53. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

Správa o riešení úloh zo súťaže konanej v školskom roku 2003/2004

45. MEDZINÁRODNÁ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
16. MEDZINÁRODNÁ OLYMPIÁDA V INFORMATIKE

S pomocou spolupracovníkov spracovali
doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., Mgr. Michal Forišek, RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný, Ján Mazák, Mgr. Peter Novotný
a členovia Úlohovej komisie MO.

ISBN 80–8072–038–X

Obsah

O priebehu 53. ročníka matematickej olympiády

Matematická olympiáda (MO) je najstaršia a najmasovejšia postupová intelektuálna súťaž žiakov základných a stredných škôl v SR. Vyhlasovateľom tejto súťaže je Ministerstvo školstva Slovenskej republiky (MŠSR) v spolupráci s Jednotou slovenských matematikov a fyzikov (JSMF). V školskom roku 2003/04 sa uskutočnil už 53. ročník MO.

Súťaž riadila Slovenská komisia matematickej olympiády (SK MO) a začala pracovať v nasledovnom zložení:

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., F-PEDaS ŽU Žilina, predseda,
RNDr. Oliver Ralík, CSc., FPV UKF Nitra, podpredseda A,
RNDr. Andrej Blaho, FMFI UK Bratislava, podpredseda P,
RNDr. Monika Dillingerová, PhD., FMFI UK Bratislava, podpredseda Z,
doc. RNDr. Gabriela Andrejková, CSc., PF UPJŠ Košice,
Mgr. Michal Forišek, FMFI UK Bratislava,
prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc., FPV UKF Nitra,
Mgr. Vladimír Koutný, FMFI UK Bratislava,
Mgr. Miroslava Smitková, IUVENTA Bratislava,
doc. RNDr. Božena Mihalíková, CSc., PF UPJŠ Košice,
prof. RNDr. Jozef Moravčík, CSc., FPV ŽU Žilina,
doc. RNDr. Vladislav Rosa, CSc., Slovenská štátna inšpekcia,
RNDr. Zuzana Frková, Gymnázium Grösslingová Bratislava, predseda KKMO BA,
doc. RNDr. Mária Lucká, CSc., PF TU Trnava, predseda KKMO TT,
prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc., FPV UKF Nitra, predseda KKMO NR,
RNDr. Soňa Pavlíková, CSc., MTF STU Dubnica nad Váhom, predseda KKMO TN,
doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., F-PEDaS ŽU Žilina, predseda KKMO ZA,
RNDr. Eva Oravcová, Gymnázium J. G. T. Banská Bystrica, predseda KKMO BB,
RNDr. Tomáš Madaras, PhD., PF UPJŠ Košice, predseda KKMO KE,
Mgr. Milan Demko, PhD., PedF PU Prešov, predseda KKMO PO.

Keď som bol v júni 2001 poverený ministrom školstva viesť túto súťaž, jedným z cieľov, ktoré som si vytýčil, bolo omladenie štábu ľudí, ktorí sa starajú o MO. A tak členmi SK MO sa postupne stali

Juliana Lipková, študentka FMFI UK Bratislava,
Ján Mazák, študent FMFI UK Bratislava,
Mgr. Peter Novotný, FMFI UK Bratislava,
Martin Potočný, študent FMFI UK Bratislava.

*

Býva zvykom v Ročenke sa venovať len jednému ročníku, ale v tomto prípade musím spraviť výnimku, aby čitateľ mal možnosť sledovať vývoj udalostí. Ako predseda SK MO som sa od jesene 2001 začal zúčastňovať zasadnutí Koordinačnej rady súťaží (KOR), ktorá by mala koordinovať všetky súťaže podobného typu, najmä FO, ChO, BiO, GeO, Olympiádu cudzích jazykov (OCJ), Olympiádu ľudských práv (OĽP), Turnaj mladých fyzikov (TMF) a Pytagoriádu (Pyt). Na jar roku 2002 som tak objavil prísne utajovaný fakt, že prideľovanie financií na jednotlivé súťaže sa dialo bez akýchkoľvek pravidiel, pričom podstatnú úlohu hralo s najväčšou pravdepodobnosťou zákulisné lobovanie (čísla, ktoré budú toto dokazovať, sú uvedené ďalej).

Je treba si uvedomiť, že pod firemnou skratkou **MO** sa skrýva najstaršia súťaž tohto typu u nás, ktorá sa v dôsledku snahy veľkého množstva našich význačných predchodcov o čo najlepšie výsledky rozrástla na striktnú viackolovú súťaž s množstvom kategórií **Z4**, **Z5**, **Z6**, **Z7**, **Z8**, **Z9** pre základné školy a **C**, **B**, **A** pre stredné školy. Špičku ľadovca tvorí Medzinárodná matematická olympiáda (**IMO**), z ktorej našich 6 žiakov pravidelne vozí medaily. To ale nie je všetko. Pod skratkou MO sa – ako kategória **P** – skrýva v podstate samostatná súťaž Informatická olympiáda, ktorej vrcholom je Medzinárodná informatická olympiáda (**IOI**), ale koná sa aj Stredoeurópska informatická olympiáda (**CEOI**). Na oboch týchto súťažiach patria naši žiaci k najlepším. Za všetky čísla v tejto chvíli len toľko, že štvorice žiakov SR na doterajších jedenástich IOI od vzniku SR získali 42 medailí zo 44 možných. K takejto úspešnosti majú iné súťaže veľmi ďaleko.

Finančne bola teda MO mimoriadne poddimenzovaná a už v Zborníku zjazdu JSMF v roku 2002 v Nitre som písal o tom, že trvalé udržanie kvality nemôže byť založené len na entuziazme ľudí. Na KOR však nestačilo tieto fakty len pripomenúť kolegom – predsedom ďalších súťaží, pretože išlo o peniaze; všetci boli proti prerozdeleniu. Tak som začal bojovať a biť na poplach na všetkých možných fórach – na MŠSR, v médiách, na konferenciách, ale nepomohlo to.

Pre ďalší školský rok 2002/2003, teda pre 52. ročník MO, bolo napriek mojím argumentom uplatnené „zvykové právo“ zo strany vtedajšieho GR IUVENTY, ktorý si z neznámych príčin – ale zrejme so súhlasom predošlej KOR – prisvojil právo rozdeľovať peniaze, ktoré neboli jeho. Mohol tak urobiť, lebo mnohým súťažiam to vyhovovalo. Takže rozdelenie peňazí pre 52. ročník bolo veľmi podobné tomu predošlému. Pridelené sumy boli navyše tak šikovne utajené, že ako predseda SK MO som sa ich navzdory deklaráciám o transparentnosti jednania v KOR dozvedel až v júni 2003. Naviac vznikol stav, že IUVENTA v septembri 2003 nebola schopná platiť ani najnutnejšie výdavky (tunel?), a pre MO sa tak dostalo len 70% „pridelených“ peňazí.

Vzhľadom na mimoriadne nízke financie na celoštátne akcie MO nebolo možné dať ľuďom žiadne slušné odmeny (v roku 2003 skoro žiadne), a keďže tento stav pretrvával už z minulého obdobia, mnohí strácali chuť do práce. Proste – entuziazmus nevydrží večne. Na 35. konferencii slovenských matematikov v Jasnej som o situácii podrobne informoval [**Správa (o konci?) matematickej olympiády.** *Zborník 35. konferencie slovenských matematikov*, Jasná pod Chopkom 2003, 29-36] a prosil matematickú komunitu o pomoc. Reálnej pomoci som sa však, bohužiaľ, nedočkal. Keďže normálne argumenty nepomáhali, začal som aj ja s kuloárnou prácou a podarilo sa mi vyprovokovať mimoriadne zasadnutie KOR, ktoré sa uskutočnilo **12. 12. 2003** na MŠSR. Je to významné dátum pre MO v SR. Po mnohých hodinách veľmi ostrého a vecného rokovania sa mi podarilo presadiť rozdelenie financií podľa práce odvedenej pri organizovaní celoštátnych akcií, pričom sa už neprideľovala suma peňazí, ale práca bola vyjadrená v percentách. Po únavnom rokovaní bolo pomerom hlasov 9:0 schválené nasledovné rozdelenie (v zátvorke sú % z predošlých rokov):

MO	**22,5** %	(12,32 %)
FO	**11,5** %	(7,44 %)
ChO	**16,0** %	(17,77 %)
BiO	**13,0** %	(16,71 %)
GeO	**10,5** %	(11,87 %)
OCJ	**12,5** %	(25,30 %)
OĽP	**6,5** %	(3,74 %)
TMF	**3,4** %	(1,87 %)
Pyt	**4,1** %	(2,98 %)

Asi nie je dosť dobre možné nájsť absolútne spravodlivé rozdelenie, ale takéto rozdelenie určite oveľa objektívnejšie vystihuje skutočne odvedenú prácu. Stojí za to pozorne si pozrieť proporcie rozdelenia pred a po 12. 12. 2003. Spolu s matematikou išli hore aj *spriaznené* súťaže: FO o vyše 54%, TMF takmer na dvojnásobok a Pytagoriáda o viac ako tretinu. Zvýšené množstvo financií umožnilo v 53. ročníku MO usporiadať ďalšie sústredenia úspešných riešiteľov, a tie vždy prispejú ku zvýšeniu kvality. Umožnilo však aj rozdeliť oveľa slušnejšie odmeny a pritiahnuť k práci v MO (výstižnejšie by bolo: udržať pri práci pre MO) nemálo mladých ľudí. Pevne verím, že nástup mladých bude pokračovať. **Aj touto cestou ďakujem všetkým, ktorí vytrvali aj v ťažkých časoch.** (V čase zostavovania tejto Ročenky je známe, že rozdelenie financií pre 54. ročník je podobné 53. ročníku. Máme teda nádej, že zapustí korene takéto spravodlivejšie *zvykové právo*.)

*

Organizačná štruktúra súťaže sa nezmenila. Podarilo sa uskutočniť všetky plánované akcie, a vzhľadom na väčší objem peňazí aj niektoré navyše. Poznamenajme, že zásadný význam pri tejto súťaži má tvorba úloh; v tejto oblasti stále udržujeme výbornú a obojstranne prospešnú spoluprácu s českými priateľmi. Ako obvykle, májové pracovné zasadnutie spoločných úlohových komisií bolo v Žiline, novembrové v Bílovci. Celoštátne kolo MO (CKMO) v kategóriách A aj P usporiadala KKMO Trenčín pod vedením svojej predsedkyne RNDr. Soni Pavlíkovej, CSc. vo veľmi peknom prírodnom prostredí na chate Odevák v Kubrici, takže súťažiaci mali postarané o kľud pri práci. K úspešnému priebehu výrazne prispela aj Mgr. Miroslava Smitková z IUVENTY. V mene SK MO obom dámam za odvedenú prácu ďakujem. Po CKMO sa v oboch kategóriách A aj P uskutočnili veľmi náročné výberové sústredenia, po ktorých vznikli reprezentačné družstvá. Tieto potom absolvovali v rámci prípravy na 45. IMO, 16. IOI a 11. CEOI aj tréningové sústredenie a súťažné trojstretnutie ČR-Poľsko-SR. Viac o týchto akciách a tiež o korešpondenčných seminároch nájde záujemca v samostatných kapitolách tejto Ročenky. Už teraz však uveďme aspoň niektoré z mnohých zaujímavých internetových stránok:

http://matematika.webpark.sk – archív zadaní, poradí a riešení MO,
http://pppnnn.webpark.sk/mo.htm – aktuálne dokumenty, najmä pre žilinský kraj,
http://kms.sk/mo – informácie o MO na stránkach korešpondenčného seminára,

http://ksp.sk/mop – aktuálne informácie a archív pre kategóriu P,
http://home.pf.jcu.cz/~mo – česká stránka o MO,
http://imo.math.ca – informácie o medzinárodných matematických olympiádach,
http://www.ioinformatics.org – stránka medzinárodných informatických olympiád.

Pretože Ročenka je v podstate len o celoštátnych akciách, nie je tu spomínaná práca obrovského počtu ľudí, ktorí sa starajú o MO na školách, v oblastiach a krajoch. Bez nich by to však nešlo a práve financovanie na tých úrovniach by bolo ešte dobré vyriešiť. Keďže to v tejto chvíli nie je v mojich silách, dovolím si im aspoň touto cestou poďakovať.

Vojtech Bálint

Výsledky celoštátneho kola, kategória A

Víťazi

1.	Jozef BODNÁR	3 G N. padlých hrdinov, Fiľakovo	7	7	7	7	7	7	42
	Ondrej BUDÁČ	2 G B. S. Timravy, Lučenec	7	7	7	7	7	7	42
	Tomáš VÁŇA	4 G M. R. Štefánika, Žiar n/H.	7	7	7	7	7	7	42
4.	František SIMANČÍK	3 G Grösslingová, Bratislava	7	7	7	7	4	7	39
5.	Peter ČERNO	3 G Ľ. Štúra, Trenčín	6	2	7	7	7	7	36
6.	Hana BUDÁČOVÁ	4 G B. S. Timravy, Lučenec	7	3	7	7	4	7	35
7.	Daniel BOŽÍK	3 G Jura Hronca, Bratislava	6	7	7	7	5	1	33
	Tamás MÉSZÁROS	3 G M. Fazekasa, Budapešť	7	0	7	7	5	7	33
	Martin MOLNÁR	4 G A. Vrábla, Levice	1	7	7	7	6	5	33
10.	Rastislav LENHARDT	4 G Jura Hronca, Bratislava	6	7	3	7	7	2	32

Ďalší úspešní riešitelia

11.	Marek JANČUŠKA	4 G Párovská, Nitra	7	0	7	4	6	7	31
12.	Jaroslav KNEBL	2 G A. Bernoláka, Námestovo	1	1	7	7	7	7	30
	Michal SUDOLSKÝ	1 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	2	7	6	7	6	2	30
14.	Stanislava SOJÁKOVÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	3	7	0	7	7	5	29
15.	Tomáš OSIČKA	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	7	7	6	1	4	3	28
	Miroslav ŠTOLC	4 G Párovská, Nitra	7	4	0	7	7	3	28
17.	István ESTÉLYI	2 G Z. Kodálya, Galanta	3	7	0	7	6	4	27
	Jakub IMRIŠKA	2 G Jura Hronca, Bratislava	2	7	3	6	7	2	27
	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	4 G Konštantínova, Prešov	7	1	2	7	7	3	27
	Sámuel PERES	4 G Á. Vámbéryho, D. Streda	4	4	5	7	4	3	27

Ostatní riešitelia

21.	Szilvia BAGÓCSI	4 G H. Selyeho, Komárno	6	7	2	3	7	1	26
	Róbert PATHÓ	4 G Adyho, Štúrovo	1	2	4	7	5	7	26
23.	Lenka KOVALČINOVÁ	3 G Poštová, Košice	6	1	0	7	4	7	25
24.	Andrej BORSUK	2 G Grösslingová, Bratislava	7	7	1	7	2	0	24
	Michal ĎURIŠ	3 G Grösslingová, Bratislava	6	0	0	7	4	7	24
26.	Róbert BIRKUS	4 G Z. Kodálya, Galanta	7	7	0	7	1	1	23
	Michal KESELY	3 G Jura Hronca, Bratislava	2	7	0	6	7	1	23
	Peter PEREŠÍNI	2 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	4	7	3	2	5	2	23

29.	Lukáš POLÁČEK	4 G K. Štúra, Modra	2	7	0	7	5	1	22
31.	Ivana HLAVATÁ	3 G Jura Hronca, Bratislava	5	1	0	7	2	4	19
	Lucia KOMENDOVÁ	4 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	2	3	7	3	0	4	19
	Ľubomír NOVÁK	2 G Jura Hronca, Bratislava	2	7	0	2	4	4	19
	Michal TAKÁCS	2 G J. G. Tajovského, B. Bystrica	3	7	0	1	4	4	19
34.	László FEKETE	4 G H. Selyeho, Komárno	5	7	0	2	2	2	18
	Peter ŠEPITKA	3 G V. P. Tótha, Martin	7	2	1	0	1	7	18
36.	Michal PRUSÁK	2 G J. A. Raymana, Prešov	6	1	0	7	1	0	15
37.	Jana PODSTUPKOVÁ	4 G Grösslingová, Bratislava	4	0	2	7	1	0	14
38.	Jakub KOVÁČ	4 G Jura Hronca, Bratislava	1	1	1	1	5	4	13
	Tomáš MÁNIK	4 G B. S. Timravy, Lučenec	2	4	0	7	0	0	13
40.	Rastislav OĽHAVA	2 G Alejová, Košice	3	0	3	2	3	1	12

Úspešnosť jednotlivých úloh je zaznamenaná v tabuľke.

Počet bodov	**Spolu**	**Číslo úlohy**					
		1.	2.	3.	4.	5.	6.
7 bodov	98	13	21	12	27	12	13
6 bodov	15	7	0	2	2	4	0
5 bodov	11	2	0	1	0	6	2
4 body	22	3	3	1	1	8	6
3 body	17	4	2	4	2	1	4
2 body	25	7	3	3	4	3	5
1 bod	26	4	6	3	3	4	6
0 bodov	26	0	5	14	1	2	4
Priemer	4,36	4,63	4,43	3,15	5,55	4,58	3,83

Výsledky celoštátneho kola, kategória P

	Víťazi							
1.	Marek LUDHA	4 G J.G.Tajovského B. Bystrica	9	8	8	8	7	40
	Peter PEREŠÍNI	2 G J.G.Tajovského B. Bystrica	6	8	8	8	10	40
3.	František SIMANČÍK	3 G Grösslingová Bratislava	9	8	8	10	1	36
4.	Miroslav BALÁŽ	4 G Jura Hronca Bratislava	9	10	4	10	1	34
5.	Jakub TEKEĽ	4 G Jura Hronca Bratislava	4	5	8	5	10	32
6.	Marek JANČUŠKA	4 G Párovská, Nitra	10	5	7	8	0	30
	Ďalší úspešní riešitelia							
7.	Miroslav CICKO	3 G J.G.Tajovského B. Bystrica	8	8	7	3	1	27
	Jakub KOVÁČ	4 G Jura Hronca Bratislava	10	8	5	3	1	27
9.	Anton ŠTEFANEK	4 G Jura Hronca Bratislava	8	8	9	0	1	26
10.	Jakub IMRIŠKA	2 G Jura Hronca Bratislava	10	8	4	0	3	25
	Michal NÁNÁSI	3 G Jura Hronca Bratislava	9	6	3	4	3	25
	Michal POLÁČIK	4 G Laca Novomeského Bratislava	10	5	8	0	2	25
13.	Stano BUŠTOR	3 G Jura Hronca Bratislava	1	7	8	0	8	24
	Lukáš POLÁČEK	4 G Karola Štúra Modra	6	5	6	0	7	24
	Ostatní riešitelia							
15.	Michal ČERMÁK	4 G Jura Hronca Bratislava	9	6	4	0	4	23
	Peter ČERNO	3 G Ľudovíta Štúra Trenčín	8	5	9	0	1	23
	Andrej MIKULÍK	4 G Grösslingová Bratislava	6	6	3	1	7	23
18.	Tomáš LABUDA	4 G Grösslingová Bratislava	6	7	3	0	6	22
19.	Marek ZEMAN	3 G Jura Hronca Bratislava	8	5	0	0	8	21
20.	Martin REJDA	4 G Grösslingová Bratislava	6	7	2	1	3	19
21.	Rastislav LENHARDT	4 G Jura Hronca Bratislava	1	3	9	0	5	18
22.	Ondrej BUDÁČ	2 G Haličská, Lučenec	7	3	7	0	0	17
23.	Michal DZETKULIČ	3 G Pavla Horova Michalovce	1	4	3	0	8	16
	Peter GLAUS	4 G Jura Hronca Bratislava	4	6	2	0	4	16
25.	Dana SMAŽÁKOVÁ	4 G Jura Hronca Bratislava	5	8	2	0	0	15
26.	Marek BERNÁT	4 G Karola Štúra Modra	6	4	3	0	1	14
	Michal KEVICKÝ	4 G Grösslingová Bratislava	6	8	0	0	0	14
28.	Michal REPOVSKÝ	4 G Komenského Trebišov	1	6	3	0	0	10

Výsledky krajských kôl

Z príslušného kraja a v príslušnej kategórii A, B, C, P a Z9 sú uvedení všetci, resp. aspoň prvých 10 úspešných riešiteľov. Gymnáziá so zameraním na matematiku, študijný odbor 01, sú tieto:

Gymnázium Grösslingová, Bratislava,
Gymnázium Párovská, Nitra,
Gymnázium Veľká Okružná, Žilina,
Gymnázium J. G. Tajovského, Banská Bystrica,
Gymnázium Alejová, Košice,
Gymnázium Poštová, Košice.

Kraj Bratislava

Kategória A

1.	František SIMANČÍK	3 Gymnázium Grösslingová
2.	Jakub IMRIŠKA	2 Gymnázium Jura Hronca
3.	Daniel BOŽÍK	3 Gymnázium Jura Hronca
4.	Rastislav LENHARDT	4 Gymnázium Jura Hronca
5.	Michal KESELY	3 Gymnázium Jura Hronca
6.	Michal ĎURIŠ	3 Gymnázium Grösslingová
	Ivana HLAVATÁ	3 Gymnázium Jura Hronca
	Ľubomír NOVÁK	2 Gymnázium Jura Hronca
	Lukáš POLÁČEK	4 Gymnázium Modra
10.	Štefan GURSKÝ	3 Gymnázium Jura Hronca
	Stanislava SOJÁKOVÁ	3 Gymnázium Jura Hronca

Kategória B

1.	Jakub IMRIŠKA	Gymnázium Jura Hronca
2.	Ľubomír NOVÁK	Gymnázium Jura Hronca
3.	Oto MACKA	Gymnázium Grösslingová
	Jozef MINÁR	Gymnázium Grösslingová
5.	Andrej BORSUK	Gymnázium Grösslingová
	Samuel HAPÁK	Gymnázium Grösslingová
7.	Juraj MACKO	Gymnázium Grösslingová
8.	Petra BAKOŠOVÁ	Gymnázium Jesenského

9.	Lukáš VARGA	Gymnázium Grösslingová
	Grigorij MESEŽNIKOV	Gymnázium Jura Hronca
	Martina LIŠKOVÁ	Gymnázium Vazovova

Kategória C

1.	Michal SZABADOS	ŠpMNDaG Teplická
2.	Tomáš KOVAČOVSKÝ	Gymnázium Jura Hronca
	Martin PODOLÁK	Gymnázium Grösslingová
4.	Ladislav MARŠÍK	Gymnázium Grösslingová
	Katarína SMOLÁROVÁ	Gymnázium Grösslingová
6.	Peter FORMÁNEK	Gymnázium Vazovova
	Katarína POKORNÁ	Gymnázium Grösslingová
	Lucia SIMANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Marek ŠIPICKI	Gymnázium Grösslingová
	Filip VOJTKO	Gymnázium Grösslingová
	Jakub ZELMAN	Gymnázium Grösslingová

Kategória Z9

1.	Katarína HODÁKOVÁ	ZŠ Pezinok
	Katarína POKORNÁ	Gymnázium Grösslingová
3.	Alena KOŠINÁROVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Matúš KUKAN	ZŠ Bukovčana
	Lenka MATEJOVIČOVÁ	Gymnázium Grösslingová
6.	Katarína BURJANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Daniela HEŽELYOVÁ	Gymnázium Grösslingová
	Martin KOŠDY	ZŠ Batkova
	Lucia SIMANOVÁ	Gymnázium Grösslingová
10.	Tomáš KOČISKÝ	Gymnázium Grösslingová

Kategória P

1.	František SIMANČÍK	3 Gymnázium Grösslingová
2.	Miroslav BALÁŽ	4 Gymnázium Jura Hronca
	Jakub TEKEĽ	4 Gymnázium Jura Hronca
4.	Peter GLAUS	4 Gymnázium Jura Hronca
	Rastislav LENHARDT	4 Gymnázium Jura Hronca
6.	Michal CERMAK	4 Gymnázium Jura Hronca
7.	Jakub KOVÁČ	4 Gymnázium Jura Hronca
	Michal NÁNÁSI	3 Gymnázium Jura Hronca
	Lukáš POLÁČEK	4 Gymnázium Karola Štúra Modra
	Michal POLÁČIK	4 Gymnázium Laca Novomeského

11.	Marek ZEMAN	3 Gymnázium Jura Hronca
	Anton ŠTEFANEK	4 Gymnázium Jura Hronca
13.	Stano BUŠTOR	3 Gymnázium Jura Hronca
	Jakub IMRIŠKA	2 Gymnázium Jura Hronca
	Dana SMAŽÁKOVÁ	4 Gymnázium Jura Hronca
16.	Marek BERNÁT	4 Gymnázium Karola Štúra Modra
	Michal KEVICKÝ	4 Gymnázium Grösslingová
18.	Tomáš LABUDA	4 Gymnázium Grösslingová
	Andrej MIKULÍK	4 Gymnázium Grösslingová

Kraj Nitra

Kategória A

1.	Martin MOLNÁR	4 Gymnázium Levice
2.	Tamás MÉSZÁROS	3 Gymnázium M. Fazekasa, Budapešť
	Marek JANČUŠKA	4 Gymnázium Párovská, Nitra
4.	Szilvia BAGÓCSI	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Miroslav ŠTOLC	4 Gymnázium Párovská, Nitra
6.	László FEKETE	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Róbert PATHÓ	4 Gymnázium Štúrovo
8.	Marcel MEŇHART	3 Gymnázium Párovská, Nitra
	Gábor PATHÓ	4 Gymnázium Štúrovo
10.	Peter RAKYTA	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Katarína ŠKROVINOVÁ	2 Gymnázium Párovská, Nitra
	Katalin KALOCSÁNYI	4 Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Matej PIVOLUSKA	3 Gymnázium Levice
	Richard STRAPKO	3 Gymnázium Párovská, Nitra
	Gábor SZŰCS	2 Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória B

1.	Krisztián KACZ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
2.	Gábor SZŰCS	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Slavomír TAKÁČ	Gymnázium Nové Zámky
4.	Jana KLAUDÍNIOVÁ	Gymnázium Levice
5.	Miroslav HOTÁK	Gymnázium Levice
	Katarína ŠKROVINOVÁ	Gymnázium Párovská, Nitra
7.	Mátyás BERTA	Gymnázium H. Selyeho, Komárno

Kategória C

1.	Anett MATYÓ	Gymnázium Šahy
2.	Juraj CVIK	Gymnázium Levice
3.	Zoltán ÉDES	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Anna KÁLOSI	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
5.	Szabolcs BALOGH	Gymnázium Marianum, Komárno
6.	Rastislav FARKAŠ	Gymnázium Levice
	Marek PÁPAY	Gymnázium Šaľa
8.	Matúš KOTRY	Gymnázium Párovská, Nitra
	Roman MÉSZÁROŠ	SPŠ Levice
10.	Monika BALÁZSOVÁ	Gymnázium H. Selyeho, Komárno
	Peter CHVOJKA	Gymnázium Levice
	Peter MOLNÁR	Gymnázium Nové Zámky

Kategória Z9

1.	Adrián KRAJŇÁK	ZŠ sv. Michala, Levice
2.	Ondrej ĎURČO	ZŠ Komenského, Komárno
	Pavol VALKOVIČ	ZŠ sv. D. Bosca, Zlaté Moravce
4.	Jakub JENIS	Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
	Peter KORCSOK	Gymnázium Šahy
	Evelina KOVÁCSOVÁ	ZŠ Imeľ
	András VARGA	ZŠ Tešedíkovo
8.	Lukáš PLATINSKÝ	Gymnázium Levice
	Matúš VACULA	Gymnázium Šurany
	Martin VDOVIČENKO	Gymnázium Párovská, Nitra
	Nikoleta ŽIAKOVÁ	ZŠ Mostná, Nové Zámky

Kategória P

1.	Marek JANČUŠKA	4	Gymnázium Párovská, Nitra
2.	Miroslav ŠTOLC	4	Gymnázium Párovská, Nitra
3.	Martin MOLNÁR	4	Gymnázium Andreja Vrábla, Levice
	Pavol SZÓRÁD		Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
5.	Ľuboš SLOVÁK		Gymnázium Párovská, Nitra
	Juraj ĎUĎÁK		Gymnázium Golianova, Nitra
7.	František ŠMITALA		Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
8.	Juraj PORUBSKÝ		Gymnázium sv. Cyrila a Metoda, Nitra
9.	Jozef HAJNALA		Gymnázium Párovská, Nitra
	Miroslav FABIÁN		SPŠE S. A. Jedlíka, Nové Zámky

