BCA''| &= \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle BAA''| \\ |\sphericalangle CA''B''| &= \frac{\beta}{2} = |\sphericalangle CBB''| \\ |\sphericalangle ACB| &= \gamma \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |\sphericalangle A''PC| = 180° - \left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Tým sme dokázali, že strany trojuholníka ABC sú rovnobežné so stranami trojuholníka $A''B''C''$. Na overenie ich podobnosti stačí dopočítať veľkosť uhla $A''B''C''$.

$$\left.\begin{aligned} |\sphericalangle BAA''| &= \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle BB''A''| \\ |\sphericalangle C''B''B| &= \frac{\gamma}{2} = |\sphericalangle C''CB| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |\sphericalangle C''B''A''| = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Podobne by sme dopočítali ostatné vnútorné uhly trojuholníka $A''B''C''$. Trojuholníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ sú rovnoľahlé, koeficient ich rovnoľahlosti je rovný pomeru polomerov vpísanej a opísanej kružnice trojuholníka ABC, preto sa vzory a obrazy v tejto rovnoľahlosti zobrazia na seba. Zadané priamky prechádzajú týmto stredom rovnoľahlosti.

5.2 (Podľa *Andreja Osuského*.) Prípad $M = \emptyset$ je triviálny, uvažujme $M \neq \emptyset$. Zvoľme systém $O_{x'y'}$ ľubovoľne a označme si $S(x')$ a $S(y')$ súčet dĺžok priemetov všetkých úsečiek z M na x'-ovú a y'-ovú os. Ukážme, že vieme zvoliť O_{xy} tak, aby $S(x) = S(y)$.

Nech to tak nie je. Bez ujmy na všeobecnosti, nech $S(x') > S(y')$. Ak zameníme súradnicové osi x' na y', resp. y' na x', dostaneme opačnú nerovnosť. Veľkosť $S(x')$ sa nám (podobne ako $S(y')$) spojito mení. (Lebo dĺžka priemetu každej úsečky z M sa spojito mení pri otáčaní súradnicových osí okolo pevného bodu, pričom sa nám úsečka neotáča. Súčtom spojitých funkcií dostaneme spojitú funkciu.) Preto budú isto existovať také osi x a y, že bude platiť $S(x) = S(y)$.

Nech p_i, resp. q_i označuje dĺžku priemetu i-tej úsečky z M na x-ovú, resp. y-ovú os pre $i = 1, 2, \ldots, n = |M|$. Dĺžka i-tej úsečky je podľa Pytagorovej vety $\sqrt{p_i^2 + q_i^2}$ a zo zadania

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i^2 + q_i^2} < \sqrt{2}. \tag{1}$$

Dĺžky p_i, q_i sú nezáporné a použitím AK-nerovnosti pre dvojice (p_i, q_i) dostaneme

$$S(x)+S(y) = \sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n}(p_i+q_i) \overset{AK}{\leqq} \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{\frac{p_i^2+q_i^2}{2}} = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_i^2+q_i^2} \overset{(1)}{<} 2. \tag{2}$$

Pretože $S(x) = S(y)$, dostávame $S(x) = S(y) < 1$. Označme si teraz myslene $X_1, X_2, \ldots, X_n$, resp. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ intervaly priemetov jednotlivých úsečiek množiny M na takto zvolené osi x, resp. y. Transformujme teraz napríklad interval $X_i = \langle a, b\rangle$ na interval $x_i = \langle \{a\}, \{b\}\rangle$, pričom $\{z\}$ označuje necelú časť reálneho čísla z. Takto dosiahneme, že bude platiť

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}: \quad x_i \subseteq \langle 0, 1\rangle, \text{ aj } y_i \subseteq \langle 0, 1\rangle.$$

Uvažujme ich zjednotenie (x_i a x_j nemusia byť vždy disjunktné)

$$X = x_1 \cup x_2 \cup \cdots \cup x_n \subseteq \langle 0, 1\rangle,$$
$$Y = y_1 \cup y_2 \cup \cdots \cup y_n \subseteq \langle 0, 1\rangle.$$