Kraj Trnava

Kategória A

1.	Róbert BIRKUS	4 Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
2.	István ESTÉLYI	2 Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
3.	Sámuel PERES	4 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
4.	Tomáš BARTEK	3 Gymnázium Sereď
	László MAKKY	4 Gymnázium Á. Vámbéryho, D. Streda
6.	Michal POTOČEK	4 Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
7.	Ferdinand HAVELKA	4 Gymnázium Senica

Kategória B

1.	István ESTÉLYI	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta

Kategória C

1.	Alexander PÁLDY	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
2.	Boris FAČKOVEC	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
3.	Tomáš BZDUŠEK	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
4.	Ladislav MORAVSKÝ	Gymnázium Z. Kodálya, Galanta
	Matúš REHÁK	Gymnázium Skalica
6.	Zuzana KNAPCOVÁ	Gymnázium Senica
7.	Juraj DANKO	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	Dominika ŽÁKOVÁ	Gymnázium A. Merici, Trnava
9.	Ľubomíra DEÁKOVÁ	Gymnázium Senica
	Matúš NIŽNANSKÝ	Gymnázium A. Merici, Trnava
	Mária POLÁČKOVÁ	Gymnázium Sereď

Kategória Z9

1.	Július BILIK	ZŠ Sadová, Senica
	Annamária VÖRÖS	ZŠ Á. Vámbéryho, Dunajská Streda
3.	F. KOZÁK	ZŠ Brezová, Piešťany
4.	E. BEDNÁRIKOVÁ	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
5.	P. KRÁTKY	Gymnázium P. de Coubertina, Piešťany
	P. MALIARIK	ZŠ Dolná Krupá
	L. SLOVÁK	ZŠ Sv. Jozefa, Hlohovec
	Alena ULEHLOVÁ	ZŠ Školská, Holíč
9.	J. DOBŠOVIČ	ZŠ M. R. Štefánika, Hlohovec
	Miroslav FORRO	ZŠ Komenského, Sereď

L. KUNERT	ZŠ Brezová, Piešťany
Ľ. MARON	ZŠ Kopernikova, Hlohovec

Kategória P

1. Lukáš HRÍBIK	4 Gymnázium A. Merici, Trnava
2. Jakub GAJARSKÝ	3 Gymnázium Hollého, Trnava
Jozef HORNÍK	4 Gymázium SNP Galanta
4. Eva SCHLOSÁRIKOVÁ	3 Gymázium SNP Piešťany
5. Marek CIFRA	4 Gymnázium A. Merici, Trnava
6. Robert SASÁK	6 SPŠE Piešťany

Kraj Trenčín

Kategória A

1. Peter ČERNO	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2. Jozef GÁBIK	3 Piaristické gymnázium Trenčín

Kategória B

1. Peter ZÁMEČNÍK	Gymnázium M. R. Štefánika, Nové Mesto n/V.
Mojmír HLOŽA	Gymnázium Bánovce nad Bebravou

Kategória C

1. Martina HOJČKOVÁ	Gymnázium Partizánske
2. Ľubica KRAUSKOVÁ	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza
3. Mária DUBOVÁ	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
4. Boris ANDEL	Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
5. Matúš IGLARČÍK	Gymnázium V. B. Nedožerského, Prievidza

Kategória Z9

1. Branislav JESENSKÝ	ZŠ Medňanská, Ilava
2. Daniel KOTLEBA	ZŠ kpt. Nálepku, Nové Mesto nad Váhom
Lucia KOVALČÍKOVÁ	ZŠ Duklianska, Bánovce nad Bebravou
Katarína MARTINOVÁ	ZŠ S. Chalupku, Prievidza
5. Mária KORCOVÁ	ZŠ Veľké Uherce, Partizánske
Veronika NĚMCOVÁ	ZŠ Nádražná, Partizánske

	Daniel MIŠKÁR	ZŠ Gorazdova, Púchov
	Branislav ROHÁĽ	ZŠ Dolná Mariková
	Štefan NOVOSAD	ZŠ P. Bezruča, Trenčín
	Ján ZÁMEČNÍK	ZŠ Študentská, Trenčín
	Patrícia ŽUCHOVÁ	ZŠ Dolná Súča
	Zuzana MIHALOVÁ	ZŠ Štúrova, Nové Mesto nad Váhom

Kategória P

1.	Peter ČERNO	3 Gymnázium Ľ. Štúra, Trenčín
2.	Juraj BLAHO	Gymnázium Považská Bystrica

Kraj Žilina

Kategória A

1.	Peter ŠEPITKA	3 Gymnázium V. P. Tótha, Martin
2.	Vlasta POLIAČKOVÁ	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Jaroslav KNEBL	2 Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
4.	Miroslav MAHDOŇ	4 Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória B

1.	Jaroslav KNEBL	Gymnázium A. Bernoláka, Námestovo
2.	Marcela HRDÁ	Gymnázium Turčianske Teplice
3.	Alena BACHRATÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Lenka VESELOVSKÁ	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš

Kategória C

1.	Ján PEPRNÍK	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
2.	Kristína KOVALČÍKOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Mirka ORIEŠČÍKOVÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Lucia HÚŠŤAVOVÁ	Gymnázium Varšavská, Žilina
5.	Matej JANEČEK	Gymnázium Sučany
6.	Martina LEHOTSKÁ	Gymnázium M. M. Hodžu, Lipt. Mikuláš
	Jana SEKEROVÁ	Gymnázium Moyzesova, Ružomberok
8.	Peter HLÍSTA	Gymnázium Veľká okružná, Žilina
	Zuzana KNEŽNÍKOVÁ	Gymnázium Sučany
	Viola PORADOVSKÁ	Gymnázium Veľká okružná, Žilina

Kategória Z9

1.	Lukáš KEKELY	Gymnázium Varšavská, Žilina
	Pavol OTTO	ZŠ A. Bernoláka, Martin
3.	Ondrej BAVOLÁR	ZŠ Moskovská, Žilina
4.	Andrea KISTANOVÁ	ZŠ sv. Gorazda, Žilina
5.	Veronika ČERVENCOVÁ	ZŠ Moskovská, Žilina
	Dominika ŠUŇOVÁ	ZŠ Čsl. brigády, Liptovský Mikuláš
	Boris ŠVANCAR	ZŠ Zaymusova, Žilina
	Wu Li JUN	ZCŠ Školská, Tvrdošín
9.	Štefan BUGAN	Gymnázium Námestovo
	Peter MARKO	ZŠ M. Hattalu, Dolný Kubín
	Marcel TVRDÝ	ZŠ Krásno nad Kysucou

Kategória P

1.	Tamara KUŠTÁROVÁ	4 Gymnázium Sučany
	Peter PIŠTEK	4 Gymnázium J. M. Hurbana Čadca
3.	Peter PIJÁK	3 Gymnázium Veľká okružná, Žilina
4.	Lukáš ŠPALEK	3 Gymnázium J. M. Hurbana Čadca
5.	Lukáš BELEŠ	3 Gymnázium J. M. Hurbana Čadca
6.	Milan ILAVSKÝ	4 SPŠE Liptovský Hrádok
	Lukáš TVRDÝ	3 Gymnázium J. M. Hurbana Čadca
8.	Lukáš SALAJKA	4 SPŠ IG, Tvrdošín

Kraj Banská Bystrica

Kategória A

1.	Ondrej BUDÁČ	2 Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
2.	Lucia KOMENDOVÁ	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Tomáš VÁŇA	4 Gymnázium Žiar nad Hronom
4.	Jozef BODNÁR	3 Gymnázium Fiľakovo
	Hana BUDÁČOVÁ	4 Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
6.	Peter PEREŠÍNI	2 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
7.	Tomáš OSIČKA	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
8.	Tomáš MÁNIK	4 Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
9.	Miroslav CICKO	3 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Martin LYSÍK	4 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Zuzana PÔBIŠOVÁ	2 Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória B

1.	Peter PEREŠÍNI	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Ondrej BUDÁČ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
3.	Zuzana PÔBIŠOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
4.	Michal TAKÁCS	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Ján MIKULÁŠ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
6.	Jakub UKROP	Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
7.	Beata HERGELOVÁ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
8.	Ivana KVIETKOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Peter SKOČOVSKÝ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica

Kategória C

1.	Michal SUDOLSKÝ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Maroš ORAVEC	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ján KOVÁČ	Gymnázium Nová Baňa
4.	Katarína MAGYAROVÁ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
5.	Igor GILÁNY	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Alexander RÓŽA	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ondrej MIKULÁŠ	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
8.	Helena ZUBČEKOVÁ	Gymnázium Kremnica
9.	Ladislav MAJER	Gymnázium Detva
	Radka SELEČÉNIOVÁ	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Ján ROMAŇÁK	Gymnázium Žiar nad Hronom

Kategória Z9

1.	Peter SLUKA	ZŠ IX. Zvolen
2.	Katarína JURÍKOVÁ	ZŠ I. Detva
	Michaela MÜLLEROVÁ	ZŠ Haličská, Lučenec
	Ján HUDEC	ZŠ III. Zvolen
	Júlia FARKASOVÁ	ZŠ Fiľakovo
	Maroš KUCBEL	ZŠ Školská, Krupina
7.	Danka LENNEROVÁ	ZŠ VI. Zvolen
	Lenka GARAJOVÁ	ZŠ IV. Detva
	Maroš ZAŤKO	ZŠ V. Zvolen
	Katarína TUREKOVÁ	ZŠ Trieda SNP, Banská Bystrica
	Daniela DAXNEROVÁ	ZŠ Pionierska, Brezno
	Tomáš KOVÁČ	ZŠ I. Žiar nad Hronom

Kategória P

1.	Peter PEREŠÍNI	2	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
2.	Marek LUDHA	4	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
3.	Ondrej BUDÁČ	2	Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec
4.	Miroslav CICKO	3	Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
5.	Andrej PANČÍK		KGŠM Hurbanova, Banská Bystrica
6.	Tomáš VÁŇA	4	Gymnázium M. R. Štefánika, Žiar n/Hronom
7.	Michal PANČÍK		Gymnázium J. G. Tajovského, B. Bystrica
	Lukáš ZACHAR		Gymnázium A. Sládkoviča, B. Bystrica
9.	Milan PLŽÍK		Gymnázium Ľ. Štúra, Zvolen
10.	Andrej VESELOVSKÝ		Gymnázium Školská, Poltár

Kraj Košice

Kategória A

1.	Lenka KOVALČINOVÁ	3	Gymnázium Poštová, Košice
2.	Rastislav OĽHAVA	2	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Ján NIŽŇANSKÝ	3	Gymnázium Alejová, Košice
	Tomáš GREŠLÍK	4	Gymnázium P. Horova, Michalovce
5.	Jozef BÁŠTI	3	Gymnázium S. Máraiho, Košice
6.	Lukáš MIKULA	3	Gymnázium Krompachy
	Darina POLOVKOVÁ	4	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
	Michal KUNCA	3	Gymnázium Alejová, Košice
	Martin KRAVEC	2	Gymnázium P. Horova, Michalovce

Kategória B

1.	Jakub BERAN	Gymnázium Alejová, Košice
2.	Rastislav OĽHAVA	Gymnázium Alejová, Košice
3.	Peter KOBAN	Gymnázium Alejová, Košice
	Dárius GÁL	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Zuzana MOLNÁROVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
6.	František LUKÁČ	Gymnázium Poštová, Košice
	Miloš ŠIMURDA	Gymnázium Ľ. Štúra, Michalovce
8.	Peter BAŠISTA	Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Peter ŠČIGULINSKÝ	Evanjelické gymn. J. A. Komenského, Košice
	M. NOSAĽ	Gymnázium Sobrance

Kategória C

1.	Peter BERTA	Gymnázium Veľké Kapušany
	Tomáš RUSIN	Gymnázium Alejová, Košice
	Alexander TILL	Gymnázium Poštová, Košice
4.	Jozef JIRÁSEK	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
5.	Jozef JANOVSKÝ	Gymnázium Alejová, Košice
6.	Martin BLICHA	Gymnázium Alejová, Košice
	Zuzana HARMINCOVÁ	Gymnázium Alejová, Košice
8.	Peter KONEČNÝ	Gymnázium Sečovce
	Lukáč JUSKO	Gymnázium Poštová, Košice
	Kamil SEBESTYEN	Gymnázium Komenského, Trebišov

Kategória Z9

1.	Vladislav UJHÁZI	Gymnázium P. J. Šafárika, Rožňava
2.	Jaroslav BÖHMER	ZŠ Hutnícka, Spišská Nová Ves
3.	Dominika FODOROVÁ	ZŠ Bruselská, Košice
	Jaroslav DOLNÝ	ZŠ Jenisejská, Košice
	Richard DUBIEL	ZŠ Jenisejská, Košice
6.	Štefan KIŠO	ZŠ P. Horova, Michalovce
	Tomáš STANAY	Gymnázium Alejová, Košice
	Michal BÚZIK	ZŠ Kežmarská, Košice
	Marek OLOS	ZŠ Staničná, Košice
	Adriána SZILÁGYIOVÁ	ZŠ Gemerská, Košice

Kategória P

1.	Michal DZETKULIČ	3	Gymnázium P. Horova, Michalovce
2.	Michal REPOVSKÝ	4	Gymnázium Komenského, Trebišov
3.	Jozef JIRÁSEK	1	Gymnázium sv. T. Akvinského, Košice
4.	Sergej CHODAREV	4	Gymnázium Poštová, Košice
5.	Tomáš DZURŇÁK	2	Gymnázium Školská, Spišská Nová Ves
6.	Tibor BLÉNESSY	4	Gymnázium Poštová, Košice
	Peter JURČO	2	Gymnázium P. Horova, Michalovce
8.	Dušan DOMÁNY	3	Gymnázium P. Horova, Michalovce
	Pavol GAJARSKÝ	4	Gymnázium P. Horova, Michalovce
10.	Ján BORSÍK	4	Gymnázium Poštová, Košice
	Ondrej PAŠUTH	2	Gymnázium P. Horova, Michalovce

Kraj Prešov

Kategória A

1.	Katarína KVAŠŇÁKOVÁ	4 Gymnázium Konštantínova, Prešov
2.	Michal PRUSÁK	2 Gymnázium J. A. Raymana, Prešov
3.	Zuzana BATMENDIJNOVÁ	4 Gymnázium Stará Ľubovňa
	Vladimír ŽÁK	4 Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
5.	Anton REPKO	3 Gymnázium sv. Mikuláša, Prešov

Kategória B

1.	Michal PRUSÁK	Gymnázium J. A. Raymana, Prešov

Kategória C

1.	Juraj FERENC	SPŠE Plzenská, Prešov
	Martin ŽEMLIČKA	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
3.	Michal KOVAĽ	Gymnázium L. Stöckela, Bardejov
4.	Anton FABÍK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Miloslava KUČERÍKOVÁ	Gymnázium Kukučínova, Poprad
	Lenka MARUŠČÁKOVÁ	Gymnázium Stropkov
	Vladimír VOLČKO	SPŠE Plzenská, Prešov
8.	Miroslav CUPÁK	Gymnázium Konštantínova, Prešov
	Tomáš GALICA	Gymnázium Spišská Stará Ves
	Marián JAREMBINSKÝ	Gymnázium T. Vansovej, Stará Ľubovňa
	Róbert KOPPER	Gymnázium D. Tatarku, Poprad
	Katarína KROTKÁ	Gymnázium Vranov nad Topľou
	František MARIŇÁK	Gymnázium Giraltovce

Kategória Z9

1.	Vladimír BOŽA	ZŠ Mierová, Svit
	Martin LUKAČIŠIN	Gymnázium J. F. Rimavského, Levoča
3.	Miroslav BALÁŽ	Gymnázium L. Svobodu, Humenné
	František NEMEC	ZŠ Francisciho, Poprad
	Denisa SÁNIKOVÁ	ZŠ Važecká, Prešov
	Jozef SUVÁK	ZŠ Komenského, Stropkov
	Eva ŠOLTYSOVÁ	ZŠ Bajkalská, Prešov
8.	Monika ČUSOVÁ	ZŠ Študentská, Snina
	Jana HANUDEĽOVÁ	ZŠ Veľký Šariš, Prešov

Jela REPASKÁ	ZŠ Francisciho, Poprad
Ján RUŠIN	Gymnázium Spišská Stará Ves
Anna SABOLOVÁ	ZŠ Kudlovská, Humenné

Kategória P

1.	Maroš GÁLIK	2	Gymnázium Vranov nad Topľou
2.	Marek DESATNÍK	4	Gymnázium Konštantínova, Prešov
3.	Štefan SEDLÁK	3	Gymnázium Vranov nad Topľou
4.	Peter GREŠKOVIČ	3	Gymnázium duklianskych hrdinov, Svidník
5.	Radoslav SOPOLIGA	4	Gymnázium duklianskych hrdinov, Svidník
6.	Pavol KOMAN	4	Gymnázium Vranov nad Topľou

Zadania súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, ktoré je väčšie ako 3 a nie je deliteľné tromi, platí: Šachovnicu $n \times n$ je možné rozrezať na jeden štvorec 1×1 a obdĺžniky 3×1.

(J. Zhouf)

C – I – 2

Daný je obdĺžnik $ABCD$. Nech priamky p a q, ktoré prechádzajú vrcholom A, pretínajú polkružnice zvonku pripísané stranám BC a CD v bodoch K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq \neq D$) a taktiež strany BC a CD v bodoch P a Q tak, že trojuholník ABP má taký istý obsah ako trojuholník KCP a súčasne trojuholník AQD má taký istý obsah ako trojuholník CLQ. Dokážte, že body K, L, C ležia na jednej priamke.

(J. Švrček)

C – I – 3

Žiak mal vypočítať príklad $X \cdot Y : Z$, kde X je dvojciferné číslo, Y trojciferné číslo a Z trojciferné číslo s číslicou 2 na mieste jednotiek. Výsledkom príkladu malo byť prirodzené číslo. Žiak ale prehliadol bodku a súčin $X \cdot Y$ chápal ako päťciferné číslo. Dostal tak sedemkrát väčší výsledok ako mal vyjsť. Aký príklad mal žiak počítať?

(P. Černek)

C – I – 4

Nech P je ľubovoľný vnútorný bod rovnostranného trojuholníka ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových súmernostiach s osami AB, BC a CA. Určte množinu všetkých bodov P takých, že trojuholník KLM je rovnoramenný.

(J. Zhouf)

C – I – 5

Prirodzené číslo nazveme *magickým* práve vtedy, keď sa dá rozložiť na súčet dvoch trojmiestnych čísel zapísaných rovnakými číslicami, ale v opačnom poradí. Napríklad číslo 1 413 je magické, lebo $1\,413 = 756 + 657$; najmenšie magické číslo je 202.

a) Určte počet všetkých magických čísel.

b) Ukážte, že súčet všetkých magických čísel je 187 000.

(J. Šimša)

C – I – 6

Zo všetkých štvoruholníkov, ktoré sa dajú vpísať do danej kružnice s polomerom r a ktoré majú dve strany danej dĺžky m, určte tie, ktoré majú najväčší obsah.

(P. Leischner)

C – S – 1

Určte počet všetkých trojciferných čísel, ktoré sú devätnásťkrát väčšie ako ich ciferný súčet.

(J. Šimša)

C – S – 2

Je daný štvorec so stranou dĺžky 5 cm. Uvažujme štvoruholník, ktorý leží v danom štvorci tak, že má dve strany dlhé 2 cm, pričom obidve tieto strany ležia na obvode daného štvorca. Nájdite všetky štvoruholníky s danými vlastnosťami, ktoré majú maximálny obsah.

(P. Leischner)

C – S – 3

Dlaždica A je zložená z troch jednotkových štvorcov a má tvar . Dlaždica B je zložená zo štyroch jednotkových štvorcov a má tvar . Koľko dlaždíc jednotlivých typov potrebujeme na vydláždenie štvorca so stranou 6 jednotiek? Pre každý možný počet dlaždíc uveďte príklad takého pokrytia.

(J. Földes)

C – II – 1

V rovine je daný obdĺžnik $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho strane BC existuje bod K a na strane CD bod L tak, že daný obdĺžnik je úsečkami AK, KL a LA rozdelený na štyri navzájom podobné trojuholníky. Určte hodnotu pomeru $a : b$.

(J. Švrček)

C – II – 2

Nájdite všetky trojice prvočísiel p, q, r, pre ktoré platí

$$\frac{14}{p} + \frac{51}{q} = \frac{65}{r}.$$

(P. Novotný)

C – II – 3

Do kružnice s polomerom $r = 6$ vpíšte osemuholník $ABCDEFGH$, ktorého strany AB, CD, EF a GH majú postupne dĺžky 3, 4, 5 a 6 a strany BC, DE, FG a HA sú zhodné.

(P. Novotný)

C – II – 4

Žiaci mali vypočítať príklad $x + y \cdot z$ pre trojciferné číslo x a dvojciferné čísla y, z. Martin vie násobiť a sčitovať čísla zapísané v desiatkovej sústave, ale zabudol na pravidlo prednosti násobenia pred sčitovaním. Preto mu vyšlo síce zaujímavé číslo, ktoré sa číta rovnako zľava doprava ako sprava doľava, ale správny výsledok bol o 2004 menší. Určte čísla x, y, z.

(J. Šimša)

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Každú z hviezdičiek na mieste jednotiek vo výraze

$$\left| \frac{777\,777\,777\,77*}{777\,777\,777\,77*} - \frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,559} \right|$$

nahraďte nejakou číslicou tak, aby výraz mal čo najmenšiu hodnotu.

(J. Šimša)

B – I – 2

V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základni AB je daný bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú vonkajší dotyk.

(J. Zhouf)

B – I – 3

V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$x\lfloor x\rfloor - 5x + 7 = 0,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ znamená dolnú celú časť čísla x, teda najväčšie celé číslo k, pre ktoré platí $k \leqq x$. (Napríklad $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$ a $\lfloor -3{,}1\rfloor = -4$.)

(E. Kováč)

B – I – 4

Číslo a_n vznikne tak, že za seba napíšeme prvých n po sebe idúcich prirodzených čísel, napríklad $a_{13} = 12\,345\,678\,910\,111\,213$. Zistite, koľko čísel deliteľných 24 sa nachádza medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{10\,000}$.

(P. Černek)

B – I – 5

Je daná priamka p a bod A, ktorý na nej neleží. Zostrojte lichobežník $ABCD$ s minimálnym obsahom a ramenom BC na priamke p tak, aby boli splnené rovnosti $|BC| = |AC|$ a $|BE| = 3|DE|$, kde E je priesečník uhlopriečok lichobežníka.

(P. Leischner)

B – I – 6

Určte všetky prirodzené čísla M deliteľné 240, pre ktoré má rovnica $M = \mathrm{NSN}(x, y)$ s neznámymi x, y práve 1 001 riešení v obore prirodzených čísel. (Symbol $\mathrm{NSN}(x, y)$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y.)

(P. Černek)

B – S – 1

Určte, koľko riešení má v obore reálnych čísel rovnica

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{x}{2\,004},$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x, t. j. najväčšie celé číslo, ktoré je menšie alebo rovné ako x.

(J. Šimša)

B – S – 2

Uveďte príklad množiny $\mathcal{M}$ pozostávajúcej z dvojciferných čísel, ktorá má maximálny počet prvkov a pritom spĺňa obidve nasledujúce podmienky:

(i) Každé dve čísla patriace do množiny $\mathcal{M}$ sú nesúdeliteľné.

(ii) Ak zmeníme poradie číslic ľubovoľného čísla patriaceho do množiny $\mathcal{M}$, dostaneme opäť číslo patriace do množiny $\mathcal{M}$.

(J. Földes)

B – S – 3

Nech $ABCD$ je lichobežník s ostrými uhlami pri základni AB. Nech E je taký bod základne AB, že kružnice opísané trojuholníkom AED a EBC sa dotýkajú zvonku.

Dokážte, že bod E leží na kružnici opísanej trojuholníku CDV, kde V je priesečník priamok AD a BC.

(R. Horenský)

B – II – 1

Číslo a_n vznikne tak, že za seba zapíšeme prvých n druhých mocnín po sebe idúcich prirodzených čísel. Napríklad $a_{11} = 149\,162\,536\,496\,481\,100\,121$. Zistite, koľko čísel deliteľných dvanástimi je medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{100\,000}$.

(P. Černek)

B – II – 2

Nájdite všetky kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ také, že ak ľubovoľný z koeficientov a, b, c zväčšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, ktorý bude mať dvojnásobný koreň.

(E. Kováč)

B – II – 3

Pre dané prirodzené číslo n vyriešte v obore kladných reálnych čísel rovnicu

$$\left\lfloor x\sqrt{n^2-1} \right\rfloor = nx - 1.$$

(Symbol $\lfloor r \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré nie je väčšie ako r.)

(J. Šimša)

B – II – 4

Daný je ostrouhlý trojuholník VBA. Zostrojte dotyčnicový štvoruholník $ABCD$ s minimálnym obsahom tak, aby jeho vrcholy C, D ležali postupne na polpriamkach opačných k polpriamkam BV a AV.

(P. Leischner)

Kategória A

A – I – 1

Určte všetky dvojice (p, q) reálnych čísel také, že rovnica $x^2 + px + q = 0$ má riešenie v obore reálnych čísel, pričom platí: Ak t je koreňom tejto rovnice, potom aj $|2t - 15|$ je jej koreňom.

(P. Černek)

A – I – 2

V rovine daného štvorca $KLMN$ určte množinu všetkých bodov P, pre ktoré sú uhly NPK, KPL a LPM zhodné.

(J. Švrček)

A – I – 3

Pre ľubovoľné prirodzené číslo k zostavme z písmen A, B všetky možná „slová“ dĺžky k. Rozdeľme ich do dvoch skupín P_k a N_k podľa toho, či je v danom slove párny alebo nepárny počet „slabík“ BA (za párny považujeme aj počet 0). Napríklad slová $\underline{BA}BBB\underline{BA}$ a $AAAAAAB$ patria do skupiny P_7, slová $AAB\underline{BA}BB$ a $\underline{BA}\,\underline{BA}A\underline{BA}$ patria do skupiny N_7. Zistite, pre ktoré k majú skupiny P_k a N_k rovnaký počet prvkov.

(J. Šimša)

A – I – 4

Určte najmenšie reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+\sqrt{3^2+1}+\ldots+\sqrt{n^2+1} \leqq \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pre každé prirodzené číslo n.

(S. Trávníček)

A – I – 5

Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého vnútorný uhol pri vrchole B má veľkosť $60°$.

a) Ak $|BC|=|CD|$, potom platí $|CD|+|DA|=|AB|$; dokážte.
b) Rozhodnite, či platí opačná implikácia.

(E. Kováč)

A – I – 6

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$x^2=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \quad y^2=\frac{1}{z}+\frac{1}{x}, \quad z^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

(J. Šimša)

A – S – 1

Nech $P(x)=ax^2+bx+c$ je kvadratický trojčlen s nezápornými reálnymi koeficientmi.

Dokážte, že pre ľubovoľné kladné číslo x platí

$$P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) \geqq \big(P(1)\big)^2.$$

(E. Kováč)

A – S – 2

Určte, akú najväčšiu dĺžku môže mať uhlopriečka CE konvexného päťuholníka $ABCDE$, ktorého strana AB má dĺžku 6 cm, vnútorné uhly pri vrcholoch C a E sú pravé a uhol ADB má veľkosť $120°$.

(P. Černek)

A – S – 3

V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz &= 6(y + z - 2),\\ y^2 + 2zx &= 6(z + x - 2),\\ z^2 + 2xy &= 6(x + y - 2). \end{aligned}$$

(J. Šimša)

A – II – 1

Určte počet všetkých päťmiestnych palindrómov, ktoré sú deliteľné číslom 37. (Palindrómom nazývame číslo, ktorého zápis v desiatkovej sústave sa číta rovnako spredu aj zozadu.)

(J. Šimša)

A – II – 2

Pre ľubovoľné kladné celé číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová“ dĺžky n a označme p_n počet tých z nich, ktoré neobsahujú ani trojicu AAA po sebe nasledujúcich písmen A ani dvojicu BB po sebe nasledujúcich písmen B. Zistite, pre ktoré kladné celé čísla n platí, že obe čísla p_n a p_{n+1} sú párne.

(R. Kučera)

A – II – 3

Označme K ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.

a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2.
b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) je priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ.

(J. Šimša, J. Zhouf)

A – II – 4

Nech K, L a M sú postupne priesečníky osí vnútorných uhlov α, β a γ pri vrcholoch A, B a C daného trojuholníka ABC s protiľahlými stranami BC, CA a AB. Dokážte, že platí nerovnosť

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}\geqq 3.$$

(J. Švrček)

A – III – 1

Určte všetky trojice (x, y, z) reálnych čísel, pre ktoré platí

$$x^2+y^2+z^2\leqq 6+\min\Big\{x^2-\frac{8}{x^4},\ y^2-\frac{8}{y^4},\ z^2-\frac{8}{z^4}\Big\}.$$

(J. Švrček)

A – III – 2

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n zostavme z písmen A a B všetky možné „slová" dĺžky n a označme p_n počet tých, ktoré neobsahujú štvoricu $AAAA$ po sebe idúcich písmen A ani trojicu BBB po sebe idúcich písmen B. Určte hodnotu výrazu

$$\frac{p_{2004}-p_{2002}-p_{1999}}{p_{2001}+p_{2000}}.$$

(R. Kučera)

A – III – 3

V rovine je daná kružnica k a 121 jej sečníc $p_1, p_2, \dots, p_{121}$. Vnútri tejto kružnice je na každej priamke p_i daný bod A_i. Dokážte, že na kružnici k existuje taký bod X, že úsečka A_iX zviera s priamkou p_i uhol menší ako $21°$ pre najmenej 29 rôznych indexov i.

(J. Šimša)

A – III – 4

Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n je súčet

$$\frac{n}{1!}+\frac{n}{2!}+\ldots+\frac{n}{n!}$$

celé číslo.

(E. Kováč)

A – III – 5

Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka CD kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na tej istej kružnici.

(J. Švrček)

A – III – 6

Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné čísla x, y spĺňajú rovnosť

$$x^2\bigl(f(x)+f(y)\bigr)=(x+y)f\bigl(f(x)y\bigr).$$

(P. Kaňovský)

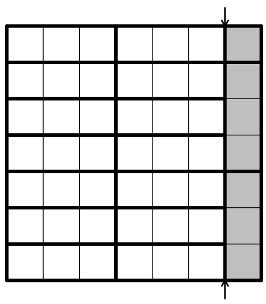
Riešenia súťažných úloh

Kategória C

C – I – 1

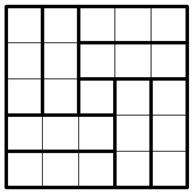
Keď budeme premýšľať nad postupmi rezania šachovníc veľkých rozmerov, určite si uvedomíme, že na obdĺžniky 3×1 možno rozrezať každý „pás“ šachovnice tvorený tromi susednými riadkami alebo stĺpcami. Také pásy sa preto oplatí od šachovnice opakovane odrezávať (pokiaľ je to možné), a tak zmenšovať jej rozmery o násobky troch. Preto bude pre našu úlohu o šachovnici $n \times n$ výhodné rozlíšiť, či dané číslo $n > 3$ dáva po delení tromi zvyšok 1, alebo zvyšok 2 (zvyšok 0 je zadaním vylúčený). Každý z týchto prípadov preskúmame osobitne.

Prípad $n = 3k + 1$. Najskôr zo šachovnice $(3k + 1) \times (3k + 1)$ odrežeme pás prvých $3k$ stĺpcov, teda obdĺžnik $(3k+1) \times 3k$, ktorý potom rozrežeme (po trojiciach stĺpcov) na k pásov $(3k + 1) \times 3$ a každý z nich nakoniec rozrežeme na $3k + 1$ obdĺžnikov 1×3. Z pôvodnej šachovnice nám tak zostane nerozrezaný posledný stĺpec. Pretože má $3k + {}$ $+ 1$ políčok, ľahko ho rozrežeme na jeden štvorec 1×1 a k obdĺžnikov 3×1. Na obr. 1 je znázornené výsledné rozrezanie šachovnice 7×7 (počiatočné odrezanie pásu 7×6 je vyznačené šípkami, zvyšný stĺpec je sivý). Na tom istom obrázku vidíme aj spôsob rozrezania pre $n = 4$.

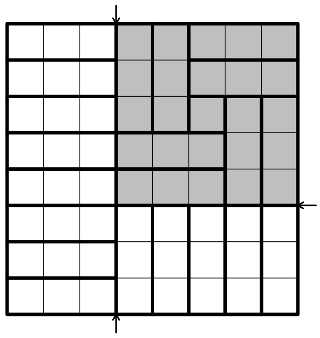


Obr. 1

Prípad $n = 3k + 2$. Keby sme šachovnicu $(3k + 2) \times (3k + 2)$ dôsledne „orezávali“ postupom z úvodu riešenia, dostali by sme (po oddelení dvoch pásov $(3k + 2) \times 3k$ a $3k \times 2$) ako zvyšok šachovnicu 2×2, ktorú však nie je možné rozrezať požadovaným spôsobom (na diely 1×1 a 3×1). To je možné urobiť až s „nasledujúcou“ šachovnicou 5×5, ako vidíme na obr. 2.



Obr. 2



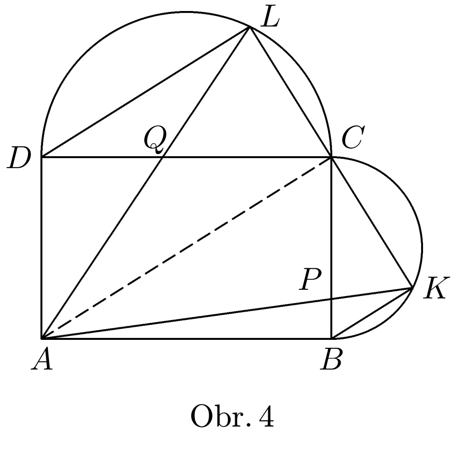
Obr. 3

Ostáva popísať, ako každú väčšiu šachovnicu $(3k+2) \times (3k+2)$ rezaním zredukovať na štvorec 5×5. Najskôr oddelíme pás $(3k+2) \times (3k-3)$ tvorený prvými $(k-1)$ trojicami stĺpcov šachovnice. Zo zvyšnej šachovnice $(3k+2) \times 5$ potom oddelíme pás $(3k-3) \times 5$ tvorený jej poslednými $(k-1)$ trojicami riadkov, z pôvodnej šachovnice tak zostane žiadaný štvorec 5×5 v pravom hornom rohu (sivý na obr. 3 pre šachovnicu 8×8).

Dodajme, že pri riešení danej úlohy sme nebrali do úvahy ofarbenie políčok šachovnice. Farby políčok sa používajú v iných situáciách, hlavne vtedy, keď potrebujeme dokázať, že rozrezanie šachovnice na diely predpísaného tvaru nie je možné.

C – I – 2

Trojuholníky ABP a KCP majú podľa zadania rovnaké obsahy. Keď ku každému z nich pripojíme trojuholník ACP (obr. 4), nahliadneme, že rovnaké obsahy majú aj trojuholníky ABC a AKC. Pretože oba tieto trojuholníky majú spoločnú stranu AC, obe k nej prislúchajúce výšky musia byť zhodné. Body B a K teda majú rovnakú vzdialenosť od priamky AC (a ležia v rovnakej polrovine touto priamkou určenou). To znamená, že $BK \parallel AC$. Podľa Tálesovej vety však platí $BK \perp CK$, takže platí aj $AC \perp CK$.



Obr. 4

Podobne z rovnosti obsahov trojuholníkov AQD, CLQ a kolmosti priamok CL a DL odvodíme, že $AC \perp CL$. Spolu to znamená, že uhol KCL je zložený z dvoch pravých uhlov ACK a ACL. Body K a L teda ležia na priamke, ktorá prechádza bodom C kolmo na uhlopriečku AC.

C – I – 3

Pretože Y je trojciferné číslo, päťciferné číslo so zápisom XY je číslo $1\,000X + Y$. Žiak teda počítal príklad $(1\,000X + Y) : Z$ a podľa zadania mu v porovnaní s pôvodným príkladom vyšiel sedemkrát väčší výsledok, teda

$$\frac{1\,000X + Y}{Z} = 7 \cdot \frac{X \cdot Y}{Z}.$$

Odtiaľ po násobení číslom Z dostaneme rovnicu $1\,000X + Y = 7XY$, ktorú vyriešime vzhľadom na neznámu Y:

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1}.$$

Pre ktoré X je ostatný zlomok celočíselný? Inak povedané, kedy je číslo $1\,000X$ deliteľné číslom $7X - 1$? Pretože čísla X a $7X - 1$ sú nesúdeliteľné (nesúdeliteľné sú totiž dve po sebe idúce čísla $7X - 1$ a $7X$), hľadáme tie X, pre ktoré číslo $7X - 1$ delí číslo $1\,000$. Aby sme nemuseli vypisovať všetky delitele čísla $1\,000$, uvedomíme si, že X je dvojciferné, teda $69 \leqq 7X - 1 \leqq 692$. Rozložme preto číslo $1\,000$ všetkými spôsobmi na súčin dvoch činiteľov tak, aby jeden (povedzme prvý) z činiteľov bol z intervalu $\langle 69, 692 \rangle$:

$$1\,000 = 500 \cdot 2 = 250 \cdot 4 = 200 \cdot 5 = 125 \cdot 8 = 100 \cdot 10.$$

Z rovníc

$$7X - 1 = 500,\ 7X - 1 = 250,\ 7X - 1 = 200,\ 7X - 1 = 125,\ 7X - 1 = 100$$

má jedine rovnica $7X - 1 = 125$ celočíselné riešenie $X = 18$, pre ktoré vychádza $Y = 1\,000X/(7X - 1) = 1\,000 \cdot 18/125 = 144$.

Teraz určíme neznáme číslo Z. Využijeme na to podmienku zo zadania, že hodnota výrazu $X \cdot Y : Z$ je prirodzené číslo. Pretože $X = 18$ a $Y = 144$, jedná sa o číslo $18 \cdot 144 : Z$, teda číslo $2^5 \cdot 3^4 : Z$. Také číslo je celé práve vtedy, keď má číslo Z rozklad na prvočinitele tvaru $2^a 3^b$, kde $0 \leqq a \leqq 5$ a $0 \leqq b \leqq 4$. Exponenty a, b nájdeme podľa podmienky zo zadania, že číslo $Z = 2^a 3^b$ je trojciferné a na mieste jednotiek má číslicu 2. Pretože $3^4 = 81$ a $2^5 \cdot 3 = 96$, musí byť $a \geqq 1$ a $b \geqq 2$. Všetky čísla $2^a 3^b$, kde $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $b \in \{2, 3, 4\}$ teraz vypíšeme do tabuľky.

b \ a	1	2	3	4	5
2	18	36	72	144	288
3	54	108	216	432	864
4	162	324	648	1 296	2 592

Z vypočítaných čísel majú požadovanú vlastnosť iba čísla $Z = 432 = 2^4 3^3$ a $Z = 162 = 2^1 3^4$.

Odpoveď. Úloha má dve riešenia. Žiak mal počítať buď príklad $18 \cdot 144 : 432$, alebo príklad $18 \cdot 144 : 162$.

Iné riešenie. Tak, ako v prvom riešení, odvodíme vyjadrenie

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1}.$$

Teraz však získaný zlomok upravíme čiastočným vydelením čísla 1 000 číslom 7. Na základe rovnosti $1\,000 = 7 \cdot 143 - 1$ dostávame

$$Y = \frac{1\,000X}{7X - 1} = \frac{143(7X - 1) + 143 - X}{7X - 1} = 143 + \frac{143 - X}{7X - 1}.$$

Aby bolo Y celé, musí byť ostatný zlomok $(143 - X)/(7X - 1)$ celočíselný. Pretože číslo X je dvojciferné, náš zlomok spĺňa odhady

$$\frac{143 - 99}{7 \cdot 99 - 1} < \frac{143 - X}{7X - 1} < \frac{143 - 10}{7 \cdot 10 - 1}.$$

Ľavý zlomok je rovný 44/692, pravý je rovný 133/69, takže jediná možná celočíselná hodnota prostredného zlomku je rovná 1. Musí teda platiť $Y = 144$. Rovnica

$$\frac{143 - X}{7X - 1} = 1$$

má potom jediné riešenie $X = 18$. Ďalej už postupujeme ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Skôr získanú rovnicu $1\,000X + Y = 7XY$ upravíme na súčinový tvar $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$. Musí preto platiť $7Y - 1\,000 > 0$, odkiaľ

$$Y > \frac{1\,000}{7} > 142, \quad \text{čiže} \quad Y \geqq 143.$$

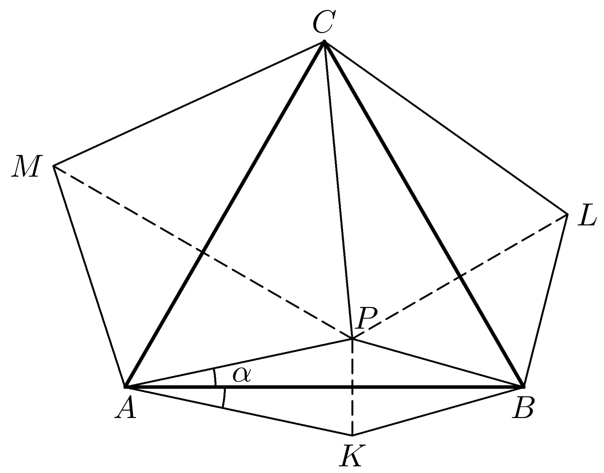
Číslo X je dvojciferné, preto z rovnosti $Y = X \cdot (7Y - 1\,000)$ vychádza odhad

$$Y \geqq 10 \cdot (7Y - 1\,000), \quad \text{čiže} \quad Y \leqq \frac{10\,000}{69} < 145.$$

Spolu dostávame, že číslo Y je rovné jednému z čísel 143 alebo 144. Rovnica $143 = X \cdot (7 \cdot 143 - 1\,000)$ má riešenie $X = 143$, čo však nie je dvojciferné číslo. Rovnica $144 = X \cdot (7 \cdot 144 - 1\,000)$ má riešenie $X = 18$. Tak sme znovu ukázali, že $X = 18$ a $Y = 144$. Číslo Z určíme ako v prvom riešení.

C – I – 4

Označme $\alpha = |\sphericalangle BAP|$, $0° < \alpha < 60°$ (obr. 5). Pretože uhly BAP a BAK sú súmerne



Obr. 5

združené podľa osi AB, platí tiež $|\sphericalangle BAK| = \alpha$. Pretože $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle BAP| = 60° - \alpha$, zo súmernosti podľa osi CA vyplýva rovnosť $|\sphericalangle CAM| = 60° - \alpha$. Pre veľkosť uhla KAM teda platí

$$|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle BAK| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAM| = \alpha + 60° + (60° - \alpha) = 120°.$$

Zo súmerností podľa osí AB a CA vyplývajú tiež rovnosti $|AK| = |AP| = |AM|$. Preto je trojuholník KAM rovnoramenný a jeho uhol pri hlavnom vrchole A má veľkosť 120°. Podobne sa zdôvodní, že aj trojuholníky LBK a MCL sú rovnoramenné a ich vnútorné uhly pri hlavných vrcholoch B a C majú veľkosť 120°.

Pri posudzovaní podmienky, či trojuholník KLM je rovnoramenný, musíme rozlíšiť, ktoré z jeho strán KL, LM, MK sú zhodné. Vzhľadom na symetriu rozoberieme podrobne iba prípad, keď $|KL| = |MK|$. Z podobných rovnoramenných trojuholníkov KAM a LBK vyplýva, že ich základne MK a KL sú zhodné práve vtedy, keď sú zhodné ich ramená AK a BK. Zapíšme to pomocou dĺžok úsečiek: rovnosť $|KL| = |MK|$ platí práve vtedy, keď platí rovnosť $|AK| = |BK|$, čiže rovnosť $|AP| = |BP|$. Ostatná rovnosť však nastane práve vtedy, keď bod P leží na osi strany AB. Podobne sa zistia podmienky ekvivalentné rovnostiam $|MK| = |LM|$ a $|KL| = |LM|$.

Odpoveď. Trojuholník KLM je rovnoramenný práve vtedy, keď bod P leží na aspoň jednej z osí strán daného rovnostranného trojuholníka ABC. Hľadaná množina je preto zjednotením troch úsečiek – výšok trojuholníka ABC (bez ich krajných bodov).

C – I – 5

Na príklade čísla 1 413 vidíme, že niekedy nie je ľahké spoznať, či dané trojmiestne alebo štvormiestne číslo je magické. Pozrime sa preto najskôr, ako sa magické číslo x

vyjadrí pomocou číslic tých trojmiestnych čísel $\overline{abc}$ a $\overline{cba}$, ktorých je súčtom:

$$x = \overline{abc} + \overline{cba} = (100a + 10b + c) + (100c + 10b + a) = 101(a + c) + 20b.$$

Vidíme, že číslo x je určené číslicami a, b, c tak, že závisí len na b a na súčte $a + c$. Znamená to, že rôzne trojice číslic a, b, c môžu určovať to isté magické číslo x (nemyslíme tým iba trojice líšiace sa vzájomnou výmenou číslic a a c). Ak napr. $a+c = 14$ a $b = 9$, nájdeme tri rôzne vyjadrenia magického čísla 1 594:

$$1\,594 = 599 + 995 = 698 + 896 = 797 + 797.$$

Existujú ešte iné „magické“ vyjadrenia čísla 1 594? Všetko závisí od toho, či sú rovnicou $1\,594 = 101s+20b$ hodnoty súčtu číslic $s = a+c$ a číslice b jednoznačne určené. Z rovnice ihneď vidíme, že číslo s končí číslicou 4, takže $s = 4$ alebo $s = 14$ (iné hodnoty súčtu $s = a + c$ nie sú číslicami a, c dosiahnuteľné). Kým hodnote $s = 14$ zodpovedá (ako dobre vieme) hodnota $b = 9$, pre $s = 4$ dostaneme rovnicu $1\,594 = 404 + 20b$, ktorá nemá celočíselné riešenie.

Poučení uvedeným príkladom sa pokúsime stanoviť počet magických čísel ako počet čísel tvaru $x = 101s + 20b$, kde číslo s (rovné súčtu číslic a a c, ktoré sú *nenulové*) prebieha množinu $\{2, 3, 4, \ldots, 18\}$, zatiaľ čo číslica b prebieha (nezávisle od súčtu s) množinu $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Pretože číslo s nadobúda celkom 17 rôznych hodnôt a číslo b celkom 10 rôznych hodnôt, je počet všetkých dvojíc (s, b), ktoré môžeme do vzťahu $x = 101s + 20b$ dosadiť, rovný číslu $17 \cdot 10 = 170$. Ak teraz ukážeme, že po dosadení ľubovoľných dvoch rôznych dvojíc (s_1, b_1) a (s_2, b_2) dostaneme dve rôzne magické čísla

$$x_1 = 101s_1 + 20b_1 \quad \text{a} \quad x_2 = 101s_2 + 20b_2,$$

bude to znamenať, že počet všetkých hodnôt x (teda *počet* všetkých magických čísel) je tiež rovný číslu 170.

Pripusťme, že pre niektoré dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) platí $x_1 = x_2$. Rovnosť $101s_1 + 20b_1 = 101s_2 + 20b_2$ upravíme na tvar $101(s_1 - s_2) = 20(b_2 - b_1)$, z ktorého vzhľadom na nesúdeliteľnosť čísel 20 a 101 vyplýva, že číslo $b_2 - b_1$ je násobkom čísla 101. Musí sa pritom jednať o nulový násobok, lebo $|b_2 - b_1| \leqq 9$ (b_1 a b_2 sú číslice). Platí teda $b_2 - b_1 = 0$, takže tiež $s_1 - s_2 = 0$, čo spolu znamená, že dvojice (s_1, b_1) a (s_2, b_2) sú rovnaké. Len v tomto prípade je teda rovnosť $x_1 = x_2$ možná.

Súčet všetkých magických čísel (teda čísel tvaru $x = 101s + 20b$) výhodne určíme, keď čísla najskôr usporiadame do obdĺžnikovej schémy (podľa rovnakých hodnôt s do riadkov a podľa rovnakých hodnôt b do stĺpcov)

$$\begin{array}{ccccc}
101\cdot 2+20\cdot 0 & 101\cdot 2+20\cdot 1 & 101\cdot 2+20\cdot 2 & \ldots & 101\cdot 2+20\cdot 9\\
101\cdot 3+20\cdot 0 & 101\cdot 3+20\cdot 1 & 101\cdot 3+20\cdot 2 & \ldots & 101\cdot 3+20\cdot 9\\
101\cdot 4+20\cdot 0 & 101\cdot 4+20\cdot 1 & 101\cdot 4+20\cdot 2 & \ldots & 101\cdot 4+20\cdot 9\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
101\cdot 17+20\cdot 0 & 101\cdot 17+20\cdot 1 & 101\cdot 17+20\cdot 2 & \ldots & 101\cdot 17+20\cdot 9\\
101\cdot 18+20\cdot 0 & 101\cdot 18+20\cdot 1 & 101\cdot 18+20\cdot 2 & \ldots & 101\cdot 18+20\cdot 9
\end{array}$$

a potom čísla sčítame buď po stĺpcoch, alebo po riadkoch. Rozhodnime sa pre sčítanie po stĺpcoch, pričom budeme brať do úvahy, o koľko sa čísla uvažovaného stĺpca líšia od príslušných čísel prvého stĺpca. Súčet čísel v prvom stĺpci je

$$101 \cdot (2 + 3 + \cdots + 18) = 101 \cdot 170,$$

v druhom stĺpci je súčet $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 1$, v treťom $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 2$, atď., až v poslednom (desiatom) stĺpci je súčet čísel rovný $101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot 9$. Súčet všetkých magických čísel je teda rovný

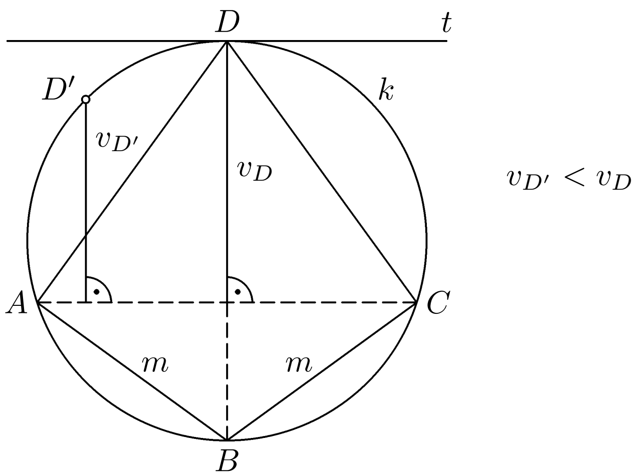
$$10 \cdot 101 \cdot 170 + 17 \cdot 20 \cdot (1 + 2 + \cdots + 9) = 187\,000.$$

C – I – 6

V celom riešení budeme predpokladať, že dané dĺžky m a r spĺňajú nerovnosť $m < 2r$, inak žiadny štvoruholník požadovaných vlastností neexistuje. Strany dĺžky m každého takého štvoruholníka sú totiž tetivami kružnice s polomerom r a najviac jedna z nich môže byť jej priemerom.

Skúmané štvoruholníky rozdelíme do dvoch skupín podľa toho, či sú ich strany danej dĺžky m susedné, alebo protiľahlé.

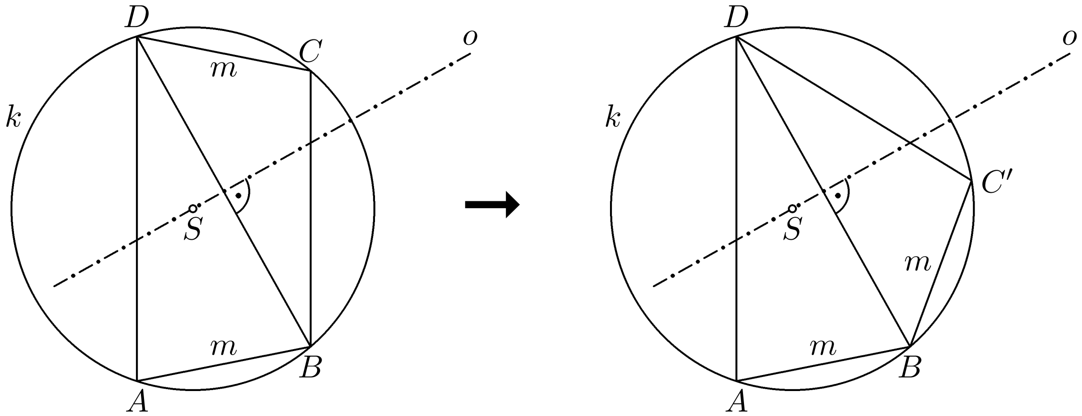
Ľubovoľný štvoruholník z prvej skupiny označíme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |BC| = m$. Uhlopriečka rozdelí tento tetivový štvoruholník na dva trojuholníky ABC a ACD (obr. 6), pritom je jasné, že prvý z nich, trojuholník ABC, je polomerom r



Obr. 6

opísanej kružnice k a dĺžkou m dvoch jeho strán určený (až na zhodnosť) jednoznačne, takže má pevne určený obsah. Preto bude obsah takého štvoruholníka $ABCD$ maximálny práve vtedy, keď bude maximálny obsah trojuholníka ACD. Tento trojuholník má určenú dĺžku strany AC, takže jeho obsah bude maximálny práve vtedy, keď bude maximálna jeho výška v_D z vrcholu D. Pri pevnej polohe trojuholníka ABC bod D prebieha ten oblúk AC kružnice k, ktorý neobsahuje bod B, takže výška v_D je zrejme najväčšia práve vtedy, keď bod D je stredom tohto oblúka, leží teda (rovnako ako bod B) na osi úsečky AC. (Tvrdenie zdôvodníme pomocou dotyčnice t ku kružnici k, ktorá prechádza nájdeným bodom D rovnobežne s priamkou AC, obr. 6). Tak prichádzame k záveru, že v prvej skupine má maximálny obsah ten štvoruholník, ktorý je deltoid (ak $m \neq r\sqrt{2}$), respektíve štvorec (ak $m = r\sqrt{2}$).

Prejdime teraz k štvoruholníkom druhej skupiny. Ľubovoľný z nich označme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |CD| = m$ (obr. 7).

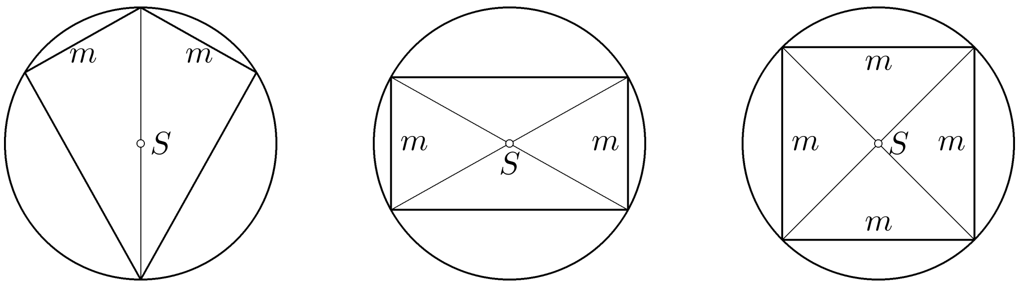


Obr. 7

Obrázok ukazuje, ako k takému štvoruholníku $ABCD$ zostrojiť pomocný štvoruholník $ABC'D$, ktorý má rovnaký obsah ako $ABCD$, je vpísaný do tej istej kružnice k a má susedné strany AB a BC' danej dĺžky m. Konštrukciu teraz popíšeme a spomenuté vlastnosti štvoruholníka $ABC'D$ podrobne zdôvodníme. Bod C' zostrojíme ako obraz bodu C v súmernosti podľa osi o úsečky BD. Pretože kružnica k je súmerná podľa osi každej svojej tetivy, platí $C' \in k$. Trojuholníky BCD a $DC'B$ sú súmerne združené podľa osi o, takže majú rovnaký obsah, preto rovnaký obsah majú aj štvoruholníky $ABCD$ a $ABC'D$. Zo spomenutej súmernosti rovnako vyplývajú rovnosti $|CD| = |BC'|$ a $|BC| = |DC'|$, takže štvoruholníky $ABCD$ a $ABC'D$ sa líšia iba „vymenením" dvoch susedných strán. Tým sú potrebné vlastnosti štvoruholníka $ABC'D$ zdôvodnené. Ako už vieme z predchádzajúceho odstavca, štvoruholník $ABC'D$ má najväčší možný obsah práve vtedy, keď platí rovnosť $|C'D| = |AD|$, ktorú môžeme prepísať ako rovnosť $|BC| = |AD|$. Tá nastane práve vtedy, keď je štvoruholník $ABCD$ rovnobežník (lebo od začiatku predpokladáme, že $|AB| = |CD|$). Každý rovnobežník vpísaný do kružnice je ale pravouholník (súčet protiľahlých vnútorných uhlov tetivového štvoruholníka je $180°$, také uhly sú ale v prípade rovnobežníka zhodné, a teda pravé). Zhrňme výsledok tohto odstavca. V druhej skupine štvoruholníkov má maximálny obsah ten štvoruholník, ktorý je obdĺžnik (ak $m \neq r\sqrt{2}$), respektíve štvorec (ak $m = r\sqrt{2}$.)