Z (2) vieme, že dĺžka zjednotenia intervalov v X ($= S(x)$) aj v Y ($= S(y)$) je menšia ako 1, preto existujú také intervaly $\langle x_0, x_1\rangle \subseteq \langle 0, 1\rangle$, resp. $\langle y_0, y_1\rangle \subseteq \langle 0, 1\rangle$, ktoré sú disjunktné s množinami intervalov X, resp. Y. Už je asi jasné, že ak zvolíme ľubovoľne $O_{xy} = (a, b)$ tak, aby $a \in \langle x_0, x_1\rangle$ a $b \in \langle y_0, y_1\rangle$ (ktorých je nekonečne veľa, lebo tieto intervaly sú nenulovej dĺžky), nájdeme vyhovujúcu jednotkovú mriežku.

5.3 (Podľa *Andreja Osuského*.) Tvrdenie dokážeme sporom. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že pre nejaké čísla platí

$$M^2 \leqq a < b < c < d < (M+1)^2 \quad \text{a} \quad \underline{ad = bc}. \tag{1}$$

Označme $e = b - a$, $f = d - c$ a dosaďme toto do (1). Dostaneme

$$(b-e)\,d = b\,(d-f) \implies \underline{de = bf} \implies f = \frac{ed}{b} \implies f > e \implies \underline{f \geqq e+1}. \tag{2}$$

Zo vzťahu pre d v (2) máme

$$d \overset{(2)}{=} \frac{bf}{e} \overset{(2)}{\geqq} \frac{b\,(e+1)}{e} = \frac{(a+e)(e+1)}{e} \overset{(i)}{\geqq} \frac{(M^2+e)(e+1)}{e} = \frac{M^2e + M^2 + e + 1}{e} =$$
$$= \frac{M^2e + 2Me + e + M^2 - 2Me + 1}{e} = (M+1)^2 + \frac{(M-e)^2}{e} \overset{(i)}{\geqq} (M+1)^2.$$

Aby platilo $d \leqq (M+1)^2$ (zrejme okamžite musí byť $d = (M+1)^2$), musí vo všetkých nerovnostiach nastať rovnosť. To ale znamená, že

$$\left.\begin{aligned} a &\overset{(i)}{=} M^2 \\ e &\overset{(ii)}{=} M \\ b &= a + e \end{aligned}\right\} b = M\,(M+1), \quad c \overset{(1)}{=} \frac{ad}{b} = M\,(M+1) = b.$$

Dospeli sme teda k tomu, že jediná možnosť, ako splniť podmienky úlohy, je voliť čísla tak, aby $b = c$. Túto možnosť sme ale v úvode zakázali. Tým je dôkaz ukončený.

5.4 Najprv dokážeme, že pre $n = m^{m^{m+2}}$ ľubovoľné rozdelenie danej množiny na dve časti spĺňa podmienky zadania. Postupujme sporom. Predpokladajme, že by existovalo také delenie danej množiny na dve disjunktné podmnožiny, označme ich $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

Nech $m \in \mathcal{A}$, potom $m^m \in \mathcal{B}$ (lebo inak by voľba $a = b = m \in \mathcal{A}$ odporovala našej voľbe dôkazu sporom). Podobne pre $m^{\left(m^{m+1}\right)} = (m^m)^{m^m} \in \mathcal{A}$ (inak by opäť odporovala možnosť $a = b = m^m \in \mathcal{B}$), a teda $m^{m+1} \in \mathcal{B}$ ($a = m$, $b = m^{m+1} \in \mathcal{A}$). Napokon číslo $m^{m^{m+2}} = \left(m^{m^{m+1}}\right)^m = (m^m)^{m^{m+1}}$ nemôže patriť množine $\mathcal{A}$ ($a = m$, $b = m^{m^{m+1}}$), ani $\mathcal{B}$ ($a = m^m$, $b = m^{m+1}$).

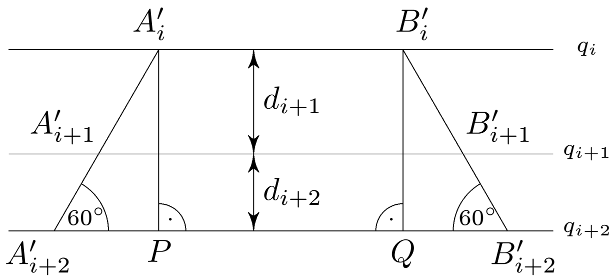
Teraz dokážeme, že pre $n \leqq m^{m^{m+2}}$ takéto rozdelenie existuje. Zrejme ak existuje pre $n = m^{m^{m+2}} - 1$, existuje aj pre menšie n, k vyriešeniu úlohu preto stačí uvažovať tento prípad. Voľbou rozdelenia

$$\mathcal{A} = \left\{m, m+1, \dots, m^m - 1, m^{m^{m+1}}, m^{m^{m+1}} + 1, \dots, m^{m^{m+2}} - 1\right\},$$
$$\mathcal{B} = \left\{m^m, \dots, m^{m^{m+1}} - 1\right\}$$

ľahko zistíme, že toto delenie spĺňa podmienky. Nájdené n je preto vyhovujúcim riešením úlohy.

5.5 (Podľa *Kataríny Quittnerovej*.) Označme si priamky množiny S ako $p_1, \dots, p_{n-1}$ a ich vzdialenosti od bodu C ako $a_1, \dots, a_{n-1}$ tak, že čísla a_j sú zoradené v rastúcom poradí. Ďalej si označme priesečníky priamky p_j s ramenom AC (resp. BC) ako A_j (resp. B_j) a bez ujmy na všeobecnosti nech výška v trojuholníka ABC je rovná 1. Potom pre obsahy trojuholníkov $A_jB_jC_j$ platí $S_{A_jB_jC_j} = j/n \cdot S_{ABC}$, keďže obsahuje j z n rovnako veľkých častí celého trojuholníka ABC a teda koeficient ich podobnosti je

$$a_j = \frac{a_j}{v} = \sqrt{\frac{S_{A_jB_jC_j}}{S_{ABC}}} = \sqrt{\frac{j}{n}}.$$



Obr. 95

Analogicky označme priamky množiny S' ako $q_1, \dots, q_{n-1}$ a ich vzdialenosti od bodu C ako $b_1, \dots, b_{n-1}$. Priesečníky s AC (resp. BC) označme A'_i (resp. B'_i). Označme si $x_{i+1} = \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}}$ pomer vzdialeností d_{i+2} a d_{i+1} medzi priamkami q_{i+1} a q_{i+2}, q_i a q_{i+1} (obr. 95). Z rovnosti obvodov $(i+2)$-hého a $(i+1)$-vého útvaru dostávame

$$\begin{aligned}\underline{|A'_{i+1}B'_{i+1}|} + |A'_{i+2}B'_{i+2}| + |A'_{i+1}A'_{i+2}| + |B'_{i+1}B'_{i+2}| &= \\ = \underline{|A'_{i+1}B'_{i+1}|} + |A'_iB'_i| &+ |A'_iA'_{i+1}| + |B'_iB'_{i+1}| \\ |PQ| + 2|A'_{i+2}P| + 2|A'_{i+1}A'_{i+2}| &= |A'_iB'_i| + 2|A'_iA'_{i+1}|,\end{aligned}$$

využili sme pri tom rovnosť $|A'_{i+2}B'_{i+2}| = |PQ| + 2|A'_{i+2}P|$, a symetrie $|A'_{i+1}A'_{i+2}| = |B'_{i+1}B'_{i+2}|$, $|A'_iA'_{i+1}| = |B'_iB'_{i+1}|$. Ak do poslednej rovnosti dosadíme $|PQ| = |A'_iB'_i|$ a