Záver. Hľadané štvoruholníky s maximálnym obsahom tvoria v prípade $m < 2r$, $m \neq r\sqrt{2}$, dve skupiny: skupinu zhodných deltoidov a skupinu zhodných obdĺžnikov.

V prípade $m = r\sqrt{2}$ sú všetky hľadané štvoruholníky zhodné štvorce (obr. 8). (V prípade $m \geqq 2r$ je množina uvažovaných štvoruholníkov prázdna).



Obr. 8

C – S – 1

Trojciferné číslo so zápisom $\overline{abc}$ má požadovanú vlastnosť práve vtedy, keď jeho číslice a, b, c spĺňajú rovnosť

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c), \quad \text{čiže} \quad 9a = b + 2c.$$

Pretože $b \leqq 9$ a $c \leqq 9$, platí nerovnosť $b + 2c \leqq 27$. Z rovnosti $9a = b + 2c$ preto vyplýva odhad $a \leqq 3$, takže platí $a \in \{1, 2, 3\}$ (číslica $a = 0$ nie je na začiatku zápisu dovolená). Pre $a = 1$ dostávame rovnicu $9 = b + 2c$, z ktorej vyplýva $c \leqq 4$; pre každé také $c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ je číslica b určená rovnosťou $b = 9 - 2c$. Preto s číslicou $a = 1$ existuje práve 5 vyhovujúcich čísel. Práve toľko je aj vyhovujúcich čísel s číslicou $a = 2$, z rovnice $18 = b + 2c$ totiž vyplýva $c \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ a $b = 18 - 2c$. Nakoniec pre $a = 3$ z rovnice $27 = b + 2c$ vyplýva $b = c = 9$. Hľadaný počet čísel je teda $5 + 5 + 1 = 11$.

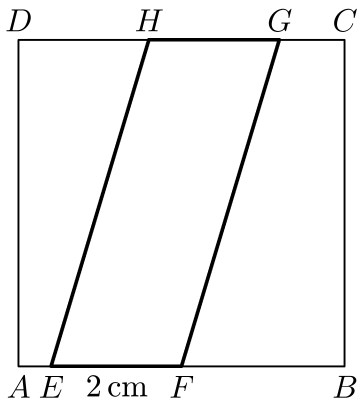
Iné riešenie. Súčet číslic ľubovoľného trojciferného čísla neprevyšuje číslo 27, ktorého devätnásťnásobok je 513. Preto každé vyhovujúce číslo neprevyšuje 513, takže súčet jeho číslic je najviac $4 + 9 + 9 = 22$. Pretože najmenší trojciferný násobok čísla 19 je číslo $114 = 19 \cdot 6$, bude úloha vyriešená, keď zistíme, koľko čísel tvaru $19s$, pričom $s \in \{6, 7, 8, \dots, 22\}$, má súčet číslic rovný práve číslu s. Triviálnym preverením zistíme, že z uvedených 17 čísel vyhovujú práve čísla 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285 a 399. Týchto čísel je 11.

C – S – 2

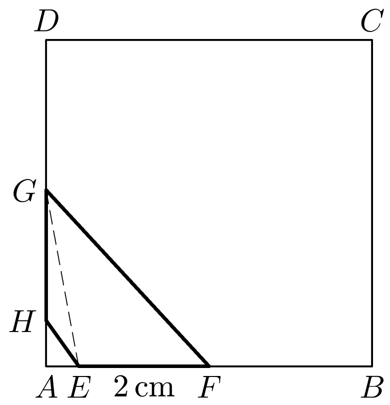
Štvoruholník $EFGH$ môžeme do daného štvorca $ABCD$ umiestniť tromi spôsobmi:

Prvý spôsob. Dve strany dĺžky 2 cm ležia na protiľahlých stranách daného štvorca (obr. 9). Obsah každého takého štvoruholníka (rovnobežníka) je $S = 5 \cdot 2\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$.

Druhý spôsob. Obe strany dĺžky 2 cm ležia na susedných stranách daného štvorca a pritom sú protiľahlými stranami štvoruholníka $EFGH$ (obr. 10). Obsah takého štvoru-



Obr. 9

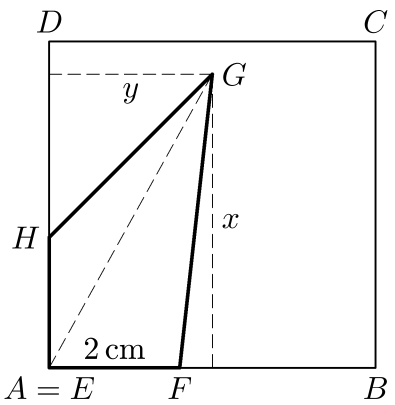


Obr. 10

holníka je

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot |AG| + \frac{1}{2}|GH| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AE| \leqq$$
$$\leqq \big(5 + (5-2)\big)\,\mathrm{cm}^2 = 8\,\mathrm{cm}^2 < 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Tretí spôsob. Obe strany dĺžky 2 cm ležia na susedných stranách daného štvorca a pritom sú susednými stranami štvoruholníka $EFGH$ (obr. 11). Ak označíme postupne



Obr. 11

x a y vzdialenosti bodu G od strán AB a AD (teda výšku trojuholníka EFG na stranu EF a výšku trojuholníka EHG na stranu EH), je obsah takého štvoruholníka

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot x + \frac{1}{2}|AH| \cdot y \leqq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď $x = y = 5\,\mathrm{cm}$, t. j. práve vtedy, keď $G = C$.

Záver. Najväčší možný obsah ($10\,\mathrm{cm}^2$) majú všetky rovnobežníky, ktorých dve strany dĺžky 2 cm ležia na protiľahlých stranách daného štvorca a štyri deltoidy, ktorých jedna uhlopriečka je zároveň uhlopriečkou daného štvorca.

C – S – 3

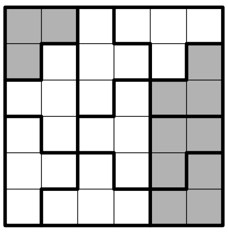
Predpokladajme, že štvorec so stranou 6 jednotiek je vydláždený a dlaždicami typu A a b dlaždicami typu B (nevylučujeme prípad, že $a = 0$ alebo $b = 0$). Pre obsah vydláždenej plochy potom platí rovnosť $36 = 3a + 4b$, z ktorej vyplýva, že číslo a je násobkom štyroch (a číslo b násobkom troch). Preto má rovnica $36 = 3a + 4b$ v obore celých nezáporných čísel ako riešenia iba tieto dvojice (a, b): $(0, 9)$, $(4, 6)$, $(8, 3)$ a $(12, 0)$. Zistíme ďalej, či pre jednotlivé dvojice (a, b) je príslušné vydláždenie daného štvorca možné.

(i) 9 dlaždíc B. Vysvetlíme, prečo také vydláždenie neexistuje. Ofarbime jednotkové štvorčeky celého štvorca ako zvyčajnú šachovnicu. Získame 18 čiernych a 18 bielych „políčok“. Každá dlaždica B pokrýva tri políčka jednej farby a jedno políčko druhej farby. Pripusťme, že celý štvorec pokrýva 9 dlaždíc B, pritom práve x z nich má tú vlastnosť, že pokrývajú po 3 čierne políčka, takže $9 - x$ z nich má tú vlastnosť, že pokrývajú po 1 čiernom políčku. Pre celkový počet čiernych políčok potom platí rovnosť $18 = 3x + (9 - x)$, odkiaľ $x = 9/2$, čo je spor.

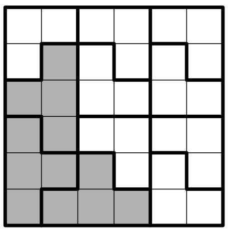
(ii) 4 dlaždice A a 6 dlaždíc B. Možné riešenie vidno na obr. 12.

(iii) 8 dlaždíc A a 3 dlaždice B. Možné riešenie vidno na obr. 13.

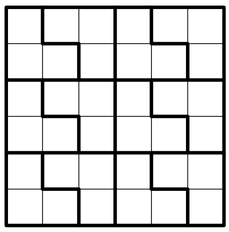
(iv) 12 dlaždíc A. Možné riešenie vidno na obr. 14.



Obr. 12



Obr. 13



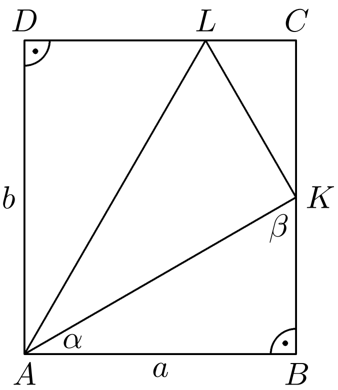
Obr. 14

Poznámka. Uveďme ešte iný argument, prečo nemožno deviatimi dlaždicami B vyplniť uvažovaný štvorec. Dlaždica, ktorá pokrýva rohové políčko, môže byť umiestnená (až na súmernosť podľa uhlopriečky štvorca) jediným spôsobom, napr. tak ako dlaždica B v ľavom dolnom rohu štvorca na obr. 13. Potom ale dlaždica B, ktorá v takom prípade pokrýva druhé políčko zľava v dolnom riadku, musí byť v polohe ako na obrázku. Posledné dve políčka dolného riadku potom už jednou ani dvoma dlaždicami B pokryť nemožno.

C – II – 1

V pravouhlom trojuholníku ABK označme $\alpha = |\sphericalangle BAK|$, $\beta = |\sphericalangle AKB| = 90° - \alpha$

(obr. 15). Rovnaké vnútorné uhly $90°$, α, β majú aj trojuholníky AKL a ADL, lebo



Obr. 15

sú podľa zadania s trojuholníkom ABK podobné. Všimnime si ich (ostré) uhly pri spoločnom vrchole A. Pretože $|\sphericalangle KAD| = 90° - \alpha = \beta$, sú oba uhly KAL a LAD menšie ako β, takže sa rovnajú uhlu α. Pravý uhol BAD je teda polpriamkami AK, AL rozdelený na tri zhodné uhly veľkosti α, odkiaľ $\alpha = 30°$ (a $\beta = 60°$). Z pravouhlých trojuholníkov ADL a ABK potom vyplýva, že $|AK| = |AB|/\cos 30° = 2a/\sqrt{3}$ a $|AL| = |AD|/\cos 30° = 2b/\sqrt{3}$. Odtiaľ vzhľadom na podmienku $a < b$ vyplýva nerovnosť $|AK| < |AL|$, teda preponou v trojuholníku AKL je AL (dlhšia z oboch strán AK, AL). Pre pomer dĺžok odvesny AK a prepony AL potom platí $\cos 30° = |AK| : |AL| = a : b$, takže $a : b = \sqrt{3} : 2$.

Úlohu možno riešiť viacerými obmenenými postupmi, napríklad rozlíšiť dva prípady, keď trojuholník KAL má pravý uhol pri vrchole K respektíve L, a v každom z nich vyjadriť vnútorné uhly všetkých štyroch podobných trojuholníkov (v druhom prípade vtedy ale vyjde $a : b = 2 : \sqrt{3} > 1$, čo odporuje zadaniu úlohy).

C – II – 2

Všimnime si najskôr, že pre čitatele zlomkov z danej rovnice platí vzťah $14 + 51 = 65$. Preto je riešením každá trojica rovnakých prvočísiel $p = q = r$ a navyše pre ľubovoľné riešenie platí: ak sú niektoré dve z čísel p, q, r rovnaké, je rovnaké aj tretie číslo. Budeme teda ďalej predpokladať, že prvočísla p, q, r spĺňajúce danú rovnicu sú navzájom rôzne (a teda navzájom nesúdeliteľné).

Po vynásobení rovnice súčinom pqr dostaneme

$$14qr + 51pr = 65pq,$$

odkiaľ vzhľadom na spomenutú nesúdeliteľnosť vyplýva

$$p \mid 14 = 2 \cdot 7, \quad q \mid 51 = 3 \cdot 17 \quad \text{a} \quad r \mid 65 = 5 \cdot 13.$$

To znamená, že $p \in \{2, 7\}$, $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$. Teraz môžeme utvoriť a do rovnice dosadiť všetkých osem možných trojíc (p, q, r). Zistíme tak, že vyhovuje jedine trojica $(7, 17, 13)$.

Overenie dosadzovaním môžeme skrátiť tak, že vylúčime niektorú z hodnôt $p = 2$, $q = 3$, resp. $r = 5$. Napríklad po dosadení $r = 5$ dostaneme po vydelení piatimi rovnicu $14q + 51p = 13pq$, ktorá nemá celočíselné riešenie p ani pre $q = 3$ $(14 + 17p = 13p)$, ani pre $q = 17$ $(14 + 3p = 13p)$. Iná možnosť: z rovnice $14qr + 51pr = 65pq$ vyplýva $2p(q - r) = 7(2qr + 7pr - 9pq)$, takže súčin $p(q - r)$ je deliteľný siedmimi. Pretože však $q \in \{3, 17\}$ a $r \in \{5, 13\}$, nie je rozdiel $q - r$ deliteľný siedmimi, preto je siedmimi deliteľné číslo p. Podobne možno zdôvodniť, prečo $17 \mid q$ a $13 \mid r$.

Iné riešenie. Z danej rovnice vyjadríme r pomocou p a q:

$$r = \frac{65pq}{51p + 14q} = \frac{5 \cdot 13 \cdot p \cdot q}{51p + 14q}.$$

V ostatnom zlomku sme zvýraznili rozklad čitateľa na (štyri) prvočinitele. Taký zlomok bude rovný niektorému prvočíslu r práve vtedy, keď jeho menovateľ bude súčinom troch prvočiniteľov z čitateľa (iné krátenie zlomku nie je možné). Hľadáme teda situácie, keď platí niektorý z prípadov

$$\begin{aligned} 51p + 14q &= 5 \cdot 13 \cdot p \quad \text{a} \quad r = q,\\ 51p + 14q &= 5 \cdot 13 \cdot q \quad \text{a} \quad r = p,\\ 51p + 14q &= 5 \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad r = 13,\\ 51p + 14q &= 13 \cdot p \cdot q \quad \text{a} \quad r = 5. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou rovníc zistíme, že prvé dva prípady nastanú iba v situácii, keď $p = q$ (vtedy tiež $p = r$). Posledné dva prípady vedú k vyjadreniam

$$q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{5p - 14}, \quad \text{resp.} \quad q = \frac{3 \cdot 17 \cdot p}{13p - 14},$$

z ktorých analogickou úvahou o krátení zlomkov (prípad $p = q$ už môžeme vynechať) s prihliadnutím k zrejmým nerovnostiam $5p - 14 < 17p$ a $13p - 14 < 17p$ dostaneme rovnice

$$5p - 14 = 3p, \quad \text{resp.} \quad 13p - 14 = 3p.$$

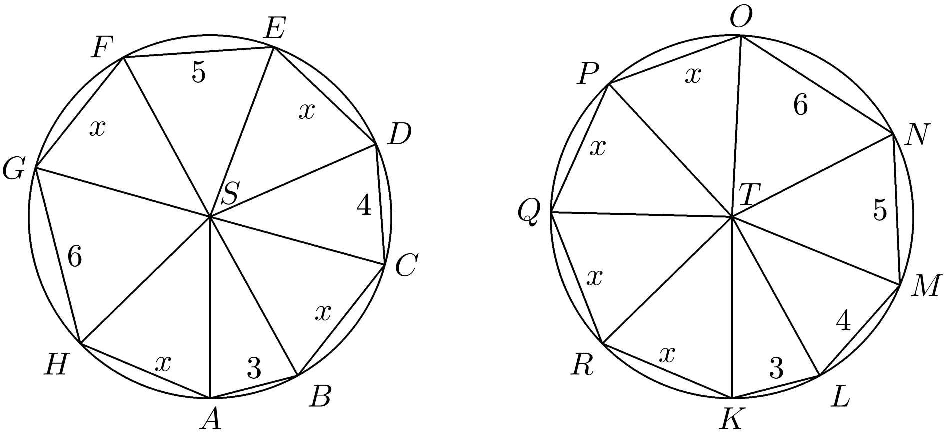
Prvá rovnica má riešenie $p = 7$ (ktorému zodpovedá $q = 17$ a $r = 13$), druhá rovnica celočíselné riešenie nemá.

Odpoveď. Všetky riešenia (p, q, r) sú trojice (p, p, p), kde p je ľubovoľné prvočíslo a trojica $(7, 17, 13)$.

C – II – 3

Rozbor. Okrem hľadaného osemuholníka $ABCDEFGH$ uvažujme ešte pomocný osemuholník $KLMNOPQR$, ktorý je tiež vpísaný do kružnice s polomerom $r = 6$

a ktorého strany spĺňajú podmienky $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$, $|NO| = 6$, $|OP| = |PQ| = |QR| = |RK|$ (obr. 16). Označme S, resp. T stred kružnice s vpísaným



Obr. 16

osemuholníkom $ABCDEFGH$, resp. $KLMNOPQR$. Podľa vety *sss* platia zhodnosti

$$\Delta ABS \simeq \Delta KLT, \quad \Delta CDS \simeq \Delta LMT, \quad \Delta EFS \simeq \Delta MNT, \quad \Delta GHS \simeq \Delta NOT,$$

a preto sú zhodné stredové uhly ASB a KTL, CSD a LTM, ESF a MTN, GSH a NTO. Ďalej podľa vety *sss* sú zhodné trojuholníky BCS, DES, FGS a HAS, rovnako ako trojuholníky OPT, PQT, QRT a RKT. Zo zhodnosti ich uhlov pri hlavnom vrchole S, resp. T preto vyplýva

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BSC| &= \frac{1}{4}(360^\circ - |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle ESF| - |\sphericalangle GSH|) = \\ &= \frac{1}{4}(360^\circ - |\sphericalangle KTL| - |\sphericalangle LTM| - |\sphericalangle MTN| - |\sphericalangle NTO|) = \\ &= |\sphericalangle OTP|.\end{aligned}$$

Využili sme to, že stredy S a T sú *vnútorné* body oboch osemuholníkov (teda súčet všetkých ôsmich stredových uhlov je v oboch prípadoch 360°), lebo v opačnom prípade by jeden z ôsmich stredových uhlov bol rovný súčtu siedmich ostatných; musel by to byť uhol prislúchajúci tetive dĺžky 6, ten je však zrejme menší ako súčet uhlov prislúchajúcich tetivám dĺžok 3, 4 a 5. Trojuholníky BCS a OPT sú preto zhodné podľa vety *sus*, takže štvorice zhodných strán oboch osemuholníkov majú jednu spoločnú dĺžku. Ak teda dokážeme zostrojiť pomocný osemuholník $KLMNOPQR$, bude už konštrukcia osemuholníka $ABCDEFGH$ jednoduchá.

Konštrukcia. Na ľubovoľnej kružnici $t(T; 6)$ zostrojíme v jednom smere body K, L, M, N a O tak, aby $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$ a $|NO| = 6$. Uhol KTO (ten, ktorý neobsahuje body L, M, N) potom rozdelíme na štyri zhodné diely: najskôr zostrojíme priesečník Q kružnice t s osou uhla KTO, potom priesečníky P, R kružnice t s osami uhlov OTQ resp. QTK. Potom pristúpime ku konštrukcii hľadaného osemuholníka $ABCDEFGH$: na kružnici $k(S,6)$ zvolíme bod A a na nej v jednom smere zostrojíme postupne body B, C, D, E, F, G, H tak, aby $|AB| = 3$, $|BC| = |OP|$, $|CD| = 4$, $|DE| = |OP|$, $|EF| = 5$, $|FG| = |OP|$, $|GH| = 6$.

Dôkaz správnosti. Zo zhodnosti siedmich dvojíc

$$\Delta ABS \simeq \Delta KLT, \quad \Delta BCS \simeq \Delta OPT, \quad \Delta CDS \simeq \Delta LMT, \quad \Delta DES \simeq \Delta QRT,$$
$$\Delta EFS \simeq \Delta MNT, \quad \Delta FGS \simeq \Delta QRT, \quad \Delta GHS \simeq \Delta NOT$$

vyplýva zhodnosť uhlov HSA a RTK, a teda aj zhodnosť ôsmej dvojice trojuholníkov HAS a RKT. Preto majú dĺžky strán zostrojeného osemuholníka $ABCDEFGH$ (zhodné so stranami $KLMNOPQR$) všetky potrebné vlastnosti.

Poznámka. O osemuholníku $KLMNOPQR$ sme nemuseli v celom riešení vôbec hovoriť a mohli sme úvahy robiť nasledovne. Uhly zhodné so stredovými uhlami ASB, CSD, ESF, GSH dokážeme zostrojiť. Pre spoločnú veľkosť ω zhodných stredových uhlov BSC, DSE, FSG a HSA potom platí rovnica

$$4\omega + |\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle ESF| + |\sphericalangle GSH| = 360^\circ, \tag{1}$$

ktorú možno ľahko konštrukčne vyriešiť. Osemuholník $KLMNOPQR$ je však pre tento účel ideálnou pomôckou.

C – II – 4

Martin vypočítal hodnotu $(x+y)z$ namiesto $x+yz$, takže podľa zadania platí

$$(x+y)z - (x+yz) = 2\,004, \quad \text{čiže} \quad x\cdot(z-1) = 2\,004 = 12\cdot 167,$$

pričom 167 je prvočíslo. Činitele x a $z-1$ určíme, keď si uvedomíme, že z je dvojciferné číslo, takže $9 \leqq z-1 \leqq 98$. Vidíme, že nutne $z-1 = 12$ a $x = 167$, odkiaľ $z = 13$. Martin teda vypočítal číslo $V = (167+y)\cdot 13$. Číslo V je preto štvorciferné, a pretože sa číta spredu rovnako ako zozadu, má tvar $\overline{abba} = 1\,001a + 110b$. Pretože $1\,001 = 13\cdot 77$, musí platiť rovnosť $(167+y)\cdot 13 = 13\cdot 77a + 110b$, z ktorej vyplýva, že číslica b je deliteľná trinástimi, takže $b = 0$. Po dosadení dostaneme (po delení trinástimi) rovnosť $167 + y = 77a$, ktorá vzhľadom na nerovnosti $10 \leqq y \leqq 99$ znamená, že číslica a sa rovná 3, takže $y = 64$.

V druhej časti riešenia sme mohli postupovať aj nasledovne. Pre číslo $V = (167 + y)\cdot 13$ vychádzajú z nerovností $10 \leqq y \leqq 99$ odhady $2\,301 \leqq V \leqq 3\,458$. Zistíme preto, ktoré z čísel $\overline{2bb2}$, kde $b \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$ a čísel $\overline{3bb3}$, kde $b \in \{0,1,2,3,4\}$, sú deliteľné trinástimi. Aj keď sa týchto dvanásť čísel dá rýchlo otestovať, urobme to všeobecne ich čiastočným vydelením trinástimi:

$$\overline{2bb2} = 2\,002 + 110b = 13\cdot(154+8b) + 6b,$$
$$\overline{3bb3} = 3\,003 + 110b = 13\cdot(231+8b) + 6b.$$

Vidíme, že vyhovuje jedine číslo $\overline{3bb3}$ pre $b = 0$. Vtedy $167 + y = 231$, takže $y = 64$.

Odpoveď. Žiaci mali počítať príklad $167 + 64\cdot 13$, teda $x = 167$, $y = 64$ a $z = 13$.

KATEGÓRIA B

B – I – 1

Označme x a y číslice, ktoré doplníme do čitateľa, resp. menovateľa prvého zlomku. Pretože celý výraz v absolútnej hodnote budeme algebraicky upravovať, kvôli prehľadnejším zápisom zavedieme označenie $N = 111\,111\,111\,110$. Jednotlivé čísla z daného výrazu potom majú vyjadrenia

$$\begin{aligned} 777\,777\,777\,77x &= 7N + x,\\ 777\,777\,777\,77y &= 7N + y,\\ 555\,555\,555\,554 &= 5N + 4,\\ 555\,555\,555\,559 &= 5N + 9. \end{aligned}$$

Skúmaný výraz teda možno zapísať a upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{7N+x}{7N+y} - \frac{5N+4}{5N+9}\right| = \frac{|(7N+x)(5N+9) - (5N+4)(7N+y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\ &= \frac{|(35N^2 + 5xN + 63N + 9x) - (35N^2 + 5yN + 28N + 4y)|}{(7N+y)(5N+9)} =\\ &= \frac{|5\cdot(7-y+x)\cdot N + 9x - 4y|}{(7N+y)(5N+9)}. \end{aligned}$$

Označme ešte čitateľa a menovateľa získaného zlomku

$$C = |5\cdot(7-y+x)\cdot N + 9x - 4y| \qquad \text{a} \qquad J = (7N+y)(5N+9).$$

Ak budeme za x, y dosadzovať rôzne dvojice číslic, menovateľ J bude nadobúdať iba desať rôznych hodnôt v rozmedzí

$$(7N+0)(5N+9) \leqq J \leqq (7N+9)(5N+9).$$

Pozrime sa teraz, aké hodnoty bude nadobúdať čitateľ C. Pretože číslo $9x-4y$ je najviac dvojciferné, zatiaľ čo číslo N dvanásťciferné, rád čitateľa C bude závisieť na tom, či bude činiteľ $(7-y+x)$ rovný nule alebo nie. Preto tieto dve možnosti rozoberieme osobitne.

Prípad $7-y+x=0$. Vtedy platí $y = x+7$ a skúmaný čitateľ C má tvar

$$C = |5\cdot 0\cdot N + (9x-4y)| = |9x - 4(x+7)| = |5x - 28|.$$

Keďže číslica y (rovná $x+7$) je najviac 9, je číslica x rovná 0, 1 alebo 2, takže výraz $|5x-28|$ sa rovná 28, 23 alebo 18. *Najmenšia* hodnota čitateľa C je preto rovná 18 a dostaneme ju jedine pre $x = 2$ a $y = 9$. Šťastnou „zhodou okolností“ má práve pre $y = 9$ menovateľ J *najväčšiu* hodnotu, takže

$$\min\left\{\frac{C}{J}\right\} = \frac{18}{(7N+9)(5N+9)}.$$

Prípad $7 - y + x \neq 0$. Ukážme, že hodnoty čitateľa C (teda aj hodnoty zlomku C/J) sú v tomto prípade „obrovské“ v porovnaní s prvým prípadom. Z nerovnosti $7-y+x \neq 0$ vyplýva odhad $|7 - y + x| \geqq 1$ (číslo $7 - y + x$ je celé), teda máme

$$C = |5 \cdot (7 - y + x) \cdot N + 9x - 4y| \geqq 5 \cdot |7 - y + x| \cdot N - |9x - 4y| \geqq 5N - |9x - 4y|.$$

Pretože x a y sú číslice, platí zrejme $|9x-4y| \leqq 81$. Z ostatného odhadu C a maximálnej hodnoty J preto vyplýva nerovnosť

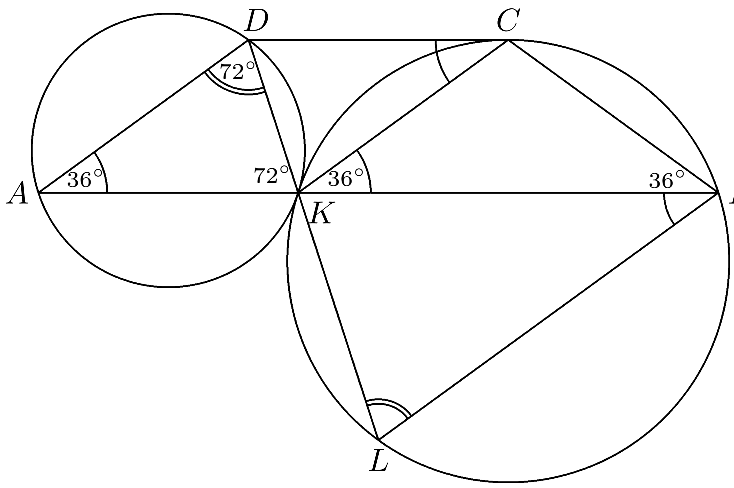
$$\frac{C}{J} \geqq \frac{5N - 81}{(7N+9)(5N+9)}.$$

Ostatný zlomok je „mnohonásobne“ väčší ako zlomok v závere prvého prípadu, lebo oba zlomky majú rovnaký menovateľ, zatiaľ čo pre čitatele zrejme platí $5N - 81 \ggg 18$ (nerovnosť $5N - 81 > 18$ platí už od hodnoty $N = 20$).