$$2|A'_{i+2}P| = 2|A'_iA'_{i+2}|\cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2}|A'_iA'_{i+2}| = |A'_iA'_{i+1}| + |A'_{i+1}A'_{i+2}|,$$

dostávame rovnicu

$$\begin{aligned}|A'_iA'_{i+1}| + |A'_{i+1}A'_{i+2}| + 2|A'_{i+1}A'_{i+2}| &= 2|A'_iA'_{i+1}| \\ 3|A'_{i+1}A'_{i+2}| &= |A'_iA'_{i+1}|, \quad \text{z čoho} \qquad (1)\end{aligned}$$

$$x_{i+1} = \frac{d_{i+2}}{d_{i+1}} = \frac{1}{3}. \qquad (2)$$

Toto zrejme platí aj pre $i = 0$, kde akurát položíme $A'_0 = B'_0 = C$ a následne $|A'_0B'_0| = |PQ|$. Z (2) ďalej máme

$$1 = v = \sum_{i=0}^{n-1} d_i = d_0 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} d_0 == \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{n-1}} d_0 \Longrightarrow d_0 = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{3^n - 1}.$$

Potom si dokážeme vyjadriť b_j za pomoci n ako

$$\begin{aligned} b_j &= \sum_{i=0}^{j-1} d_i = d_0 \cdot \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{3^n - 1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^j}{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{3^{n-1}}{3^n - 1} \cdot \frac{3^j - 1}{2 \cdot 3^{j-1}} \\ &= \frac{(3^j - 1) \cdot 3^{n-j}}{3^n - 1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Keď sme si teraz vyjadrili aj a_j aj b_j, skúsme predpokladať spor s naším tvrdením. Nech teda existujú $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$ také, že $a_k = b_l$, t. j. podľa (3)

$$\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{(3^l - 1) \cdot 3^{n-l}}{3^n - 1} \Longleftrightarrow k \cdot (3^n - 1)^2 = n \cdot \left(3^l - 1\right)^2 \cdot 3^{2(n-l)}. \tag{4}$$

Zrejme $(3, 3^n - 1) = 1$. Potom, keďže platí (4), isto musí aj $3^{2(n-l)}$ deliť číslo k, a teda

$$k \geqq 3^{2(n-l)}. \tag{5}$$

Odhadneme najväčší spoločný deliteľ činiteľov

$$\begin{aligned} &(3^n - 1, 3^l - 1) = (3^n - 1 - (3^l - 1), 3^l - 1) = (3^l \cdot (3^{n-l} - 1), 3^l - 1) = \\ &(3^{n-l} - 1, 3^l - 1) \leqq 3^{n-l} - 1 < 3^{n-l}. \end{aligned} \tag{6}$$

Teda z toho vyplýva, že ak si číslo $(3^l - 1)^2$ zapíšeme ako súčin $(3^l - 1)^2 = ab$, kde $a \mid (3^n - 1)^2$ a zároveň $b \mid k$, podľa (6) $a < 3^{2(n-l)}$ a teda b vieme ohraničiť

$$(3^l - 1)^2 = ab < b \cdot 3^{2(n-l)} \Longrightarrow \left(\frac{3^l - 1}{3^{2(n-l)}}\right)^2 < b. \tag{7}$$

Čísla b a 3 sú nesúdeliteľné, obe delia číslo k a preto musí aj ich súčin $b \cdot 3^{2(n-l)}$ deliť číslo k. Zrejme potom

$$k \geqq b \cdot 3^{2(n-l)} \overset{(7)}{>} \left(3^l - 1\right)^2. \tag{8}$$

Po vynásobení (5) a (8) dostávame

$$\begin{aligned} (n-1)^2 \geqq k^2 \geqq 3^{2(n-l)} \cdot (3^l - 1)^2 = 3^{2n} \cdot \left(\frac{3^l - 1}{3^l}\right)^2 = 3^{2n} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^l}\right)^2 > \\ > 3^{2n} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 > 3^{2n} \cdot \frac{1}{3} = 3^{2n-1} > 3^{2n-2}, \\ n - 1 > 3^{n-1}, \end{aligned}$$

čo je zjavný spor (ľahko sa ukáže indukciou vzhľadom na n, že platí opačné tvrdenie), tým sme dospeli k sporu a zároveň k poznaniu, že skutočne množiny S, S' nemajú spoločnú priamku.