Záver. Do čitateľa doplníme číslicu $x = 2$, do menovateľa číslicu $y = 9$.

B – I – 2

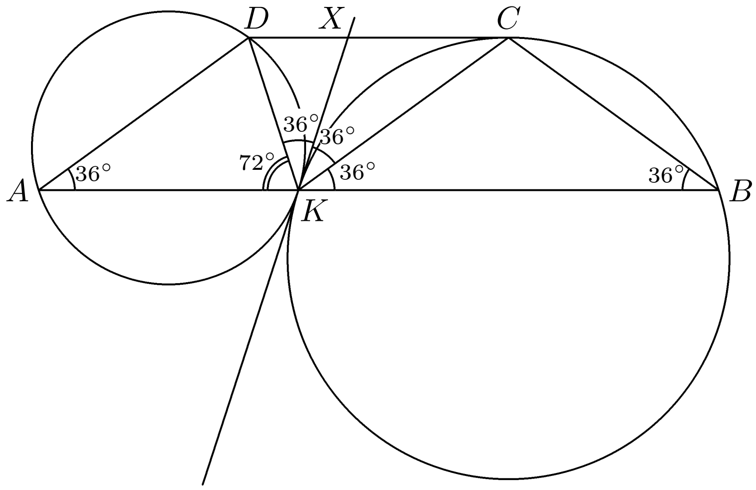
V rovnoramennom trojuholníku AKD poznáme uhol DAK oproti základni KD. Môžeme dopočítať zvyšné dva uhly pri základni (obr. 17): $|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle AKD| = (180° - |\sphericalangle DAK|)/2 = 72°$. Štvoruholník $AKCD$ má protiľahlé strany AK a CD zhodné a rovnobežné, takže je to rovnobežník, preto priamky KC a AD sú rovnobežné. Uhly DAK a CKB sú teda súhlasné a uhly CKB a KCD striedavé. Preto $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KCD| = 36°$. Uhol DKC je doplnkom uhlov AKD a CKB do priameho uhla, platí teda $|\sphericalangle DKC| = 180° - 36° - 72° = 72°$.



Obr. 17

Na polpriamke opačnej k polpriamke KD zvoľme bod L tak, že $|KL| = |AD|$. Potom $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle AKD| = 72°$ a $|\sphericalangle CKL| = |\sphericalangle LKB| + |\sphericalangle CKB| = 108°$. Dopočítaním uhlov v lichobežníku $ABCD$ dostávame $|\sphericalangle BCD| = (360° - 2 \cdot 36°)/2 = 144°$ a môžeme vyjadriť veľkosť uhla BCK: $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle KCD| = 144° - 36° = 108°$. Teraz už vieme, že $|KL| = |CB|$ a $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle KCB|$, čo znamená, že $LBCK$ je rovnoramenný lichobežník, možno mu teda opísať kružnicu (zhodnú s kružnicou opísanou trojuholníku KBC). Ďalej môžeme z lichobežníka $LBCK$ dopočítať $|\sphericalangle KLB| = (360° - 2 \cdot 108°)/2 = 72° = |\sphericalangle KDA|$. Z tejto rovnosti vyplýva, že $AD \parallel BL$, takže trojuholníky ADK a BLK sú navzájom rovnoľahlé podľa stredu K. Rovnoľahlé sú potom aj kružnice im opísané. Pretože obe prechádzajú stredom K spomenutej rovnoľahlosti, majú v tomto bode vonkajší dotyk.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení zistíme, že $|AKD| = 72°$. Štvoruholník $AKCD$ je rovnobežník (obr. 18), takže $|CK| = |AD|$. Z rovnosti $|CK| = |BC|$ v troju-



Obr. 18

holníku KBC vyplýva, že $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KBC| = 36°$. Preto na základni CD existuje bod X taký, že $|\sphericalangle AKX| = 108°$ (a $|\sphericalangle BKX| = 72°$). Potom $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle AKX| - |\sphericalangle AKD| = 108° - 72° = 36°$, a teda $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle DAK|$. Takže uhol DKX je úsekovým uhlom prislúchajúcim oblúku DAK v kružnici opísanej trojuholníku AKD, čo znamená, že priamka KX je jej dotyčnicou. Podobne $|\sphericalangle CKX| = |\sphericalangle BKX| - |\sphericalangle BKC| = 72° - 36° = 36° = |\sphericalangle KBC|$, takže KX je dotyčnicou aj ku kružnici opísanej trojuholníku KBC. Kružnice opísané trojuholníkom AKD a KBC majú teda spoločnú dotyčnicu KX prechádzajúcu spoločným bodom K. Obe kružnice sa preto v tomto bode dotýkajú.

B – I – 3

Označme $k = \lfloor x \rfloor$, teda $x = k + \alpha$, $0 \leqq \alpha < 1$. Daná rovnica má potom tvar $(k+\alpha)k - 5(k+\alpha) + 7 = 0$. Odtiaľ $\alpha = (k^2 - 5k + 7)/(5 - k)$. Hľadáme teda celé čísla k, pre

ktoré platí
$$0 \leqq \frac{k^2-5k+7}{5-k} < 1. \tag{1}$$
Každú z týchto nerovností vyšetríme osobitne. Pretože kvadratický trojčlen k^2-5k+7 má záporný diskriminant, platí $k^2-5k+7 \geqq 0$ pre každé reálne číslo k. Takže ľavá nerovnosť v (1) platí práve vtedy, keď $5-k>0$, čiže $k<5$. Vyriešme pravú nerovnicu:
$$\begin{aligned}\frac{k^2-5k+7}{5-k} &< 1,\\ \frac{k^2-5k+7-(5-k)}{5-k} &< 0,\\ \frac{k^2-4k+2}{5-k} &< 0,\\ \frac{(k-2-\sqrt{2})(k-2+\sqrt{2})}{5-k} &< 0.\end{aligned}$$
Podľa polohy čísel $2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$ a 5 na číselnej osi zistíme, že ostatná nerovnosť platí práve vtedy, keď k patrí do množiny $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) \cup (5,\infty)$. Nerovnosti (1) teda platia súčasne práve vtedy, keď k leží v intervale $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. Tejto podmienke vyhovujú iba tri celé čísla 1, 2 a 3. Pre $k=1$ dopočítame $\alpha=3/4$, pre $k=2$ vyjde $\alpha=1/3$ a pre $k=3$ je $\alpha=1/2$. Celkom dostávame tri riešenia $x_1=7/4$, $x_2=7/3$ a $x_3=7/2$.

Iné riešenie. Označíme $k=\lfloor x\rfloor$ ako v prvom riešení a z rovnice $kx-5x+7=0$ vyjadríme x v tvare $x=7/(5-k)$. Teraz hľadáme celé čísla k, pre ktoré platí $k \leqq 7/(5-k) < k+1$. Obe nerovnosti sú splnené jedine pre celé čísla 1, 2 a 3, ktorým zodpovedajú riešenia 7/4, 7/3 a 7/2.

B – I – 4

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 24 práve vtedy, keď je deliteľné súčasne (navzájom nesúdeliteľnými) číslami 3 a 8. Pre ciferný súčet prirodzeného čísla k zaveďme označenie $S(k)$. Číslo a_n je deliteľné tromi práve vtedy, keď je tromi deliteľný jeho ciferný súčet, teda číslo $S(1)+S(2)+\dots+S(n)$. Zvyšok po delení tromi tohto súčtu závisí iba na zvyškoch (po delení tromi) jednotlivých sčítancov $S(k)$. Pretože po delení tromi dáva číslo $S(k)$ rovnaký zvyšok ako číslo k, dávajú čísla $S(1), S(4), S(7), \dots$ zvyšok 1, čísla $S(2), S(5), S(8), \dots$ zvyšok 2 a čísla $S(3), S(6), S(9), \dots$ zvyšok 0. Preto napríklad číslo $S(a_{14})$, teda súčet $S(1)+S(2)+\dots+S(14)$, dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako súčet
$$(1+2+0)+(1+2+0)+(1+2+0)+(1+2+0)+1+2.$$
Podľa uzátvorkovaných trojíc ľahko vidíme, že tento súčet je deliteľný tromi. Pretože všeobecne súčet $S(3i-2)+S(3i-1)+S(3i)$ je deliteľný tromi pre každé prirodzené i, môžeme podobným spôsobom uzátvorkovať každý súčet
$$S(1)+S(2)+\dots+S(n)$$

a zistiť, že jeho zvyšok po delení tromi je rovný 1, ak $n = 3k - 2$ a je rovný 0, ak $n = 3k - 1$ alebo $n = 3k$.

Čísla a_n teda budú deliteľné tromi práve vtedy, keď n bude tvaru $3k$ alebo $3k - 1$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Teraz rozoberme, kedy budú čísla a_n naviac deliteľné ôsmimi. Prirodzené číslo je deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď je deliteľné ôsmimi posledné trojčíslie jeho zápisu v desiatkovej sústave. Naše úvahy budú závisieť na počte číslic čísla n.

Pre aspoň trojciferné čísla n je a_n deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď je deliteľné ôsmimi číslo n. Pretože sa zvyšky čísel a_n po delení tromi opakujú po troch a zvyšky po delení ôsmimi po ôsmich číslach a_n, budú sa zvyšky po delení číslom 24 opakovať po najmenšom spoločnom násobku týchto periód, teda po dvadsiatich štyroch. Pre trojciferné n ľahko zistíme, že podmienke v úlohe vyhovujú čísla tvaru $104+24k$ a $120+24k$ (n musí byť deliteľné ôsmimi a dávať zvyšok dva alebo nula po delení tromi). Do 10 000 máme 413 čísel tvaru $104 + 24k$ $(413 = \lfloor(10\,000 - 104)/24\rfloor + 1)$ a 412 čísel tvaru $120 + 24k$.

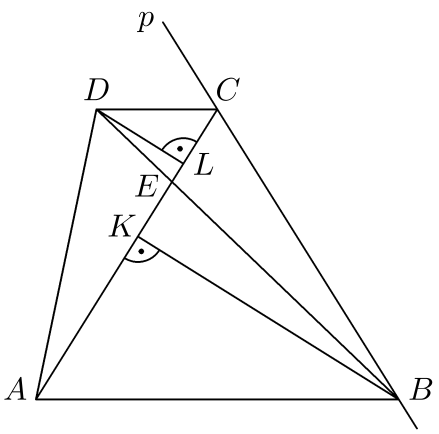
Aby pri dvojcifernom n bolo číslo a_n deliteľné ôsmimi, musí byť deliteľné aj štyrmi. O deliteľnosti štyrmi rozhoduje posledné dvojčíslie, takže štyrmi budú deliteľné práve všetky tie a_n, pre ktoré je n deliteľné štyrmi. Číslo $n - 1$ je potom nepárne, teda aj a_{n-1} je číslo nepárne a číslo $100a_{n-1}$ dáva zvyšok štyri po delení ôsmimi. Potom číslo $a_n = 100a_{n-1} + n$ bude deliteľné ôsmimi práve vtedy, keď n bude tiež dávať zvyšok štyri po delení ôsmimi, bude teda tvaru $8k+4$. Spolu s podmienkou na deliteľnosť tromi dostávame, že vyhovujúce dvojciferné čísla n majú (rovnako ako vyššie) periódu 24 a sú tvaru $n = 12+24k$ a $n = 20+24k$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Po sto tak máme spolu $4+4 = 8$ čísel.

Pri jednocifernom n ľahko zistíme, že zo všetkých párnych čísel a_n vyhovuje iba $a_6 = 123\,456$.

Celkom vyhovuje 834 čísel.

B – I – 5

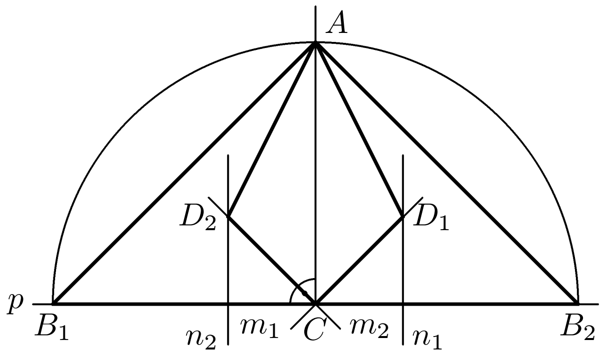
Predpokladajme, že $ABCD$ je hľadaný lichobežník a K, L sú päty kolmíc z vrcholov B, D na priamku AC (obr. 19). Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov BKE a DLE vyplýva, že dĺžky strán BK a DL, t. j. odvesien v spomenutých trojuholníkoch, sú v rovnakom pomere ako dĺžky ich prepôn BE a DE, teda $3 : 1$. BK a DL sú však aj výškami v trojuholníkoch ABC a ACD, a to na spoločnú stranu AC. Obsahy týchto trojuholníkov sú teda tiež v pomere $3 : 1$, takže obsah lichobežníka $ABCD$ je rovný $4P/3$, kde P je obsah rovnoramenného trojuholníka ABC. Výška tohto trojuholníka z bodu A na stranu BC je daná (vzdialenosť bodu A od priamky p). Obsah trojuholníka ABC bude teda minimálny, keď bude minimálna dĺžka strany BC, a teda aj AC, t. j. keď úsečka AC bude kolmá na p.



Obr. 19

Konštrukcia. Najskôr zostrojíme bod C (päta kolmice z A na p). Vrchol B nájdeme ako priesečník priamky p s kružnicou $k(C, |AC|)$ (dve možnosti). Vrchol D je priesečníkom priamky m vedenej bodom C rovnobežne s AB a priamky n rovnobežnej s AC vo vzdialenosti $4|BC|/3$ od vrcholu B vnútri polroviny opačnej k ACB.

Záver. Úloha má dve riešenia súmerne združené podľa priamky $AC \perp p$ (obr. 20).



Obr. 20

B – I – 6

Najskôr ukážme, že pre číslo M s prvočíselným rozkladom $M = \prod_{i=1}^{n} p_i^{c_i}$ (p_i sú rôzne prvočísla) je počet riešení rovnice $\mathrm{NSN}(x, y) = M$ rovný $\prod_{i=1}^{n}(2c_i + 1)$. Naozaj, každé riešenie (x, y) danej rovnice má tú vlastnosť, že ľubovoľné prvočíslo p_i ($i = 1, \dots, n$) delí aspoň jedno z čísel x a y (a to najviac s takým exponentom, s akým delí M) a žiadne iné prvočísla už ani x, ani y nedelia. Čísla x a y teda majú tvar

$$x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i}, \quad y = \prod_{i=1}^{n} p_i^{b_i}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}_0, \quad \text{a naviac} \quad \max(a_i, b_i) = c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Čísla x a y tak jednoznačne určujú n-tice čísel a_i a b_i a naopak, sú nimi jednoznačne určené. Všetky riešenia danej rovnice sú teda popísané dvojicami n-tíc prirodzených čísel takých, že na i-tej pozícii je v oboch n-ticiach číslo z množiny $\{0, \dots, c_i\}$ a aspoň v jednej z nich sa priamo rovná c_i. Takých n-tíc je $\prod_{i=1}^{n}(2c_i + 1)$, nakoľko dve n-tice čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ môžeme považovať za n dvojíc čísel (a_1, b_1), (a_2, b_2), …, (a_n, b_n). Ľubovoľná dvojica (a_i, b_i) môže nezávisle nadobúdať $(2c_i + 1)$ rôznych hodnôt $(0, c_i)$, $(1, c_i)$, …, $(c_i - 1, c_i)$, (c_i, c_i), $(c_i, c_i - 1)$, …, $(c_i, 1)$, $(c_i, 0)$. Podľa kombinatorického pravidla súčinu dostávame vyššie uvedený počet.

Prvočíselný rozklad čísla 1 001 je $7 \cdot 11 \cdot 13$. Aby mala daná rovnica práve 1 001 riešení, musia exponenty c_i z prvočíselného rozkladu čísla M (obsahujúceho podľa zadania najmenej tri prvočísla, a to 2, 3 a 5) spĺňať rovnosť $\prod_{i=1}^{n}(2c_i + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 13$. V prvočíselnom rozklade čísla M teda musia byť zastúpené práve tri prvočísla, a to s exponentmi $(7-1)/2 = 3$, $(11-1)/2 = 5$ a $(13-1)/2 = 6$. Pretože M má byť deliteľné číslom $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$, teda prvočíslami 2, 3 a 5 so zodpovedajúcimi exponentmi, sú jediné možné voľby pre M čísla $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^6$, $2^5 \cdot 3^6 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3$, $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^5$.

B – S – 1

Predpokladajme najskôr, že celé číslo $k = \lfloor x \rfloor$ poznáme, dosaďme ho do rovnice ako „parameter“ a získanú rovnicu vyriešme:

$$\begin{aligned} x &= k + \frac{x}{2\,004}, \\ 2\,004x &= 2\,004k + x, \\ x &= \frac{2\,004k}{2\,003}. \end{aligned}$$

Keď budeme do ostatného vzťahu dosadzovať jednotlivé celé čísla k, bude príslušné x naozaj riešením skúmanej rovnice vtedy, keď sa jeho celá časť bude rovnať práve číslu k, teda keď budú platiť nerovnosti

$$k \leqq \frac{2\,004k}{2\,003} < k + 1.$$

Zistíme, ktoré celé k vyhovujú obom nerovnostiam. Ľavá nerovnosť je ekvivalentná s nerovnosťou $k \geqq 0$, pravá nerovnosť s nerovnosťou $k < 2\,003$. Hľadané k sú teda práve hodnoty $k \in \{0, 1, \dots, 2\,002\}$. Každá z nich určuje jediné riešenie x, takže všetkých riešení x zadanej rovnice je práve 2 003. Dodajme, že vyhovujúce k možno určiť aj úpravou odvodeného vzťahu na tvar

$$x = \frac{2\,004k}{2\,003} = k + \frac{k}{2\,003},$$

z ktorého vidno, že číslo k je celou časťou čísla x práve vtedy, keď platia nerovnosti

$$0 \leqq \frac{k}{2\,003} < 1, \quad \text{čiže} \quad 0 \leqq k < 2\,003.$$

Iné riešenie. Pretože pre každé reálne x platí $\lfloor x \rfloor \leqq x \leqq \lfloor x \rfloor + 1$, porovnaním so zadanou rovnicou zistíme, že každé riešenie x musí spĺňať nerovnosti

$$0 \leqq \frac{x}{2\,004} < 1, \quad \text{čiže} \quad 0 \leqq x < 2\,004.$$

Číslo x spĺňajúce ostatné nerovnosti bude riešením skúmanej rovnice práve vtedy, keď hodnota $x - x/2\,004$ bude celočíselná. Pretože platí

$$x - \frac{x}{2\,004} = \frac{2\,003x}{2\,004},$$

dá sa ostatná podmienka vysloviť takto: číslo $2\,003x$ je celočíselným násobkom čísla $2\,004$. To vzhľadom na nerovnosti $0 \leqq 2\,003x < 2\,003 \cdot 2\,004$ znamená, že číslo $2\,003x$ sa rovná niektorému z čísel

$$0 \cdot 2\,004,\ 1 \cdot 2\,004,\ 2 \cdot 2\,004,\ \ldots,\ 2\,002 \cdot 2\,004,$$

takže skúmaná rovnica má práve $2\,003$ riešení

$$\frac{0 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{1 \cdot 2\,004}{2\,003}, \frac{2 \cdot 2\,004}{2\,003}, \ldots, \frac{2\,002 \cdot 2\,004}{2\,003}.$$

B – S – 2

Kvôli podmienke (i) môže byť v množine $\mathcal{M}$ najviac jedno z čísel $11, 22, 33, \ldots, 99$ zapísaných dvoma rovnakými číslicami, ktoré sú všetky deliteľné jedenástimi. Kvôli podmienke (ii) a deliteľnosti dvoma tam zasa nemôže byť žiadne číslo zapísané dvoma rôznymi párnymi číslicami. S jednou párnou číslicou môže byť v $\mathcal{M}$ najviac jedna dvojica čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$.

Ostáva zistiť, koľko môže množina $\mathcal{M}$ obsahovať dvojíc čísel $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ zapísaných dvoma rôznymi nepárnymi číslicami a a b. Žiadne z týchto čísel nesmie byť deliteľné tromi (ak je číslo $\overline{ab}$ deliteľné tromi, je také aj číslo $\overline{ba}$), preto do úvahy prichádza iba sedem dvojíc takých čísel: $(13, 31)$, $(17, 71)$, $(19, 91)$, $(35, 53)$, $(37, 73)$, $(59, 95)$ a $(79, 97)$. Kvôli deliteľnosti piatimi, siedmimi a devätnástimi však môže byť v $\mathcal{M}$ iba jedna z dvojíc $(19, 91)$, $(35, 53)$ a $(59, 95)$, teda najviac päť zo všetkých siedmich vypísaných dvojíc.

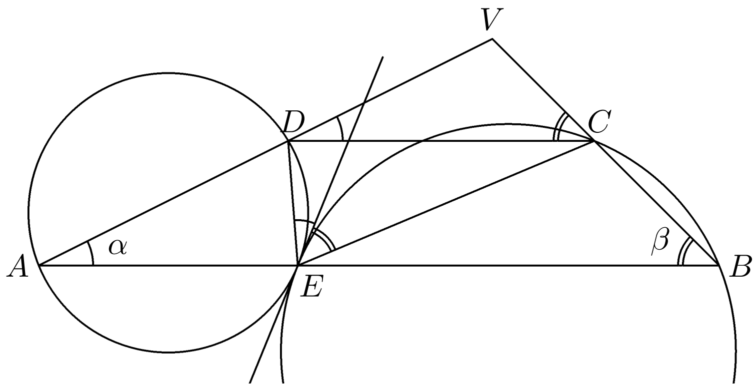
Celkove zisťujeme, že množina $\mathcal{M}$ obsahuje najviac $1+2+2\cdot 5 = 13$ čísel. Príkladom trinásťprvkovej množiny je

$$\mathcal{M} = \{11, 23, 32, 13, 31, 17, 71, 35, 53, 37, 73, 79, 97\}.$$

(Existujú aj iné príklady, naše úvahy však ukazujú, že každá trinásťprvková množina $\mathcal{M}$ musí obsahovať čísla 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97 a jednu z dvojíc $(35, 53)$ alebo $(59, 95)$; dvojica $(19, 91)$ je vylúčená, lebo číslo 91 je násobkom čísla 13.)

B – S – 3

Označme α a β postupne vnútorné uhly pri vrcholoch A a B (obr. 21). Bodom E prechádza spoločná dotyčnica oboch uvažovaných kružníc, uhol DEC je teda súčtom



Obr. 21

úsekových uhlov prislúchajúcich tetive DE v jednej kružnici (s obvodovým uhlom α) a tetive EC v druhej kružnici (s obvodovým uhlom β). Jeho veľkosť je preto $\alpha + \beta$. A pretože veľkosť uhla CVD je $180° - (\alpha + \beta)$, zisťujeme, že v štvoruholníku $CVDE$ sa uhly pri protiľahlých vrcholoch E a V dopĺňajú do $180°$. To, ako vieme, znamená, že $CVDE$ je tetivový štvoruholník, t. j. bod E leží na kružnici opísanej trojuholníku CDV.

B – II – 1

Ako vieme, každé prirodzené číslo k dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako číslo $S(k)$ rovné súčtu číslic pôvodného čísla k. Číslo a_n preto dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako súčet $S(1^2) + S(2^2) + \dots + S(n^2)$, teda aj ako súčet $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Dvoma spôsobmi ukážeme, že ostatný súčet je deliteľný tromi práve vtedy, keď číslo n je tvaru $9k - 5$, $9k - 1$ alebo $9k$, pričom k je prirodzené číslo.

Pri *prvom spôsobe* využijeme známy vzťah

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1}$$

z ktorého vyplýva, že skúmaný súčet je deliteľný tromi práve vtedy, keď je súčin $n(n+{}$ $+1)(2n+1)$ deliteľný deviatimi. Pretože čísla n, $n+1$ a $2n+1$ sú navzájom nesúdeliteľné, hľadáme práve tie n, pre ktoré je deliteľné deviatimi jedno z čísel n, $n+1$ alebo $2n+1$, a to sú postupne čísla tvaru $9k$, $9k - 1$, $9k - 5$.

Druhý spôsob je založený na pozorovaní, že zvyšky čísel $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, \ldots$ po delení tromi sú $1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$, opakujú sa teda s periódou dĺžky 3. Skutočne, čísla $(k+3)^2$ a k^2 dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi, lebo ich rozdiel je číslo $3(2k+3)$, čo je násobok troch. Sčítaním uvedených zvyškov dostaneme postupne zvyšky prvých deviatich súčtov (1): 1, 2, 2, 0, 1, 1, 2, 0, 0. Zvyšky ďalších súčtov (1) sa začnú periodicky opakovať. (Vyplýva to z toho, že predchádzajúci súčet deviatich čísel dáva nulový zvyšok a súčasne je počet sčítancov násobkom periódy 3 sčítaných zvyškov.)

Vieme už, ktoré čísla a_n sú deliteľné tromi. Zaoberajme sa teraz jednoduchšou otázkou, ktoré a_n sú deliteľné štyrmi. Ukážeme, že sú to všetky a_n s párnym $n > 2$ (a žiadne iné). Číslo a_n s nepárnym n je totiž nepárne, číslo a_2 sa rovná 14 a číslo a_n s párnym $n > 2$ končí rovnakým dvojčíslím ako číslo n^2, takže je také a_n (rovnako ako spomenuté dvojčíslie) deliteľné štyrmi.

Keď spojíme výsledky o deliteľnosti tromi a štyrmi, zistíme, že číslo a_n je deliteľné dvanástimi práve vtedy, keď číslo n je tvaru $18k-14$, $18k-10$ alebo $18k$, pričom k je ľubovoľné prirodzené číslo. Pretože $100\,000 = 5\,556 \times 18 - 8$, je medzi prirodzenými číslami od 1 do 100 000 práve 5 556 čísel tvaru $18k-14$, 5 556 čísel tvaru $18k-10$ a 5 555 čísel tvaru $18k$. Spolu je to 16 667 čísel.

B – II – 2

Pre koeficient a musí platiť $a \neq 0$ a $a \neq -1$, aby všetky uvažované trojčleny boli naozaj kvadratické trojčleny. Ako vieme, kvadratický trojčlen má dvojnásobný koreň práve vtedy, keď je jeho diskriminant nulový. Zostavme preto diskriminanty všetkých troch trojčlenov so zväčšenými koeficientmi:

$$\begin{aligned}
(a+1)x^2 + bc + c &\quad \text{má diskriminant} \quad D_1 = b^2 - 4(a+1)c,\\
ax^2 + (b+1)x + c &\quad \text{má diskriminant} \quad D_2 = (b+1)^2 - 4ac,\\
ax^2 + bx + (c+1) &\quad \text{má diskriminant} \quad D_3 = b^2 - 4a(c+1).
\end{aligned}$$

Hľadáme teda reálne čísla a, b, c, pre ktoré platí $a \neq 0$, $a \neq -1$ a $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

Z rovnosti $D_1 = D_3$ vyplýva $c = a$, takže $D_2 = (b+1)^2 - 4a^2 = (b+1-2a)(b+1+2a)$. Rovnosť $D_2 = 0$ potom znamená, že platí $b = \pm 2a - 1$, a preto $D_1 = (\pm 2a-1)^2 - 4(a+1)a = 4a^2 \mp 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1 \mp 4a - 4a$, teda $D_1 = -8a + 1$ alebo $D_1 = 1$. Preto z rovnosti $D_1 = 0$ vyplýva $a = 1/8$, $b = 2a - 1 = -3/4$ a $c = a = 1/8$. (Skúška je jednoduchá, nie je však nutná, pretože naším postupom máme zaručené rovnosti $D_1 = D_3$, $D_2 = 0$ a $D_1 = 0$.)

Odpoveď. Úlohe vyhovuje jediný trojčlen $x^2/8 - 3x/4 + 1/8$.