5.6 Matematickou indukciou ľahko dokážeme, že každá usporiadaná dvojica $(a,b) = (a_k, a_{k+1})$ je riešením rovnice $(a^2 + b^)/(ab+1) = m^2$. Opačnú implikáciu dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje riešenie (a,b), ktoré je rôzne od (a_k, a_{k+1}) pre všetky $k \in \mathbb{N}_0$. Uvažujme takú dvojicu (a,b), pre ktorú je $a+b$ minimálne. Také existuje vďaka tomu, že čísla a aj b sú nezáporné. Ukážme, že $(c,a) = (m^2a - b, a)$ je riešením s menším súčtom $a+c$, čo bude spor. Rozlíšime niekoľko prípadov.

(a) $a = 0$, potom $(a,b) = (0,m) = (a_0, a_1)$, čo je spor.

(b) $a = m$, potom $(a,b) = (m, m^3) = (a_1, a_2)$, čo je spor.

(c) $a = 1$, potom $b \geqq a = 1$ a $(b+1) \mid (b^2+1)$, ale aj $(b+1) \mid (b^2-1)$. Odtiaľ $(b+1) \mid (b^2+1) - (b^2-1) = 2$. Preto $b = 1$, odtiaľ dostaneme dosadením do zadania $m = 1$ a $(a,b) = (1,1) = (a_1, a_2)$, spor.

(d) $2 \leqq a < m$. Z rovnice zo zadania máme

$$b^2 - m^2ab + a^2 - m^2 = 0.$$

Teda $t = b$ je koreňom kvadratickej rovnice

$$t^2 - m^2at + a^2 - m^2 = 0. \tag{1}$$

Preto diskriminant $m^4a^2 + 4m^2 - 4a^2$ tejto rovnice musí byť štvorcom celého čísla (pretože inak by číslo b bolo iracionálne – odmocnina z celého čísla je buď číslo prirodzené, alebo číslo iracionálne). Zároveň však platí

$$(m^2a+1)^2 = m^4a^2 + 2m^2a + 1 \overset{a \geqq 2}{>} m^4a^2 + 4m^2 - 4a^2 \overset{m>a}{>} (m^2a)^2.$$

To znamená, že $m^4a^2 + 4m^2 - 4a^2$ nemôže byť štvorcom celého čísla, táto možnosť nemôže nastať.

(e) $a > m$. Analogicky aj v tomto prípade je $t = b$ koreňom (1). Ľahko overíme, že aj $t = m^2a - b = c$ je koreňom tejto rovnice. Využitím Viètových vzťahov pre kvadratickú rovnicu (1) dostávame $bc = a^2 - m^2 > 0$. Pretože b je nezáporné, platí $b > 0$ a tak využitím predchádzajúcej rovnosti dostaneme $c > 0$. Z predpokladov $a > 0$ a $c > 0$ potom máme (pretože c je koreňom rovnice (1))

$$\frac{c^2 + a^2}{ca+1} = m^2.$$

Z toho, že $c > 0$, $b \geqq a$ a $bc = a^2 - m^2 < a^2$, máme $c < a$. Odtiaľ máme, že (c,a) je vyhovujúca dvojica (pretože $c + a < a + b$). Táto dvojica ale nemôže byť tvaru (a_n, a_{n+1}), lebo potom by platilo

$$(a,b) = (a_{n+1}, m^2a_{n+1} - a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_{n+2}),$$

čo je v spore s predpokladom, že dvojica (a, b) nie je tvaru (a_k, a_{k+1}) pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$. Preto ani dvojica (a, c) nie je tvaru (a_k, a_{k+1}) pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$, ale má menší súčet zložiek $(a + c)$, čo je opäť spor s výberom dvojice (a, b), presnejšie povedané, s minimalitou súčtu $a + b$.