B – II – 3

Kladné číslo x je riešením rovnice s daným n práve vtedy, keď je číslo nx prirodzené a platia nerovnosti

$$nx - 1 \leqq x\sqrt{n^2-1} < nx.$$

Pravá nerovnosť platí pre každé $x > 0$, lebo zrejme platí $\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2} = n$. Zostáva teda vyriešiť ľavú nerovnicu (vzhľadom na neznámu x). Po jednoduchej úprave dostávame

$$x\bigl(n - \sqrt{n^2-1}\bigr) \leqq 1,$$

$$x \leqq \frac{1}{n-\sqrt{n^2-1}} = n + \sqrt{n^2-1}.$$

Využili sme to, že výraz $n - \sqrt{n^2-1}$ je kladný a v súčine so združeným výrazom $n + \sqrt{n^2-1}$ dáva číslo 1. Po vynásobení oboch strán odvodenej nerovnosti číslom n dostaneme pre prirodzené číslo $k = nx$ ekvivalentnú podmienku

$$k \leqq n^2 + n\sqrt{n^2-1},$$

ktorá je splnená práve pre $k \in \{1, 2, \dots, 2n^2-1\}$, lebo pre druhý sčítanec z pravej strany ostatnej nerovnosti zrejme platia celočíselné odhady

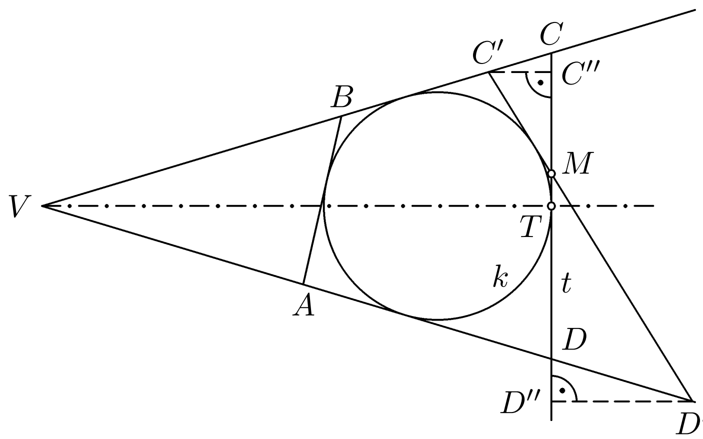
$$n^2 - 1 \leqq n\sqrt{n^2-1} < n^2$$

(znovu využívame iba nerovnosť $\sqrt{n^2-1} < n$). Všetky riešenia danej rovnice majú tvar $x = k/n$ a tvoria tak množinu zlomkov

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{2n^2-1}{n}\right\}.$$

B – II – 4

Kružnica vpísaná do hľadaného štvoruholníka je kružnicou k pripísanou strane AB trojuholníka BAV. Označme T ten z dvoch priesečníkov osi uhla AVB s kružnicou k, ktorý je ďalej od vrcholu V (obr. 22). Hľadané body C a D nájdeme ako priesečníky dotyčnice t v bode T ku kružnici k postupne s priamkami VB a VA. Dokážme, že takto zostrojený štvoruholník má zo všetkých štvoruholníkov vyhovujúcich podmienkam úlohy najmenší obsah.



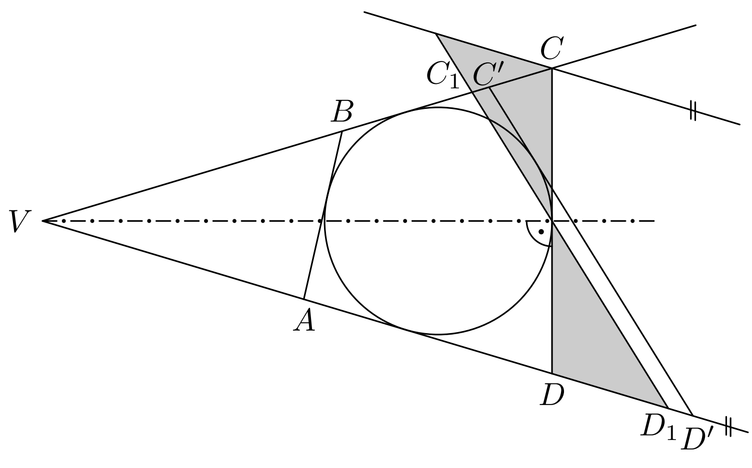
Obr. 22

Označme C', D' vrcholy iného dotyčnicového štvoruholníka s vpísanou kružnicou k (priamka $C'D'$ je dotyčnicou kružnice k). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že priesečník M dotyčníc t a $C'D'$ leží vnútri úsečky TC. To znamená, že platí $|MD| > |MC|$ (obr. 22). Označme C'' a D'' zodpovedajúce päty kolmíc spustených z bodov C' a D' na priamku t. Bod C'' leží vnútri úsečky MC a D'' na polpriamke MD mimo úsečky MD, takže $|MC''| < |MC| < |MD| < |MD''|$ a z podobnosti pravouhlých trojuholníkov $MC'C''$ a $MD'D''$ vyplýva $|C'C''| < |D'D''|$. Trojuholník DMD' má teda väčší obsah ako trojuholník CMC'. Rozdiel ich obsahov je však rovný rozdielu obsahov štvoruholníkov $ABC'D'$ a $ABCD$, teda obsah štvoruholníka $ABC'D'$ je väčší ako obsah štvoruholníka $ABCD$.

Iné riešenie. Rovnako ako v prvom riešení označme C, D priesečníky dotyčnice t pripísanej kružnice k s ramenami VB, VA. Ak C', D' sú vrcholy iného dotyčnicového štvoruholníka s vpísanou kružnicou k, pre obsahy dotyčnicových štvoruholníkov $ABCD$ a $ABC'D'$ platí

$$S_{ABCD} = S_{VCD} - S_{VAB},$$
$$S_{ABC'D'} = S_{VC'D'} - S_{VAB}.$$

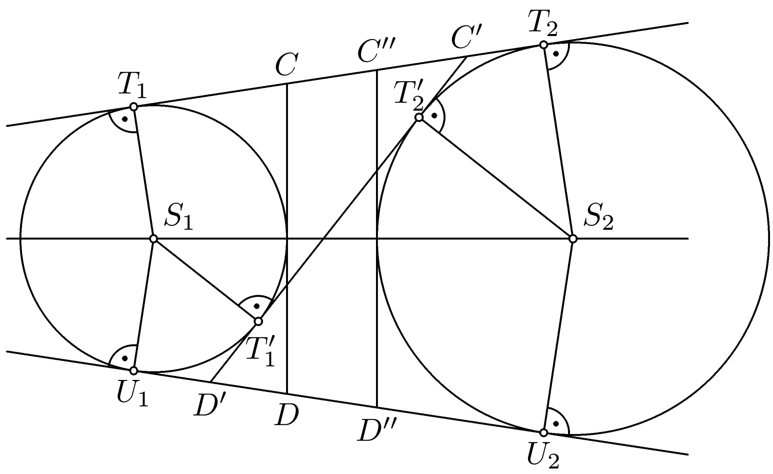
Stačí teda ukázať, že pre ľubovoľnú takú dotyčnicu $C'D'$, ktorá nie je kolmá na os uhla AVB, platí $S_{VC'D'} > S_{VCD}$. To je však zrejmé z obr. 23 (oba sivé trojuholníky majú vďaka stredovej súmernosti rovnaký obsah a pritom $S_{VC'D'} > S_{VC_1D_1} > S_{VCD}$).



Obr. 23

Iné riešenie. Obsah dotyčnicového štvoruholníka $ABCD$, ktorého vpísaná kružnica má polomer r, je $S = r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|)/2 = r(2|AB| + 2|CD|)/2 = r(|AB| + |CD|)$. Obsah dotyčnicového štvoruholníka $ABCD$ spĺňajúceho podmienky úlohy bude teda najmenší práve vtedy, keď bude najkratšia úsečka CD.

Uvažujme kružnicu pripísanú strane $C'D'$ trojuholníka $VC'D'$ (obr. 24). Z vlastností



Obr. 24

dotyčníc postupne nahliadneme, že $|T_1C| = |CD|/2$, $|T_2C''| = |C''D''|/2$ a tiež $|C'D'| = |T_1T_2|$. Ostatná rovnosť vyplýva zo známych vlastností vpísanej a pripísanej kružnice, totiž že ich body dotyku na spoločnú stranu sú súmerne združené podľa stredu strany. Dôkaz tohto tvrdenia vyžaduje trochu počítania:

$$|T_1T_2| = |T_1C'| + |C'T_2| = |T_1'C'| + |C'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'|,$$
$$|U_1U_2| = |U_1D'| + |D'U_2| = |T_1'D'| + |D'T_2'| = |T_1'T_2'| + 2|T_1'D'|.$$

Zo súmernosti podľa osi uhla AVB vyplýva $|T_1T_2| = |U_1U_2|$, takže $|T_2'C'| = |T_1'D'|$. Teda $|C'D'| = |T_1'T_2'| + 2|T_2'C'| = |T_1T_2|$.

Pretože obe kružnice sú oddelené spoločnou dotyčnicou $C'D'$, nemôžu sa dotýkať. Takže $|CD| < |C''D''|$, čiže $|CT_1| < |C''T_2|$. To znamená, že

$$|CD| = 2|T_1C| < |T_1C| + |C''T_2| < |T_1T_2| = |C'D'|,$$

čo sme chceli dokázať.

KATEGÓRIA A

A – I – 1

Nech t, s sú reálne korene danej kvadratickej rovnice. Zaoberajme sa najskôr prípadom, keď uvažovaná kvadratická rovnica má dvojnásobný (reálny) koreň. Vtedy platí $t = s$, pričom podľa podmienok úlohy je $t = |2t - 15|$. Pre $t \geqq 15/2$ dostávame rovnicu $t = 2t - 15$ s riešením $t = 15$, pre $t < 15/2$ rovnicu $t = -(2t - 15)$ s riešením $t = 5$. Im prislúchajúce kvadratické rovnice majú tvar $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 0$ a $(x - 15)^2 = x^2 - 30x + 225 = 0$.

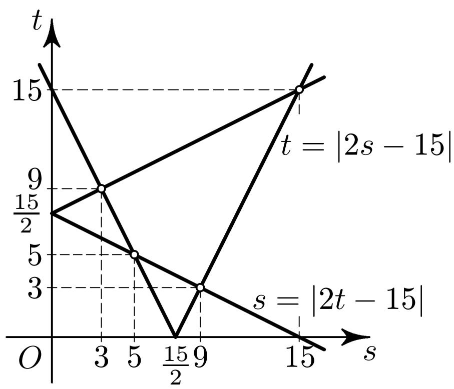
Venujme sa ďalej prípadu, keď uvažovaná kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene t, s. Rozoberieme tri prípady.

Ak $t = |2t - 15|$ a súčasne $s = |2s - 15|$, tak riešenia oboch rovníc (podľa predchádzajúceho) tvoria dvojicu $\{t, s\} = \{5, 15\}$. Prislúchajúca kvadratická rovnica má tvar $(x - 5)(x - 15) = x^2 - 20x + 75 = 0$.

Ak $t = |2s - 15|$ a súčasne $s = |2t - 15|$, tak riešením štyroch sústav rovníc

$$t = \pm(2s - 15), \quad s = \pm(2t - 15)$$

(ktoré zodpovedajú rôznym voľbám znamienok) dostaneme dvojice (s, t) rovné $(15, 15)$, $(5, 5)$, $(3, 9)$ a $(9, 3)$. Z nich len posledné dve vyhovujú pôvodnej sústave a podmienke $s \neq t$. Dodajme, že sústavu rovníc $t = |2s - 15|$ a $s = |2t - 15|$ možno riešiť aj graficky v rovine Ost, do ktorej zakreslíme obe lomené čiary $t = |2s-15|$ a $s = |2t-15|$ (obr. 25). Dvojiciam $(3, 9)$ a $(9, 3)$ prislúcha kvadratická rovnica $(x-3)(x-9) = x^2-12x+27 = 0$.



Obr. 25

Ak $t = |2t - 15| = |2s - 15|$, tak už vieme, že rovnica $t = |2t - 15|$ má riešenie $t = 5$ a $t = 15$. Pre $t = 5$ z rovnice $5 = |2s - 15|$ vyplýva $s = 5$ alebo $s = 10$, pre $t = 15$

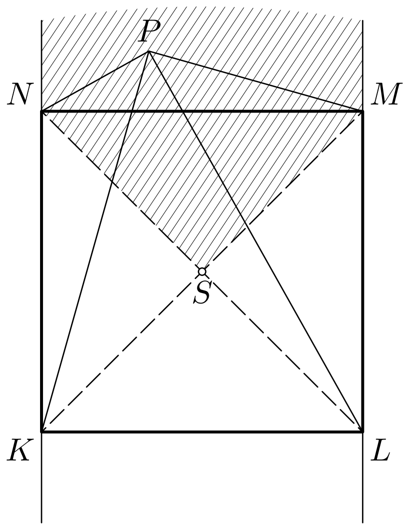
z rovnice $15 = |2s - 15|$ vyplýva $s = 0$ alebo $s = 15$. Vzhľadom na podmienku $s \neq t$ tak dostávame dve riešenia $(t, s) = (5, 10)$ a $(t, s) = (15, 0)$. Týmto riešeniam potom prislúchajú postupne dve kvadratické rovnice $(x - 5)(x - 10) = x^2 - 15x + 50 = 0$ a $(x - 15)x = x^2 - 15x = 0$.

Záver. Danej úlohe vyhovuje šesť dvojíc (p, q) reálnych čísel, a to dvojice $(-10, 25)$, $(-30, 225)$, $(-20, 75)$, $(-12, 27)$, $(-15, 50)$ a $(-15, 0)$.

A – I – 2

Označme $\mathcal{P}$ hľadanú množinu bodov a S stred štvorca $KLMN$. Zrejme $S \in \mathcal{P}$ (obr. 26).

Ďalej určíme všetky hľadané body P ($P \neq S$), ktoré ležia vnútri pásu ohraničeného rovnobežkami KN a LM. Ukážeme, že každý taký bod P leží v polrovine opačnej k polrovine MNK alebo vnútri trojuholníka MNS. Pre každý bod P uvažovaného pásu, ktorý leží v polrovine opačnej k polrovine KLM, totiž platí $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle KPN|$, lebo polpriamka PN leží v uhle KPL. Ďalej pre body P vnútri trojuholníka KSN zrejme platí $|\sphericalangle NPK| > 90° > |\sphericalangle LPM|$ a pre body P vnútri trojuholníka LMS zasa $|\sphericalangle NPK| < 90° < |\sphericalangle LPM|$. A konečne pre každý bod P v trojuholníku KLS (mimo jeho vrcholov) je uhol KPL väčší ako $90°$, zatiaľ čo aspoň jeden z uhlov NPK a LPM je menší ako $90°$ (vnútorné oblasti Tálesových kružníc nad priemermi NK a LM majú prázdny prienik).



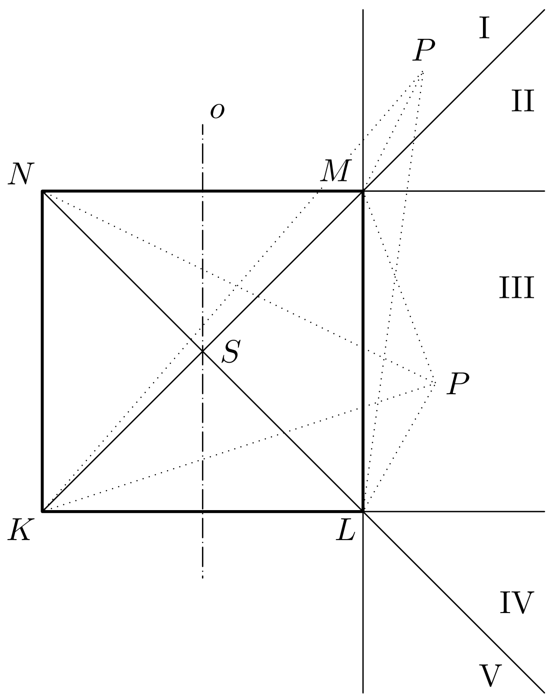
Obr. 26

Ak teda hľadaný bod P leží vo vyšrafovanej oblasti na obr. 26, sú priamky PK a PL podľa zadania osami uhlov NPL a KPM. Preto v trojuholníku LPN os PK uhla NPL pretína kružnicu opísanú tomuto trojuholníku (okrem bodu P) v bode ležiacom na osi strany NL. Týmto bodom je však vrchol K štvorca $KLMN$. Body P, N, K, L teda ležia na jednej kružnici, ktorou je kružnica opísaná štvorcu $KLMN$. (Analogický výsledok dostaneme, keď uvažujeme os PL uhla KPM.) Bod P preto leží na kratšom oblúku MN kružnice opísanej štvorcu $KLMN$ (označme ho ℓ). Naopak, pre každý bod $P \in \ell$ platí podľa vety o obvodových uhloch (pre zhodné tetivy NK, KL, LM)

$$|\sphericalangle NPK| = |\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle LPM| = 45^\circ.$$

Tým je hľadanie bodov P v páse medzi rovnobežkami KM a LM ukončené.

Ďalej ľahko nahliadneme, že ľubovoľný vnútorný bod P každej z polpriamok opačných k polpriamkam KM, LN, MK, NL danú vlastnosť má. Ukážeme, že žiadny ďalší bod roviny štvorca $KLMN$ uvedenú vlastnosť nemá. Stačí sa pritom vďaka symetrii zaoberať len jednou z polrovín ohraničených osou o strany KL daného štvorca. Pretože sme už vyšetrili celý pás ohraničený rovnobežkami KN a LM, stačí (bez ujmy na všeobecnosti) skúmať len body polroviny opačnej k polrovine LMN. Priamky KL, MN, LM, KM a LN delia túto polrovinu na päť častí (obr. 27), pritom žiadny bod priamok KL, LM a MN danú vlastnosť očividne nemá.

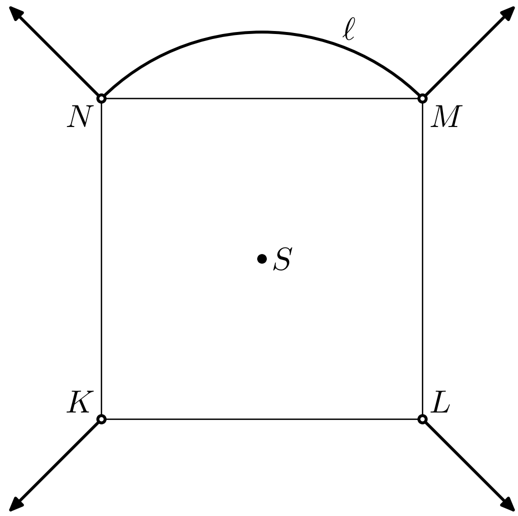


Obr. 27

Ukážeme, že žiadny vnútorný bod každej z oblastí I až V roviny štvorca $KLMN$ nie je prvkom množiny $\mathcal{P}$. Ak P je vnútorným bodom oblasti I, evidentne platí $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle LPM|$ (obr. 27). Ak P je vnútorným bodom ľubovoľnej z oblastí II alebo III, platí naopak $|\sphericalangle KPL| < |\sphericalangle LPN|$. Pre ľubovoľný vnútorný bod oblasti IV zasa platí $|\sphericalangle NPK| > |\sphericalangle KPL|$ a pre ľubovoľný vnútorný bod P oblasti V platí naopak $|\sphericalangle NPK| < |\sphericalangle KPL|$. Vo všetkých piatich uvažovaných prípadoch sme sa tak vždy dostali do sporu s podmienkami úlohy.

Tým sme preskúmali všetky body roviny štvorca $KLMN$.

Záver. Hľadaná množina bodov P sa skladá zo všetkých vnútorných bodov kratšieho oblúka MN kružnice opísanej danému štvorcu $KLMN$, zo všetkých vnútorných bodov polpriamok opačných k polpriamkam KM, LN, MK a NL a zo stredu S daného štvorca (obr. 28).



Obr. 28

A – I – 3

Skupinu P_k rozdeľme na dve časti $(PA)_k$ a $(PB)_k$ podľa toho, či slovo skupiny P_k končí písmenom A, alebo písmenom B. Skupinu N_k rozdeľme analogicky na dve časti $(NA)_k$ a $(NB)_k$. Označme ďalej p_k, n_k, $(pA)_k$, $(pB)_k$, $(nA)_k$, $(nB)_k$ postupne počty prvkov skupín P_k, N_k, $(PA)_k$, $(PB)_k$, $(NA)_k$, $(NB)_k$. Pre každé prirodzené číslo k potom podľa nášho rozdelenia platí

$$\begin{aligned} p_k &= (pA)_k + (pB)_k, \\ n_k &= (nA)_k + (nB)_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Každé slovo zo skupiny $(PA)_{k+1}$ vznikne tak, že pripíšeme písmeno A buď na koniec slova zo skupiny $(PA)_k$, alebo na koniec slova zo skupiny $(NB)_k$. Platí preto

$$(pA)_{k+1} = (pA)_k + (nB)_k.$$

Analogicky platia tiež vzťahy

$$\begin{aligned} (pB)_{k+1} &= (pA)_k + (pB)_k, \\ (nA)_{k+1} &= (pB)_k + (nA)_k, \\ (nB)_{k+1} &= (nA)_k + (nB)_k. \end{aligned} \tag{2}$$

Pre $n = 1$ majú skupiny tvar

$$(PA)_1 = \{A\}, \quad (PB)_1 = \{B\}, \quad (NA)_1 = \emptyset, \quad (NB)_1 = \emptyset,$$

a teda $(pA)_1 = (pB)_1 = 1$ a $(nA)_1 = (nB)_1 = 0$.

Predpokladajme, že pre nejaké prirodzené číslo m obsahujú skupiny $(PA)_m$ a $(PB)_m$ rovnaký počet prvkov, ktorý označíme q, a zároveň skupiny $(NA)_m$ a $(NB)_m$ majú rovnaký počet prvkov, ktorý označíme r. Naviac predpokladajme, že platí $q \neq r$, ako to platí v prípade $m = 1$, keď $q = 1$ a $r = 0$. Do nasledujúcej tabuľky zapíšme počty prvkov v skupinách pre čísla k rovné m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$ a $m + 4$. Pritom pre výpočty hodnôt využijeme vzťahy (1) a (2).

k	m	$m+1$	$m+2$	$m+3$	$m+4$
$(pA)_k$	q	$q+r$	$q+3r$	$2q+6r$	$6q+10r$
$(pB)_k$	q	$2q$	$3q+r$	$4q+4r$	$6q+10r$
$(nA)_k$	r	$q+r$	$3q+r$	$6q+2r$	$10q+6r$
$(nB)_k$	r	$2r$	$q+3r$	$4q+4r$	$10q+6r$
p_k	$2q$	$3q+r$	$4q+4r$	$6q+10r$	$12q+20r$
n_k	$2r$	$q+3r$	$4q+4r$	$10q+6r$	$20q+12r$

Z tabuľky možno vyčítať niekoľko poznatkov. Pretože $q \neq r$, platí aj $2q \neq 2r$, $3q + r \neq$ $\neq q + 3r$ a $6q + 10r \neq 10q + 6r$. Vidíme, že $p_m \neq n_m$, $p_{m+1} \neq n_{m+1}$, $p_{m+2} = n_{m+2}$, $p_{m+3} \neq n_{m+3}$ a že skupiny $(PA)_{m+4}$ a $(PB)_{m+4}$ obsahujú opäť rovnaký počet prvkov a skupiny $(NA)_{m+4}$ a $(NB)_{m+4}$ opäť rovnaký počet prvkov, pritom tieto počty sú navzájom rôzne.

Použitím matematickej indukcie zdôvodníme, že uvedená tabuľka má všetky spomenuté vlastnosti pre každé $m = 4\ell + 1$, kde ℓ je celé nezáporné číslo, takže rovnosť $p_k = n_k$ platí práve vtedy, keď $k = m + 2 = 4\ell + 3$.

Záver. Skupiny P_k a N_k majú rovnaký počet prvkov práve vtedy, keď $k = 4\ell + 3$, kde ℓ je celé nezáporné číslo.

A – I – 4

Pre $n = 1$ má daná nerovnosť tvar

$$\sqrt{2} \leqq \frac{1}{2}(p + 1), \quad \text{čiže} \quad p \geqq 2\sqrt{2} - 1.$$

Označme $p_1 = 2\sqrt{2} - 1$. Zistili sme, že žiadne číslo p menšie ako p_1 požadovanú vlastnosť nemá. Číslo p_1 teda bude hľadaným číslom, ak ukážeme, že pre každé $n \geqq 1$ platí

$$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \sqrt{3^2 + 1} + \cdots + \sqrt{n^2 + 1} \leqq \frac{1}{2} n(n + p_1). \qquad (1)$$

Dôkaz urobíme matematickou indukciou.

1° Pre $n = 1$ je nerovnosť (1) splnená vďaka spôsobu, akým sme číslo p_1 určili.

2° Predpokladajme, že nerovnosť (1) platí pre určité prirodzené číslo n a ukážeme, že platí aj pre prirodzené číslo $n+1$. Nech teda

$$F(n) = \sqrt{1^2+1} + \sqrt{2^2+1} + \sqrt{3^2+1} + \dots + \sqrt{n^2+1} \leqq \leqq \frac{1}{2}n(n+p_1). \tag{2}$$

Pretože

$$F(n+1) = F(n) + \sqrt{(n+1)^2+1},$$

podľa indukčného predpokladu (2) a definície čísla p_1 platí

$$F(n+1) \leqq \frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr) + \sqrt{(n+1)^2+1}. \tag{3}$$

Teraz dokážeme nerovnosť

$$\frac{1}{2}n\bigl(n+2\sqrt{2}-1\bigr) + \sqrt{(n+1)^2+1} \leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr). \tag{4}$$

Jej úpravou dostaneme s ňou ekvivalentnú nerovnosť

$$\sqrt{(n+1)^2+1} \leqq n+\sqrt{2},$$

o platnosti ktorej sa ľahko presvedčíme po umocnení oboch strán na druhú:

$$\bigl(n+\sqrt{2}\bigr)^2 = n^2+2\sqrt{2}n+2 > n^2+2n+2 = (n+1)^2+1.$$

Podľa (3) a (4) platí

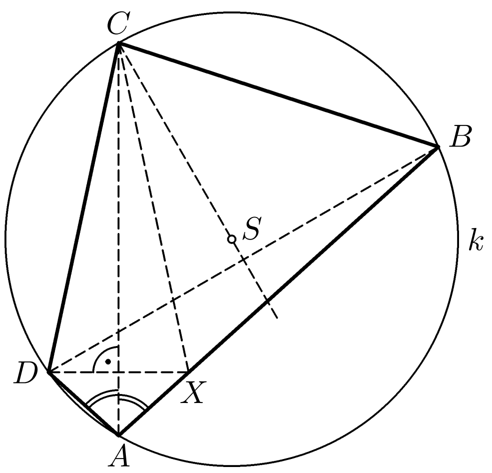
$$F(n+1) \leqq \frac{1}{2}(n+1)\bigl(n+1+2\sqrt{2}-1\bigr) = \frac{1}{2}(n+1)(n+1+p_1),$$

čo je nerovnosť (1) pre hodnotu $n+1$.

Záver. Hľadaným reálnym číslom je číslo $p = 2\sqrt{2}-1$.

A – I – 5

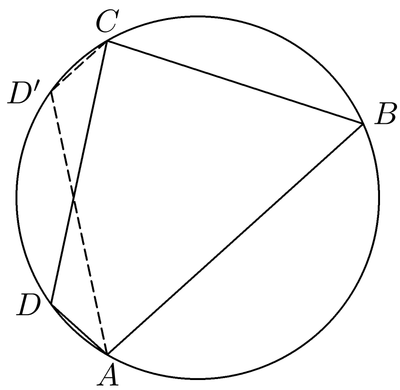
Najskôr sa zamyslime, ako môže taký tetivový štvoruholník $ABCD$ s šesťdesiatstupňovým uhlom pri vrchole B a so zhodnými stranami BC a CD vyzerať. Označme k kružnicu, ktorá je štvoruholníku $ABCD$ opísaná. Pretože $|\sphericalangle ABC| = 60°$, je už určená veľkosť uhlopriečky AC, ktorá je tetivou prislúchajúcou obvodovému uhlu 60°. Vrchol D potom musí byť vnútorným bodom kratšieho oblúka AC kružnice k (v polrovine opačnej k ACB) a vrchol B je obrazom bodu D v súmernosti podľa priamky SC (obr. 29), kde S je stred kružnice k.



Obr. 29

Pretože podľa predpokladu platí $|BC| = |CD|$, sú obvodové uhly BAC a CAD prislúchajúce zhodným tetivám zhodné. Vidíme teda, že polpriamky AD a AB sú súmerne združené podľa osi AC. Označme X obraz bodu D v tejto súmernosti (obr. 29). Bod X zrejme leží vnútri strany AB (obraz kratšieho oblúka AC leží celý vo vnútornej oblasti kružnice k), a pretože $|CX| = |CD| = |BC|$, je trojuholník XBC rovnoramenný. Trojuholník XBC je dokonca rovnostranný, pretože veľkosť jeho uhla pri vrchole B je 60°. Preto $|BX| = |BC| = |CD|$. Zo súmernosti naviac vyplýva $|DA| = |XA|$, takže $|CD| + |DA| = |BX| + |XA| = |AB|$, čo je požadovaná rovnosť v časti a).

Ľahko nahliadneme, že opačná implikácia neplatí. Stačí zobrať taký štvoruholník $ABCD$, ktorý spĺňa predpoklady úlohy, a zároveň v ňom platí $|CD| \neq |DA|$ (taký určite existuje, ako sme naznačili hneď v úvode riešenia). Keď vymeníme strany CD a DA, t. j. nahradíme vrchol D vrcholom D' súmerne združeným s vrcholom D podľa osi uhlopriečky AC (obr. 30), dostaneme tetivový štvoruholník $ABCD'$ s šesťdesiatstupňovým uhlom pri vrchole B, ktorý bude aj naďalej spĺňať rovnosť $|CD'| + |D'A| = |DA| + |CD| = |AB|$, ale bude v ňom platiť $|BC| = |CD| = |D'A| \neq |D'C|$.



Obr. 30

Iné riešenie. Pripomenieme si sínusovú vetu v nasledujúcom tvare, ktorý vyplýva z vety o obvodových uhloch: Ak R je polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, tak $\sin\alpha = a/(2R)$, kde $a = |BC|$. (Keď doplníme cyklicky ďalšie dve rovnosti, dostaneme odtiaľ jednoducho bežné znenie sínusovej vety.)

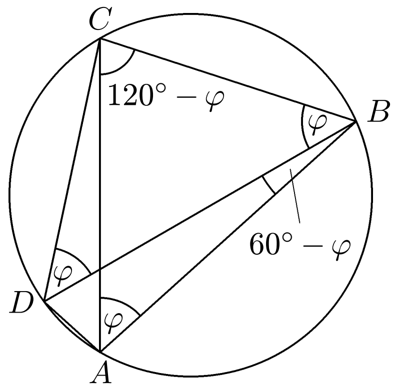
Ak teraz označíme φ obvodový uhol prislúchajúci zhodným tetivám BC a CD ($0° < \varphi < 60°$), zistíme, že tetive DA prislúcha obvodový uhol $60° - \varphi$ a tetive AB obvodový uhol $120° - \varphi$ (obr. 31). Dokazovaná rovnosť je potom podľa sínusovej vety ekvivalentná s rovnosťou

$$\sin\varphi + \sin(60° - \varphi) = \sin(120° - \varphi).$$

Pretože $\sin(120° - \varphi) = \sin(60° + \varphi)$, je uvedená rovnosť (po jednoduchej úprave) ekvivalentná s rovnosťou

$$\sin\varphi = 2\cos 60° \sin\varphi,$$

ktorá triviálne platí.



Obr. 31

Rovnako ako v predchádzajúcom riešení si uvedomíme, že rovnosť $|CD| + |DA| = |AB|$ ostane zachovaná, ak v danom štvoruholníku vymeníme strany CD a DA. Nový štvoruholník ostane tetivový, veľkosť jeho vnútorného uhla pri vrchole B sa nezmení, ale namiesto rovnosti $|BC| = |CD|$ bude splnená rovnosť $|BC| = |DA|$.

Iné riešenie. Označme dĺžky strán štvoruholníka $ABCD$, ktorý spĺňa podmienky úlohy, zvyčajným spôsobom a, b, c, d. Pretože vnútorné uhly pri vrcholoch B a D majú veľkosť $60°$, resp. $120°$, z kosínusovej vety pre trojuholníky ABC a CDA vyplýva (po porovnaní dvoch vyjadrení hodnoty $|AC|^2$) rovnosť

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd. \tag{6}$$

a) Ak $b = c$, možno z rovnosti (6) postupne odvodiť

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= c^2 + d^2 + cd, \\ a^2 - d^2 &= ac + cd, \\ (a-d)(a+d) &= c(a+d), \\ a - d &= c. \end{aligned}$$

Rovnosť $a = c + d$, ktorú sme mali dokázať, teda platí.

b) Ak platí $a = c + d$, po dosadení za a do rovnosti (6) dostaneme

$$(c+d)^2 + b^2 - (c+d)b = c^2 + d^2 + cd.$$

Odtiaľ po úprave máme vzťah $(b-c)(b-d) = 0$, z ktorého vyplýva, že platí $b = c$ alebo $b = d$. Opačná implikácia teda všeobecne neplatí.

A – I – 6

Ak sú čísla x, y, z riešením danej sústavy, zrejme platí $xyz \neq 0$. Vynásobme preto jednotlivé rovnice postupne činiteľmi yz, zx, xy a v obore nenulových reálnych čísel riešme ekvivalentnú sústavu rovníc

$$x^2yz = y + z, \quad xy^2z = x + z, \quad xyz^2 = x + y. \tag{1}$$

Súčtom ľavých a pravých strán tejto sústavy rovníc získame po úprave rovnicu

$$(xyz - 2)(x + y + z) = 0.$$

Odtiaľ vidíme, že platí $xyz = 2$ alebo $x + y + z = 0$. Rozoberme tieto dva prípady osobitne.

Nech $xyz = 2$. Po dosadení za súčin xyz v sústave (1) dostaneme

$$2x = y + z, \quad 2y = x + z, \quad 2z = x + y,$$

čo je ekvivalentné so sústavou

$$3x = x + y + z, \quad 3y = x + y + z, \quad 3z = x + y + z.$$

Odtiaľ vyplýva $x = y = z$. Vzhľadom na podmienku $xyz = 2$ dostaneme $x = y = z = \sqrt[3]{2}$. Skúškou overíme, že trojica $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ je skutočne riešením sústavy (1), a teda aj pôvodnej sústavy rovníc.

Nech $x+y+z = 0$. Z prvej rovnice sústavy (1) vyplýva $x^2yz = -x$, odkiaľ vzhľadom na podmienku $x \neq 0$ dostaneme $xyz = -1$. Overme, že každá trojica nenulových reálnych čísel (x, y, z) spĺňajúca sústavu dvoch rovníc

$$x + y + z = 0, \quad xyz = -1 \tag{2}$$

je riešením pôvodnej sústavy. Z rovností (2) totiž vyplýva

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{y+z}{yz}=\frac{-x}{-1/x}=x^2$$

(vzhľadom na symetriu zadanej sústavy stačilo overiť jednu rovnicu).

Sústava rovníc (2) má v obore nenulových reálnych čísel nekonečne veľa riešení, ktoré získame napríklad tak, že jednu premennú (napr. z) zvolíme ako parameter. Tým dostaneme sústavu

$$x+y=-z, \quad xy=-\frac{1}{z}.$$

Po dosadení za x z prvej rovnice do druhej dostaneme

$$(y+z)y=\frac{1}{z},$$

teda

$$y^2+yz-\frac{1}{z}=0. \tag{3}$$

Jedná sa o kvadratickú rovnicu s neznámou y a parametrom z. Jej diskriminant je rovný $D=z^2+4/z$. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre to, aby táto rovnica mala reálne korene, je nerovnosť $D\geqq 0$. Vyriešením nerovnice $(z^3+4)/z\geqq 0$ dostaneme pre parameter z podmienku

$$z\in\bigl(-\infty,-\sqrt[3]{4}\bigr\rangle\cup(0,\infty). \tag{4}$$

Za podmienky (4) má kvadratická rovnica (3) korene

$$y_1=\frac{-z+\sqrt{z^2+4/z}}{2} \quad \text{a} \quad y_2=\frac{-z-\sqrt{z^2+4/z}}{2},$$

ktorým podľa vzťahu $x=-y-z$ zodpovedajú hodnoty

$$x_1=\frac{-z-\sqrt{z^2+4/z}}{2} \quad \text{a} \quad x_2=\frac{-z+\sqrt{z^2+4/z}}{2}.$$

Pritom $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ platí iba v prípade $z=-\sqrt[3]{4}$.

Záver. Daná sústava má riešenie $x=y=z=\sqrt[3]{2}$. Všetky ostatné riešenia sú trojice (x,y,z) tvaru

$$(x,y,z)=\left(\frac{-z\pm\sqrt{z^2+4/z}}{2},\frac{-z\mp\sqrt{z^2+4/z}}{2},z\right),$$

kde z je ľubovoľné číslo spĺňajúce podmienku (4).

A – S – 1

Pretože $P(x)$ je kvadratický trojčlen s nezápornými koeficientmi, je nutne $a>0$.

Nech x je ľubovoľné kladné reálne číslo a n je číslo prirodzené. Pretože

$$0 \leqq \left(\sqrt{x^n} - \frac{1}{\sqrt{x^n}}\right)^2 = x^n + \frac{1}{x^n} - 2,$$

platí

$$x^n + \frac{1}{x^n} \geqq 2. \tag{1}$$

Pritom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $\sqrt{x^n} = 1/\sqrt{x^n}$, t.j. keď $x = 1$.

Pretože čísla ab, bc a ca sú podľa predpokladov úlohy nezáporné, použitím nerovnosti (1) ďalej dostaneme

$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= (ax^2 + bx + c)\Big(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\Big) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + bc\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + ca\Big(x^2 + \frac{1}{x^2}\Big) \geqq \\ &\geqq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = \big(P(1)\big)^2. \end{aligned}$$

Rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = 1$, alebo $ab = bc = ca = 0$, čo vzhľadom na podmienku $a > 0$ dáva $b = c = 0$.

Pre ľubovoľné kladné reálne číslo x teda platí

$$P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) \geqq \big(P(1)\big)^2,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x = 1$ alebo $b = c = 0$.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj použitím Cauchyho nerovnosti:

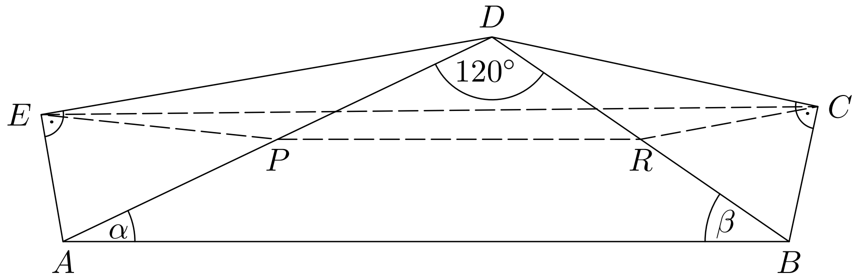
$$\begin{aligned} P(x) \cdot P\Big(\frac{1}{x}\Big) &= (ax^2 + bx + c)\Big(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\Big) = \\ &= \Big(\big(\sqrt{a}x\big)^2 + \big(\sqrt{bx}\big)^2 + \big(\sqrt{c}\big)^2\Big)\left(\Big(\frac{\sqrt{a}}{x}\Big)^2 + \bigg(\sqrt{\frac{b}{x}}\bigg)^2 + \big(\sqrt{c}\big)^2\right) \geqq \\ &\geqq \left(\sqrt{a}x \cdot \frac{\sqrt{a}}{x} + \sqrt{bx} \cdot \sqrt{\frac{b}{x}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}\right)^2 = (a + b + c)^2 = \big(P(1)\big)^2. \end{aligned}$$

A – S – 2

Nech $ABCDE$ je ľubovoľný konvexný päťuholník s uvažovanými vlastnosťami. Označme P, R postupne stredy strán AD, BD trojuholníka ABD (obr. 32). Potom platí

$$|PR| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |CR| = \frac{1}{2}|BD|, \qquad |PE| = \frac{1}{2}|AD|, \tag{1}$$

pretože PR je stredná priečka trojuholníka ABD a v pravouhlom trojuholníku je stred prepony zároveň stredom jeho opísanej kružnice (Tálesova veta).



Obr. 32

Z trojuholníkovej nerovnosti je zrejmé, že pre dĺžku uhlopriečky CE platí

$$|CE| \leqq |CR| + |RP| + |PE| = s,$$

pričom dĺžka s lomenej čiary $CRPE$ je podľa (1) zároveň rovná polovici obvodu trojuholníka ABD.

Ďalej skúmajme, kedy bude mať trojuholník ABD daných vlastností ($|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ADB| = 120°$) najväčší obvod. Ak označíme α a β (obr. 32) veľkosti vnútorných uhlov pri vrcholoch A a B trojuholníka ABD ($\alpha + \beta = 60°$), dostaneme zo sínusovej vety v trojuholníku ABD

$$|BD| = |AB|\frac{\sin\alpha}{\sin 120°}, \quad |AD| = |AB|\frac{\sin\beta}{\sin 120°}.$$

Sčítaním oboch predchádzajúcich rovností vyjde

$$\begin{aligned}|AD| + |BD| &= |AB|\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 120°} = \\ &= 2|AB|\frac{\sin 30°}{\sin 120°}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqq 2|AB|\frac{\sqrt{3}}{3},\end{aligned}$$

pričom rovnosť v ostatnej nerovnosti nastáva práve vtedy, keď $\cos(\alpha/2 - \beta/2) = 1$, t. j. pre $\alpha = \beta = 30°$. Trojuholník ABD má teda najväčší obvod práve vtedy, keď je rovnoramenný a jeho uhly pri základni AB majú veľkosť 30°. Vzhľadom na to, že $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, platí pre ľubovoľný päťuholník $ABCDE$ požadovaných vlastností

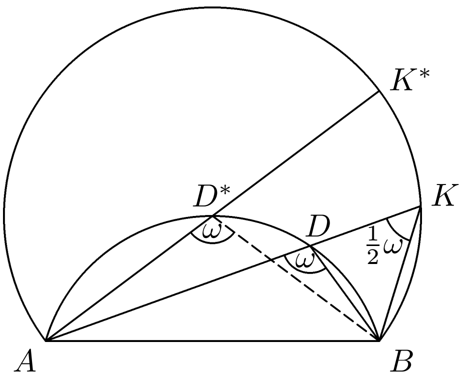
$$\begin{aligned}|CE| \leqq s = \frac{1}{2}(|AB| + |AD| + |BD|) \leqq \frac{1}{2}|AB|\left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \\ = \big(3 + 2\sqrt{3}\big)\,\mathrm{cm}.\end{aligned}$$

Pritom pre uvažovaný päťuholník $ABCDE$ v situácii, keď trojuholník ABD je rovnoramenný a vrcholy C, E ležia na priamke RP, platí $|CE| = (3 + 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

Najväčšia dĺžka uhlopriečky CE päťuholníka $ABCDE$ vyhovujúceho podmienkam úlohy je teda $(3+2\sqrt{3})$ cm.

Poznámka. V druhej časti riešenia sme (pre konkrétnu hodnotu $\omega = 120°$) ukázali, že trojuholník ABD s danou stranou AB a daným uhlom ω pri vrchole D má najväčší obvod práve vtedy, keď je rovnoramenný so základňou AB. To vyplýva aj z nasledujúcej úvahy.

Bod D prebieha oblúk, z ktorého je úsečku AB vidno pod uhlom ω. Na polpriamke opačnej k DA (obr. 33) zostrojme bod K tak, aby $|DB| = |DK|$. Z rovnoramenného trojuholníka BDK vyplýva, že $|\sphericalangle AKB| = \omega/2$. Bod K preto leží na oblúku, z ktorého je úsečku AB vidno pod uhlom $\omega/2$. Dĺžka $|AK| = |AD| + |BD|$ bude teda najväčšia práve vtedy, keď bude úsečka AK priemerom AK^* spomenutého oblúka. Vtedy je bod D stredom D^* príslušnej kružnice, takže platí $|AD^*| = |BD^*| = |D^*K^*|$.



Obr. 33

A – S – 3

Odčítaním prvej rovnice danej sústavy od druhej dostaneme rovnicu

$$y^2 - x^2 + 2zx - 2yz = 6(z+x-2) - 6(y+z-2),$$

ktorú upravíme na tvar

$$(x-y)(x+y-2z+6) = 0.$$

Podobne odčítaním prvej rovnice sústavy od tretej dostaneme

$$(x-z)(x+z-2y+6) = 0.$$

Daná sústava je preto ekvivalentná so sústavou rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + 2yz - 6(y+z-2) &= 0,\\ (x-y)(x+y-2z+6) &= 0,\\ (x-z)(x+z-2y+6) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzhľadom na druhú a tretiu rovnicu tejto sústavy stačí rozobrať štyri prípady.

Nech $x-y=0$ a súčasne $x-z=0$. Potom $x=y=z$ a dosadením za y a z do prvej rovnice sústavy (2) dostaneme rovnicu

$$3x^2-12x+12=0,$$

ktorá má dvojnásobný reálny koreň $x=2$. Preto trojica $(x,y,z)=(2,2,2)$ je v tomto prípade jediným riešením danej sústavy.

Nech $x-y=0$ a súčasne $x+z-2y+6=0$. Potom $y=x$ a $z=x-6$. Dosadením do prvej rovnice sústavy (2) dostaneme po úprave rovnicu

$$3x^2-24x+48=0,$$

ktorá má dvojnásobný reálny koreň $x=4$. Preto trojica $(x,y,z)=(4,4,-2)$ je v tomto prípade jediným riešením danej sústavy.

Nech $x+y-2z+6=0$ a súčasne $x-z=0$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade dostaneme jediné riešenie $(x,y,z)=(4,-2,4)$.

Nech $x+y-2z+6=0$ a súčasne $x+z-2y+6=0$. Odčítaním druhej rovnice od prvej dostaneme, že $3y-3z=0$, teda $y=z$. Z prvého predpokladu tak máme $y=x+6$. Dosadením do prvej rovnice sústavy (2) dostaneme po úprave rovnicu

$$3x^2+12x+12=0,$$

ktorá má dvojnásobný reálny koreň $x=-2$. Preto trojica $(x,y,z)=(-2,4,4)$ je v tomto prípade jediným riešením danej sústavy.

Daná sústava má v obore reálnych čísel štyri riešenia (x,y,z). Sú nimi trojice $(2,2,2)$, $(4,4,-2)$, $(4,-2,4)$ a $(-2,4,4)$.

Poznámka. Keď si všimneme, že sčítaním všetkých troch rovníc danej sústavy dostaneme po úprave

$$(x+y+z-6)^2=0,$$

tak napríklad z podmienky $z+x-2y+6=0$ priamo vyplýva $y=4$, čo predchádzajúce úvahy zjednoduší.

A – II – 1

Každý päťmiestny palindróm p sa dá zapísať v tvare $p=\overline{abcba}$, kde a, b, c sú číslice v desiatkovej sústave, $a\neq 0$. Z vyjadrenia

$$p=10\,001a+1\,010b+100c=37(270a+27b+3c)+11(a+b-c)$$

vyplýva, že p je deliteľné číslom 37 práve vtedy, keď je číslom 37 deliteľné číslo $a+b-c$. Vzhľadom na to, že a, b, c sú číslice $(a\neq 0)$, platí $-8\leqq a+b-c\leqq 18$. Preto je číslo

$a+b-c$ deliteľné 37 práve vtedy, keď $a+b-c=0$, čiže $c=a+b$. Číslice a, b teda musia spĺňať podmienku $a+b \leqq 9$.

Ku každému $a \in \{1,2,3,\ldots,9\}$ možno číslicu b zvoliť $10-a$ spôsobmi tak, aby platilo $a+b \leqq 9$ ($b \in \{0,1,2,\ldots,9-a\}$). Číslica c je potom určená jednoznačne ako súčet $a+b$. Palindrómov s číslicou $a=1$ je preto 9, palindrómov s číslicou $a=2$ je 8, atď., až napokon pre číslicu $a=9$ existuje práve jeden palindróm.

Počet všetkých päťmiestnych palindrómov, ktoré sú deliteľné číslom 37, je teda

$$9+8+7+\cdots+1=45.$$

A – II – 2

Počet vyhovujúcich slov dĺžky $n \geqq 2$, ktoré končia dvojicami písmen AA, AB, BA označme postupne $(aa)_n$, $(ab)_n$, $(ba)_n$; počet vyhovujúcich slov dĺžky $n \geqq 1$, ktoré končia písmenom A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 2$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n, \\ b_n &= (ab)_n, \\ p_n &= a_n + b_n = (aa)_n + (ba)_n + (ab)_n. \end{aligned}$$

Existujú práve dve vyhovujúce slová dĺžky jedna, a to slová A a B, a práve tri vyhovujúce slová dĺžky dva, a to slová AA, AB, BA. Preto $a_1 = b_1 = 1$, $p_1 = 2$, $(aa)_2 = (ab)_2 = (ba)_2 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $p_2 = 3$.

Každé vyhovujúce slovo dĺžky $n \geqq 3$, ktoré končí dvojicou písmen AA, dostaneme tak, že pripíšeme písmeno A na koniec slova dĺžky $n-1$ končiaceho dvojicou BA. Preto platí

$$(aa)_n = (ba)_{n-1}.$$

Analogicky zistíme, že pre každé $n \geqq 3$ platia tiež vzťahy

$$\begin{aligned} (ba)_n &= (ab)_{n-1}, \\ (ab)_n &= (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1}. \end{aligned}$$

Pretože nás zaujíma iba parita prirodzeného čísla p_n a výrazov, pomocou ktorých ho počítame, môžeme na základe uvedených rovností zostaviť tabuľku zo symbolov P a N, ktorým zodpovedajú párne resp. nepárne čísla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$(aa)_n$		N	N	N	P	P	N	P	N	...
$(ba)_n$		N	N	P	P	N	P	N	N	...
$(ab)_n$		N	P	P	N	P	N	N	N	...
a_n	N	P	P	N	P	N	N	N	P	...
b_n	N	N	P	P	N	P	N	N	N	...
p_n	P	N	P	N	N	N	P	P	N	...

Táto tabuľka je nutne periodická, pretože existuje iba osem rôznych usporiadaných trojíc písmen P a N, takže najviac po ôsmich stĺpcoch sa vzhľadom na dokázanú rekurenciu začnú hodnoty postupností $((aa)_n)$, $((ba)_n)$, $((ab)_n)$ opakovať. Hodnoty postupností (a_n), (b_n), (p_n) sú z nich odvodené, takže sa začnú opakovať tiež. Z tabuľky vidíme, že jej perióda je 7 (prvé dva zhodné stĺpce sú pre $n = 2$ a $n = 9$). A pretože v príslušnom úseku tabuľky je dvojica susedných párnych čísel p_7, p_8 jediná, sú obe čísla p_n a p_{n+1} párne práve vtedy, keď je číslo n deliteľné siedmimi.

Poznámka. Z vyššie uvedených vzťahov môžeme odvodiť rekurentné rovnice pre čísla a_n a b_n. Pre všetky prirodzené čísla $n \geqq 4$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n = (ba)_{n-1} + (ab)_{n-1} = \\ &= (ab)_{n-2} + (ab)_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-1}, \\ b_n &= (ab)_n = (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1} = a_{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Tieto rovnice môžeme odvodiť aj nasledujúcou úvahou. Vyhovujúce slovo končiace písmenom A má koncovku BA alebo BAA, počet slov prvého typu je b_{n-1}, slov druhého typu je b_{n-2}. Vyhovujúce slovo končiace písmenom B má nutne koncovku AB a týchto slov je a_{n-1}.

Zo vzťahov uvedených v (1) možno odvodiť rekurentnú rovnicu priamo pre čísla p_n. Pre každé $n \geqq 4$ totiž platí

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3}, \\ b_n &= a_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-3}. \end{aligned}$$

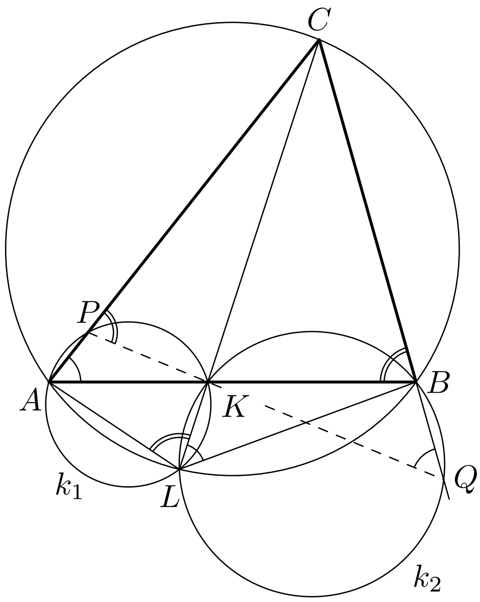
Vzhľadom na to, že $p_n = a_n + b_n$, dostaneme sčítaním týchto vzťahov rovnicu

$$p_n = p_{n-2} + p_{n-3},$$

ktorú môžeme odvodiť aj takto: Každé vyhovujúce slovo dĺžky n má práve jednu z koncoviek $ABAA$, ABA, BAB, $BAAB$, pritom koncovky ABA a BAB má práve p_{n-2} slov, zatiaľ čo koncovky $ABAA$ a $BAAB$ má práve p_{n-3} slov.

A – II – 3

a) V tetivovom štvoruholníku $ALBC$ platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALC|$ (obr. 34). Z rovnosti obvodového a príslušného úsekového uhla pre tetivu AK v kružnici k_1 vyplýva, že priamka AC je dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď platí $|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle ALK|$, t. j. práve vtedy, keď $\alpha = \beta$. Z analogických dôvodov je priamka BC dotyčnicou ku kružnici k_2 práve vtedy, keď $\beta = \alpha$. Priamka AC je preto dotyčnicou ku kružnici k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnicou ku kružnici k_2, čo sme chceli dokázať.



Obr. 34

b) Podľa časti a) vieme, že platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLK|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALK|$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že platí $\alpha < \beta$. Dotyčnica v bode A ku kružnici k_1 zviera s tetivou AK úsekový uhol $\beta > \alpha$, preto leží bod P na polpriamke AC, zatiaľ čo bod Q leží analogicky na polpriamke opačnej k BC. Z tetivových štvoruholníkov $ALKP$ a $BQLK$ vyplývajú rovnosti $|\sphericalangle KPC| = \beta$ a $|\sphericalangle BQK| = \alpha$ (obr. 34). Trojuholníky APK a QBK sa preto zhodujú v dvoch uhloch (pri vrcholoch A, Q a P, B). Zhodujú sa teda aj v uhle pri spoločnom vrchole K, takže

$$|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle BKQ| \ (= \beta - \alpha).$$

Odtiaľ vyplýva, že body P, K, Q ležia na jednej priamke. Tým je tvrdenie časti b) dokázané.

Poznámka. Dokázali sme vlastne nasledujúce tvrdenie: Ak je trojuholník ABC rovnoramenný s ramenami AC, BC, dotýkajú sa obe ramená zodpovedajúcich kružníc k_1 a k_2 vo vrcholoch A a B. A tiež naopak, ak trojuholník ABC nie je rovnoramenný, pretínajú jeho strany AC a BC zodpovedajúce kružnice k_1 a k_2 v ďalších bodoch P a Q ($P \neq A$, $Q \neq B$), pričom ich spojnica PQ prechádza daným bodom K.

A – II – 4

Použitím sínusovej vety v trojuholníkoch BKA a CKA dostaneme

$$\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CK|}{|AK|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}.$$

Sčítaním oboch predošlých rovností vyjde

$$\frac{|BC|}{|AK|} = \frac{|BK|}{|AK|} + \frac{|CK|}{|AK|} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Ak obe strany ostatnej nerovnosti vynásobíme výrazom $2\cos(\alpha/2)$, dostaneme po úprave

$$2\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{1}$$

Cyklickou zámenou získame ďalšie dve analogické rovnosti

$$2\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} = \sin\beta\left(\frac{1}{\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\alpha}\right), \tag{2}$$

$$2\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right). \tag{3}$$

Sčítaním rovností (1), (2) a (3) dostaneme po vydelení dvoma rovnosť

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Vzhľadom na to, že $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ sú kladné čísla, môžeme každý z troch výrazov v zátvorkách na pravej strane ostatnej rovnosti odhadnúť zdola číslom dva (využívame známu nerovnosť $a/b + b/a \geqq 2$, ktorá je pre ľubovoľné kladné čísla a, b ekvivalentná so zrejmou nerovnosťou $(a-b)^2 \geqq 0$). Odtiaľ vyplýva požadovaná nerovnosť. Tým je dôkaz hotový.