Dostali sme spor, náš predpoklad bol nesprávny. Znamená to, že platí tvrdenie zo zadania.

5.7 (Podľa *Kataríny Quittnerovej*.) Najskôr ukážeme, že sa pre $n \leqq 4$ nevieme dostať z bodu $[0, \dots, 0]$ do bodu $[1/4, 0, \dots, 0]$. Keďže priestory $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sú podpriestormi priestoru $\mathbb{R}^4$, tak toto tvrdenie je triviálnym dôsledkom tohto istého tvrdenia pre $n = 4$. Stačí nám teda dokázať, že sa v $\mathbb{R}^4$ nevieme dostať z bodu $[0, 0, 0, 0]$ do bodu $[1/4, 0, 0, 0]$.

Postupujme sporom. Nech existuje k-členná postupnosť jednotkových vektorov

$$\left\{\left(\frac{p_i}{q_i}, \frac{r_i}{s_i}, \frac{t_i}{u_i}, \frac{v_i}{w_i}\right)\right\}_{i=1}^{k}$$

takých, že

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q_i} = \frac{1}{4},$$

pričom pre všetky $i \in \{1, \dots, k\}$ sú p_i, r_i, t_i, v_i celé a q_i, s_i, u_i, w_i prirodzené čísla a navyše $nsn(p_i, q_i) = nsn(r_i, s_i) = nsn(t_i, u_i) = nsn(v_i, w_i) = 1$. Keďže existuje celé číslo p, pre ktoré platí

$$\frac{p}{nsn(q_1, \dots, q_k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i}{q_i} = \frac{1}{4},$$

po úprave $nsn(q_1, \dots, q_k) = 4p$, tak $nsn(q_1, \dots, q_k)$ je deliteľné číslom 4. Pre nejaké $j \in \{1, \dots, k\}$ je teda q_j deliteľné číslom 4 a pre prislúchajúce p_j potom $nsn(4, p_j) = 1$. Dĺžka zodpovedajúceho vektora je 1, preto platí

$$\frac{p_j^2}{q_j^2} + \frac{r_j^2}{s_j^2} + \frac{t_j^2}{u_j^2} + \frac{v_j^2}{w_j^2} = 1$$
$$p_j^2 s_j^2 u_j^2 w_j^2 + r_j^2 q_j^2 u_j^2 w_j^2 + t_j^2 q_j^2 s_j^2 w_j^2 + v_j^2 q_j^2 s_j^2 u_j^2 = q_j^2 s_j^2 u_j^2 w_j^2.$$

Celú rovnicu teraz vydelíme najväčším číslom tvaru 2^m, ktorým je deliteľný každý z jej piatich členov. Keďže 2 nedelí p_j^2 a q_j^2 je deliteľné 16-timi, rovnicu sme vydelili maximálne toľkými dvojkami, koľkými je deliteľné číslo $s_j^2 u_j^2 w_j^2$ a pravá strana nám ostala deliteľná číslom 16, čiže po delení 8-imi bude mať zvyšok 0. Na ľavej strane sme dostali aspoň jedno nepárne číslo (inak by to bol spor s maximálnosťou m) a toto číslo bude mať po delení 8-imi zvyšok 1. Zvyšné tri členy nech dávajú po delení 8-imi zvyšky z_1, z_2, z_3. Číslo m bolo určite párne, lebo všetky členy boli druhými mocninami celých čísel, čiže aj po vydelení sú všetky členy druhými mocninami celých čísel. Platí teda $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, 4\}$ a

$$z_1 + z_2 + z_3 + 1 \equiv 0 \pmod 8,$$

čo zjavne nemá riešenie. Tým dostávame vytúžený spor.

Pre $n \geqq 5$ nájdeme spôsob, ako sa posunúť o vektor $(1/\ell, 0, \dots, 0)$ pre ľubovoľné prirodzené číslo ℓ. Analogicky sa potom budeme vedieť posunúť o ľubovoľný vektor $(0, \dots, 0, 1/\ell, 0, \dots, 0)$. Z týchto posunutí už zrejme budeme vedieť v konečnom počte krokov poskladať posunutie o ľubovoľný racionálny vektor a z každého bodu P sa budeme vedieť dostať do každého iného bodu z P.

Pre $\ell = 1$ je naše tvrdenie zrejmé, ďalej nech $\ell \geqq 2$. Podľa Lagrangeovej vety o štyroch štvorcoch sa dá každé prirodzené číslo napísať ako súčet štyroch štvorcov celých čísel. Aj $(2\ell)^2 - 1$ je prirodzené číslo, preto existujú celé čísla a, b, c, d také, že platí

$$\begin{aligned}(2\ell)^2 - 1 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2\\ 1 &= \left(\frac{1}{2\ell}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\ell}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\ell}\right)^2 + \left(\frac{c}{2\ell}\right)^2 + \left(\frac{d}{2\ell}\right)^2.\end{aligned}$$

Čiže sa vieme posunúť o vektor

$$(\frac{1}{2\ell}, \frac{a}{2\ell}, \frac{b}{2\ell}, \frac{c}{2\ell}, \frac{d}{2\ell}, 0, \dots, 0)$$

podobne ako aj o vektor

$$(\frac{1}{2\ell}, -\frac{a}{2\ell}, -\frac{b}{2\ell}, -\frac{c}{2\ell}, -\frac{d}{2\ell}, 0, \dots, 0)$$

a aj o ich súčet $(1/\ell, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na IMO, príp. IOI, sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojim záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Bratislavský korešpondenčný matematický seminár — BKMS

Tento KS bol organizovaný študentmi FMFI UK v Bratislave zväčša bratislavského pôvodu. Série bývali tematicky zamerané a obsahovali niekedy aj veľmi náročné úlohy. Okrem seminára SK MO sa práve tento najviac venoval príprave na MO v kategórii A. Sústredenia s pestrou celoslovenskou účasťou a takmer vždy aj so vzorkou „zahraničného“ účastníka z ČR mávali asi najbohatší matematický program. Od budúceho ročníka bude BKMS spolupracovať so seminárom SKMS pod názvom Korešpondenčný matematický seminár (KMS).

BKMS
KATČ FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: bkms@pobox.sk
URL: http://kms.sturak.sk

Stredoslovenský korešpondenčný matematický seminár — SKMS

Tento KS bol posledné roky organizovaný skupinou študentov FMFI UK v Bratislave pochádzajúcich prevažne zo stredného, príp. východného Slovenska. Bol pokračovateľom tradície stredoslovenských KS organizovaných v minulosti zo Žiliny a Banskej

Bystrice. Pre túto súťaž bol charakteristický nízky vekový priemer riešiteľov, súťažné úlohy mali blízko ku kategórii B alebo C. Od budúceho ročníka bude SKMS spolupracovať so seminárom BKMS pod názvom Korešpondenčný matematický seminár (KMS).

SKMS
KZDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: skms@host.sk
URL: http://kms.sturak.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. Riešiteľskú základňu má na východnom Slovensku. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. V posledných rokoch ho pomáhali organizovať najmä študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
040 01 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na IOI, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov FMFI UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú na jar a na jeseň.

KSP
KVI FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

RNDr. Karel Horák, CSc. – Mgr. Vladimír Koutný
Mgr. Peter Novotný – Mgr. Michal Forišek
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. – Tomáš Jurík – Mgr. Ján Špakula
Úlohová komisia MO

**Päťdesiatyprvý ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách**

Sadzbu programom $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX a LATEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný a Mgr. Peter Novotný
Zostavil: Mgr. Vladimír Koutný
Grafická úprava obálky: Mgr. Vladimír Koutný
Neprešlo jazykovou úpravou
Vydal: Iuventa, Bratislava, 2004
Náklad: 500 ks

ISBN 80–8072–023–1