A – III – 1

Ak nejaká trojica $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $(xyz \neq 0)$ vyhovuje podmienkam úlohy, je riešením sústavy nerovníc

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\leqq 6 + x^2 - \frac{8}{x^4}, & \qquad & & \frac{8}{x^4} + y^2 + z^2 &\leqq 6,\\ x^2+y^2+z^2 &\leqq 6 + y^2 - \frac{8}{y^4}, & \qquad & \text{t. j.} & x^2 + \frac{8}{y^4} + z^2 &\leqq 6,\\ x^2+y^2+z^2 &\leqq 6 + z^2 - \frac{8}{z^4}, & & & x^2 + y^2 + \frac{8}{x^4} &\leqq 6. \end{aligned}$$

Sčítaním všetkých troch nerovníc tejto sústavy dostaneme nerovnicu

$$\left(\frac{8}{x^4} + x^2 + x^2\right) + \left(\frac{8}{y^4} + y^2 + y^2\right) + \left(\frac{8}{z^4} + z^2 + z^2\right) \leqq 18.$$

Výrazy v každej z troch zátvoriek na ľavej strane možno odhadnúť použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom trojice kladných čísel. Obdržíme tak postupne

$$\begin{aligned} 18 &\geqq \left(\frac{8}{x^4}+x^2+x^2\right)+\left(\frac{8}{y^4}+y^2+y^2\right)+\left(\frac{8}{z^4}+z^2+z^2\right) \geqq \\ &\geqq 3\sqrt[3]{\frac{8}{x^4}\cdot x^2\cdot x^2}+3\sqrt[3]{\frac{8}{y^4}\cdot y^2\cdot y^2}+3\sqrt[3]{\frac{8}{z^4}\cdot z^2\cdot z^2}=18. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva, že v každej z troch použitých nerovností medzi aritmetickým a geometrickým priemerom nastane rovnosť, takže príslušná trojica čísel má vždy tri rovnaké zložky. Musí teda súčasne platiť

$$\frac{8}{x^4}=x^2, \qquad \frac{8}{y^4}=y^2, \qquad \frac{8}{z^4}=z^2,$$

t. j.

$$x^6=y^6=z^6=8.$$

Z ostatnej podmienky bezprostredne vyplýva

$$(x,y,z)=\left(\varepsilon_1\sqrt{2},\varepsilon_2\sqrt{2},\varepsilon_3\sqrt{2}\right), \quad \text{kde } \varepsilon_i\in\{-1;1\} \text{ pre } i=1,2,3. \tag{1}$$

Vzhľadom na použité dôsledkové úpravy je nutné urobiť skúšku, pomocou ktorej zistíme, že všetkých 8 trojíc reálnych čísel určených vzťahom (1) vyhovuje podmienkam úlohy.

Iné riešenie. Nech trojica $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ $(xyz\neq 0)$ je riešením danej úlohy. Označme

$$A=\min\{x^2,y^2,z^2\}>0.$$

Potom platí

$$\min\left\{x^2-\frac{8}{x^4},y^2-\frac{8}{y^4},z^2-\frac{8}{z^4}\right\}=A-\frac{8}{A^2}.$$

Preto tiež

$$\begin{aligned} A+A+A &\leqq x^2+y^2+z^2\leqq 6+\min\left\{x^2-\frac{8}{x^4},y^2-\frac{8}{y^4},z^2-\frac{8}{z^4}\right\}= \\ &=6+A-\frac{8}{A^2}. \end{aligned}$$

Po úprave dostaneme nerovnosť, ktorej pravú stranu odhadneme použitím nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom:

$$6\geqq A+A+\frac{8}{A^2}\geqq 3\sqrt[3]{A\cdot A\cdot\frac{8}{A^2}}=6.$$

To znamená, že vo všetkých použitých nerovnostiach musí nastať rovnosť, a teda

$$2 = A = x^2 = y^2 = z^2.$$

Skúškou opäť overíme, že všetky trojice určené vzťahom (1) sú riešením zadanej nerovnice.

A – III – 2

Počet vyhovujúcich slov dĺžky n, ktoré končia písmenom A, resp. B, označme a_n, resp. b_n. Platí

$$p_n = a_n + b_n. \tag{1}$$

Nech $n \geqq 4$. Vyhovujúce slovo končiace písmenom A má jednu z koncoviek BA, BAA, alebo $BAAA$. Počet slov prvého typu je b_{n-1}, druhého typu b_{n-2}, tretieho typu b_{n-3}. Preto

$$a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}. \tag{2}$$

Podobne pre $n \geqq 3$ má vyhovujúce slovo končiace písmenom B jednu z koncoviek AB, ABB, teda

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \tag{3}$$

Nech ďalej $n \geqq 6$. Každé z čísel b_i vo vzťahu (2) vyjadrime pomocou (3), dostaneme tak

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3} = \\ &= (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) + (a_{n-4} + a_{n-5}) = \\ &= a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5}. \end{aligned} \tag{4}$$

Podobne dostaneme

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} = \\ &= (b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}) + (b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}) = \\ &= b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}. \end{aligned} \tag{5}$$

Sčítaním vzťahov (4) a (5) dostaneme podľa (1)

$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}.$$

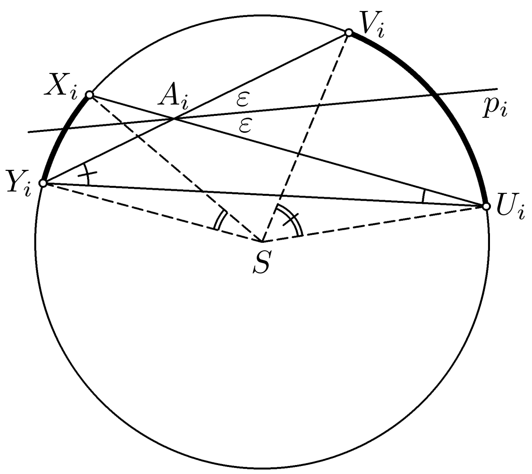
Preto pre ľubovoľné prirodzené číslo $n \geqq 6$ platí

$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2,$$

takže zadaný zlomok má hodnotu 2 aj pre $n = 2004$.

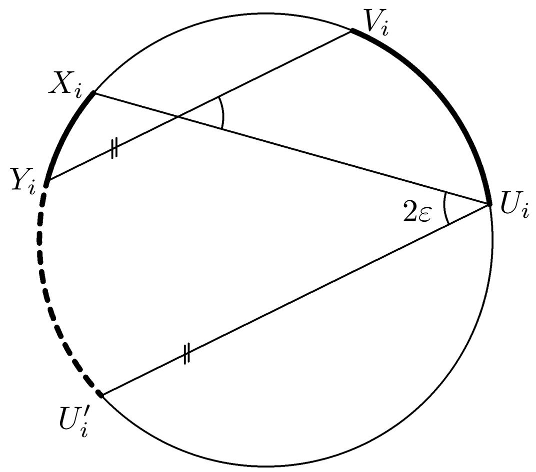
A – III – 3

Pre ľubovoľné i, $1 \leqq i \leqq 121$, označme $\mathcal{M}_i$ množinu všetkých bodov X kružnice k,



Obr. 35

pre ktoré úsečka A_iX zviera s príslušnou priamkou p_i uhol veľkosti menšej ako $\varepsilon = 21°$. Množina $\mathcal{M}_i$ je zrejme tvorená dvoma oblúkmi X_iY_i a U_iV_i (obr. 35). Obom uvažovaným oblúkom kružnice k zodpovedá dvojica stredových uhlov X_iSY_i a U_iSV_i, kde S je stred danej kružnice k. Ukážeme, že pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, 121\}$ platí $|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 4\varepsilon = 84°$.



Obr. 36

V trojuholníku $A_iY_iU_i$ je súčet veľkostí vnútorných uhlov pri vrcholoch Y_i a U_i rovný veľkosti vedľajšieho uhla pri vrchole A_i, t. j. 2ε. Na druhej strane, súčet oboch uvažovaných uhlov v tomto trojuholníku je rovný súčtu obvodových uhlov prislúchajúcich oblúkom X_iY_i a U_iV_i. Zo vzťahu medzi obvodovým a stredovým uhlom dostávame

$$|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon = 84°.$$

Celkovo tak 121 uvažovaným tetivám p_i a ich bodom A_i zodpovedá 121 dvojíc oblúkov X_iY_i a U_iV_i kružnice k s celkovou oblúkovou dĺžkou $121 \cdot 84° = 10\,164°$. Pokiaľ každý bod X kružnice k leží najviac v 28 množinách $\mathcal{M}_i$, musí byť uvedený súčet všetkých oblúkových dĺžok rovný najviac $28 \cdot 360° = 10\,080°$, čo neplatí. Preto existuje aspoň jeden bod kružnice k, ktorý leží súčasne aspoň v 29 množinách $\mathcal{M}_i$, čo sme mali dokázať.

Poznámka. Že obom oblúkom X_iY_i a U_iV_i zodpovedá spolu stredový uhol 4ε, nahliadneme ľahko aj z obr. 36, lebo oblúky $U_i'Y_i$ a U_iV_i sú zhodné.

A – III – 4

Pre n rovné 1, 2 a 3 je daný súčet postupne rovný celým číslam 1, 3, 5. Predpokladajme preto ďalej, že $n > 3$. Jednoduchou úpravou dostaneme

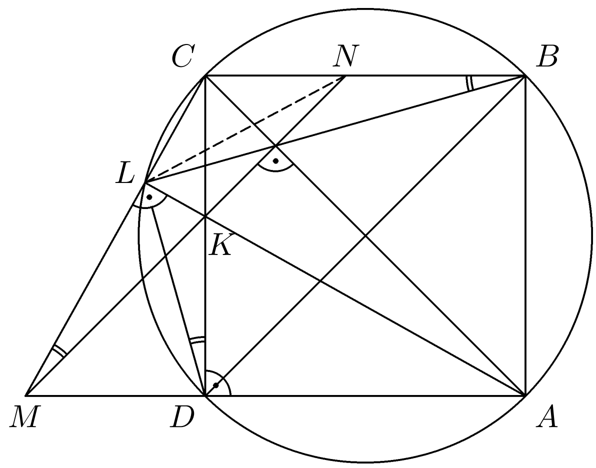
$$\frac{n}{1!} + \frac{n}{2!} + \cdots + \frac{n}{(n-2)!} + \frac{n}{(n-1)!} + \frac{n}{n!} = \\ = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2 + n(n-1)\cdot \ldots \cdot 3 + \cdots + n(n-1) + n + 1}{(n-1)!}.$$

Ak je ostatný zlomok celé číslo, je nutne číslo $n-1$ deliteľom jeho čitateľa. Preto je číslo $n-1$ deliteľom čísla $n+1$. Pretože najväčší spoločný deliteľ dvoch čísel je deliteľom aj ich rozdielu, je najväčší spoločný deliteľ čísel $n-1$ a $n+1$ deliteľom čísla 2, takže $n-1 \in \{1,2\}$, čo je v spore s predpokladom $n > 3$.

Daný súčet je celé číslo pre prirodzené čísla n z množiny $\{1,2,3\}$.

A – III – 5

Uhlopriečka AC je priemerom kružnice opísanej štvorcu $ABCD$, takže podľa Tálesovej vety je uhol ALC pravý (obr. 37). Bod K je tak priesečníkom výšok CD a AL v trojuholníku ACM, takže aj priamka MK je kolmá na AC a pretína stranu BC daného štvorca v jej vnútornom bode N, lebo $MK \parallel DB$.



Obr. 37

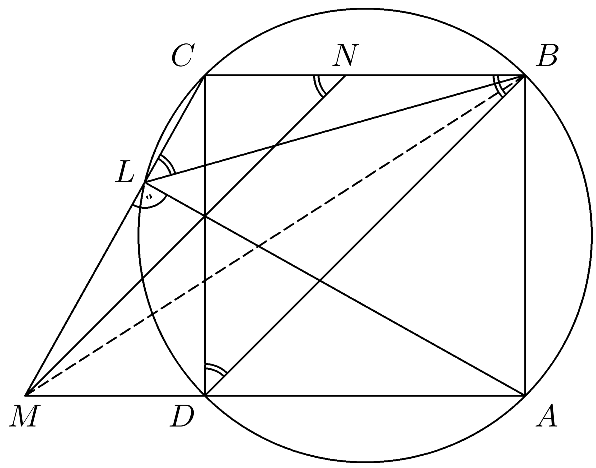
Teraz možno tvrdenie úlohy dokázať niekoľkými spôsobmi.

Prvý spôsob. Štvoruholníky $BCLD$ a $KLMD$ sú tetivové, preto podľa vety o obvodových uhloch postupne platí

$$|\sphericalangle NBL| = |\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle NML|.$$

Pretože body B a M ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou NL, ležia body B, L, M, N na jednej kružnici.

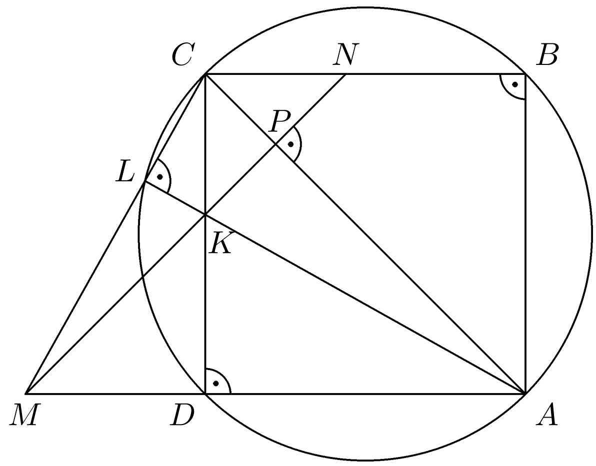
Druhý spôsob. Pretože $MN \parallel DB$, platí $|\sphericalangle MNC| = 45°$, rovnako uhol BLC nad tetivou BC kružnice k má veľkosť $45°$ (obr. 38), takže $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle BNM| = 135°$.



Obr. 38

Body L a N zrejme ležia v rovnakej polrovine určenej priamkou MB, preto ležia body B, L, M, N na jednej kružnici.

Tretí spôsob. Označme P pätu výšky z vrcholu M na stranu AC a uvažujme štvoruholníky $ABNP$, $APKD$ a $DKLM$ (obr. 39). Podľa Tálesovej vety sú všetky



Obr. 39

tri štvoruholníky tetivové. Vrchol C daného štvorca $ABCD$ leží mimo každej z troch kružníc opísaných uvažovaným tetivovým štvoruholníkom, takže použitím vety o mocnosti bodu C ku kružniciam opísaným postupne štvoruholníkom $ABNP$, $APKD$, $DKLM$ dostaneme tri rovnosti

$$\begin{aligned} |CN| \cdot |CB| &= |CP| \cdot |CA|, \\ |CP| \cdot |CA| &= |CK| \cdot |CD|, \\ |CK| \cdot |CD| &= |CL| \cdot |CM|, \end{aligned}$$

z ktorých bezprostredne vyplýva rovnosť

$$|CN| \cdot |CB| = |CL| \cdot |CM|.$$

Odtiaľ už vyplýva, že body B, L, M, N leží na jednej kružnici.

A – III – 6

Nech f je ľubovoľná z hľadaných funkcií. Označme $f(1) = p$. Vzhľadom na podmienky úlohy platí $p > 0$.

V danom vzťahu položme $x = 1$, $y = 1$. Po úprave dostaneme

$$p = f(p). \tag{1}$$

V danom vzťahu ďalej položme $x = p$, $y = 1$. Potom

$$p^2\bigl(f(p) + p\bigr) = (p + 1)f\bigl(f(p)\bigr)$$

a podľa (1) vyjde

$$2p^3 = (p + 1)p.$$

Táto algebraická rovnica má tri reálne korene $-1/2$, 0, 1. Jediný koreň vyhovujúci podmienke $p > 0$ je $p = 1$, teda

$$f(1) = 1. \tag{2}$$

Nech t je ľubovoľné kladné reálne číslo. V danom vzťahu položme $x = 1$, $y = t$, takže vzhľadom na (2) dostaneme

$$1 + f(t) = (1 + t)f(t).$$

Odtiaľ po úprave

$$f(t) = \frac{1}{t}. \tag{3}$$

Dosadením ľahko overíme, že funkcia $f(t) = 1/t$ vyhovuje rovnici zo zadania. Funkcia určená vzťahom (3) je jediné riešenie danej úlohy.

Iné riešenie. Predpokladajme, že existuje funkcia daných vlastností a ľubovoľnú z takých funkcií označme f.

Nech t je ľubovoľné kladné reálne číslo. V danom vzťahu položme $x = t$, $y = t$. Po úprave dostaneme

$$tf(t) = f\bigl(tf(t)\bigr).$$

Odtiaľ vyplýva, že množina $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{R}^+;\ p = f(p)\}$ je neprázdna, pretože pre každé kladné reálne číslo t je $tf(t)$ prvkom $\mathcal{P}$.

Predpokladajme, že množina $\mathcal{P}$ obsahuje aspoň dve rôzne čísla, označme ich a a b. V danom vzťahu položme $x = a$, $y = b$. Dostaneme

$$a^2\bigl(f(a) + f(b)\bigr) = (a + b)f\bigl(f(a)b\bigr).$$

Vzhľadom na to, že $a = f(a)$, $f(a) + f(b) = a + b \neq 0$, dostaneme odtiaľ po úprave

$$a^2 = f(ab). \tag{4}$$

Ak položíme v danom vzťahu naopak $x = b$, $y = a$, dostaneme po podobnej úprave

$$b^2 = f(ab). \tag{5}$$

Vzhľadom na to, že a a b sú kladné čísla, vyplýva zo vzťahov (4) a (5) $a = b$, čo je spor s predpokladom, že množina $\mathcal{P}$ obsahuje aspoň dve rôzne čísla.

Množina $\mathcal{P}$ teda obsahuje práve jedno číslo, označme ho p ($p \in \mathbb{R}^+$). Z predchádzajúcich vzťahov vyplýva, že pre každé kladné reálne číslo t platí $tf(t) = p$, preto funkcia f má nutne tvar

$$f(t) = \frac{p}{t}.$$

Teraz dosaďme tento predpis do pôvodného vzťahu. Pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ tak dostaneme

$$x^2\left(\frac{p}{x} + \frac{p}{y}\right) = (x + y)\frac{p}{\frac{p}{x}y}.$$

Úpravou získame $p = 1$.

Teda funkcia f daná pre všetky kladné reálne čísla t predpisom

$$f(t) = \frac{1}{t}$$

je jediná funkcia, ktorá vyhovuje danému vzťahu.

Prípravné sústredenia pred IMO

Pred medzinárodnou matematickou olympiádou (IMO) sa každoročne koná jedno výberové a jedno prípravné sústredenie pre najlepších riešiteľov tretieho kola kategórie A. Po výberovom sústredení SK MO vyberie 6 najlepších študentov do reprezentačného družstva Slovenska a určí jedného náhradníka.

Na výberovom sústredení pred IMO sa zúčastnilo 14 súťažiacich, najúspešnejších riešiteľov tretieho kola MO kategórie A. Sústredenie sa konalo v dňoch 18. – 24. 4. 2004 v Bratislave. Úlohy zadávali lektori z FMFI UK Bratislava:

Mgr. František Kardoš, úlohy 1 – 4,
Tomáš Jurík, úlohy 5 – 7,
Ján Mazák, úlohy 8 – 11,
Peter Novotný, úlohy 12 – 14,
Mgr. Juraj Földes, úlohy 15 – 17.

Každý deň študenti riešili sériu troch či štyroch úloh pri podobných podmienkach ako na IMO. V poobedňajších hodinách sa konal spoločný rozbor úloh s lektorom. Na konci sústredenia sa získané body za jednotlivé dni sčítali a s prihliadnutím na výsledky tretieho kola MO bolo vybrané šesťčlenné družstvo pre účasť na IMO.

Výsledky sústredenia:

František Simančík	55	*Martin Molnár*	28
Hana Budáčová	47	*Stanislava Sojáková*	26,5
Tomáš Váňa	40,5	*Tamás Mészáros*	25
Ondrej Budáč	37,5	*Rastislav Lenhardt*	24
Jozef Bodnár	31,5	*Marek Jančuška*	19
Jaroslav Knebl	30,5	*Daniel Božík*	15,5
Peter Černo	29	*Michal Sudolský*	13,5

Poradie po zohľadnení výsledkov CKMO:

1.	*František Simančík*	94	8.	*Jaroslav Knebl*	60,5
2.	*Tomáš Váňa*	82,5	9.	*Tamás Mészáros*	58
3.	*Hana Budáčová*	82	10.	*Rastislav Lenhardt*	56
4.	*Ondrej Budáč*	79,5	11.	*Stanislava Sojáková*	55,5
5.	*Jozef Bodnár*	73,5	12.	*Marek Jančuška*	50
6.	*Peter Černo*	65	13.	*Daniel Božík*	48,5
7.	*Martin Molnár*	61	14.	*Michal Sudolský*	43,5

Druhé sústredenie sa konalo v dňoch 31. 5. – 4. 6. 2004 v Bratislave. Sústredenie bolo zamerané obzvlášť na prípravu šesťčlenného reprezentačného družstva. Lektormi boli študenti FMFI UK Bratislava:

Štefan Gyürki, (Kombinatorika),
Mgr. Juraj Földes, (Algebra),
Peter Novotný, (Teória čísel),
Ján Mazák, (Geometria),
Tomáš Jurík, (Geometria).

Zadania súťažných úloh výberového sústredenia pred IMO

1. Je daný trojuholník ABC a na strane BC bod D tak, že $|AD| > |BC|$. Bod E na strane AC je určený pomerom

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BD|}{|AD| - |BC|}.$$

Dokážte, že platí $|AD| > |BE|$.

2. Nájdite všetky ohraničené postupnosti $a_1, a_2, \dots$ prirodzených čísel také, že platí

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{(a_{n-1}, a_{n-2})}$$

pre každé $n > 2$. ((k, ℓ) označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel k a ℓ.)

3. a) Anička má dve škatule, z ktorých v každej je 6 loptičiek označených číslami 1 až 6. Náhodne vyberie po jednej loptičke z každej škatule. Nech p_n označuje pravdepodobnosť, že súčet vybraných čísel je rovný n. Vypočítajte p_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$.
b) Betka má tiež dve škatule a v každej 6 loptičiek označených (neznámymi) prirodzenými číslami. Čísla sa môžu opakovať, nemusia byť také isté v oboch škatuliach. Ak Betka vyberie náhodne po jednej loptičke z každej škatule, pravdepodobnosť, že súčet bude rovný n, je opäť p_n (rovnako ako u Aničky). Aké čísla sú na Betkiných loptičkách? Nájdite všetky možnosti.

4. Každý štvorček veľkého štvorca 50×50 je ofarbený jednou zo štyroch farieb. Ukážte, že existuje štvorček, ktorý má rovnakú farbu ako niektorý štvorček napravo, naľavo, hore i dole od neho (nie nutne susedný).

5. Na oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod A, zvolíme bod P. Na polpriamkach AP, BP zvolíme postupne body X, Y tak, aby $|AC| = |AX|$, $|BC| = |BY|$. Ukážte, že priamky XY prechádzajú pre pohybujúci sa bod P pevným bodom.

6. Nech $\mathcal{S}$ je množina $2004^2 + 1$ prirodzených čísel väčších ako 1. Platí, že pre každé prirodzené číslo n existuje nejaké $s \in \mathcal{S}$ také, že $NSD(s, n) = 1$ alebo $NSD(s, n) = s$. Dokážte, že existujú $s, t \in \mathcal{S}$ také, že $NSD(s, t)$ je prvočíslo.

7. Pre prirodzené číslo n a reálne číslo c definujeme x_k rekurzívne: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a
$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1} \quad \text{pre } k \geqq 0.$$
Pre pevné n označme c najväčšie číslo, pre ktoré $x_{n+1} = 0$. Pre takto zvolené c nájdite predpis pre x_k iba za pomoci n a k pre $1 \leqq k \leqq n$.

8. Nech a, b, c sú nezáporné reálne čísla také, že $a+b+c = 1$. Nájdite maximum výrazu
$$a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc}.$$

9. Daný je štvorsten taký, že guľa so stredom v bode O sa dotýka všetkých jeho šiestich hrán. Navyše štyri gule so stredmi vo vrcholoch štvorstena sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky štyri sa dotýkajú inej gule so stredom v bode O. Dokážte, že takýto štvorsten musí byť pravidelný.

10. Nech ABC je trojuholník. Na jeho stranách AB, AC ležia v tomto poradí body D, E tak, že priamka DE je rovnobežná s priamkou BC. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ADE a nech F, G sú postupne priesečníky priamky DE s priamkami BP a CP. Nech Q je druhý priesečník (rôzny od P) kružníc opísaných trojuholníkom PDG a PFE. Dokážte, že body A, P, Q ležia na priamke.

11. Dokážte, že ak n je prirodzené číslo také, že rovnica
$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$$
má riešenie (x, y) v celých číslach, tak má táto rovnica aspoň tri takéto riešenia. Nájdite všetky jej riešenia pre $n = 2891$.

12. Bod P leží vnútri trojuholníka ABC. D, E a F sú päty kolmíc spustených z P postupne na strany BC, CA a AB. Predpokladajme, že platí
$$|AP|^2 + |PD|^2 = |BP|^2 + |PE|^2 = |CP|^2 + |PF|^2.$$
Označme I_A, I_B a I_C stredy kružníc pripísaných ku stranám trojuholníka ABC. Dokážte, že P je stred kružnice opísanej trojuholníku $I_AI_BI_C$.

13. Každé prirodzené číslo a podstúpi nasledovnú procedúru pre získanie hodnoty $d = d(a)$:

(i) poslednú cifru čísla a presunieme na začiatok, dostaneme tak číslo b;
(ii) umocníme b na druhú, dostaneme tak číslo c;
(iii) prvú cifru čísla c presunieme na koniec, dostaneme číslo d.

(Všetky čísla sú zapísané v desiatkovej sústave.) Napríklad pre $a = 203$ dostaneme $b = 320$, $c = 102400$ a $d = 024001 = 24001 = d(203)$. Nájdite všetky čísla a, pre ktoré $d(a) = a^2$.

14. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že pravidelný šesťuholník sa dá rozdeliť na n rovnobežníkov, ktoré majú všetky rovnaký obsah.

15. Nech n a r sú kladné celé čísla a nech A je podmnožina množiny mrežových bodov (body s celočíselnými súradnicami) v rovine, taká, že ľubovoľný kruh (bez hraničnej kružnice) s polomerom r obsahuje bod z množiny A. Dokážte, že ak ľubovoľne ofarbíme množinu A s n farbami, tak budú existovať štyri body rovnakej farby, ktoré tvoria vrcholy obdĺžnika.

16. Označme T ťažisko trojuholníka ABC. Dokážte, že platí

$$\sin|\sphericalangle CAT| + \sin|\sphericalangle CBT| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

17. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, ktoré spĺňajú rovnosť

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k \qquad \text{pre všetky} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

kde k je pevné kladné celé číslo a $\mathbb{N}_0$ označuje množinu všetkých nezáporných celých čísel.

4. česko–slovensko–poľské stretnutie

Bílovec, 20. – 23. 6. 2004

V rámci záverečnej prípravy pred IMO sa uskutočnilo po štvrtý krát prípravné stretnutie medzi družstvami Českej republiky, Poľska a Slovenska. Jednotlivé krajiny reprezentovala šestica študentov, ktorí si vybojovali vo svojich krajinách účasť na 45. MMO v Grécku.

Súťaž sa uskutočnila 21. – 23. júna 2004 v mestečku Bílovec na Morave. Všetky tri reprezentačné družstvá pricestovali na miesto konania už v nedeľu 20. júna. Organizácia a priebeh súťaže zostali nezmenené z predchádzajúcich ročníkov – je prispôsobená štýlu III. kola našej MO a podmienkam IMO. Súťažiacim boli počas dvoch dní predložené dve trojice súťažných úloh, pričom za každú správnu úlohu mohli získať najviac 7 bodov, t. j. celkove 42 bodov (rovnako ako na IMO). Na každú trojicu úloh mali súťažiaci vymedzené 4,5 hodiny čistého času.

Opravu riešení zabezpečila medzinárodná porota, ktorú tvorili *Dr. Waldemar Pompe* a *Mgr. Adam Osękowski* z Poľska, *doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.* a *Ján Mazák* zo Slovenska a *RNDr. Karel Horák, CSc.*, *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.* a *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Českej republiky.

V budúcom roku sa tretie spoločné prípravné stretnutie (pred 46. IMO) uskutoční v Poľsku.

Prehľad výsledkov:

Por.	Meno	Štát	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$
1.	Mateusz Michałek	Poľsko	6	7	6	7	7	5	38
2.–3.	Vítězslav Kala	Česká rep.	6	7	1	7	7	7	35
	František Simančík	Slovensko	7	6	1	7	7	7	35
4.–5.	Kamil Duszenko	Poľsko	6	7	0	7	7	7	34
	Tomáš Váňa	Slovensko	5	7	1	7	7	7	34
6.	František Konopecký	Česká rep.	5	7	0	7	7	7	33
7.–8.	Jaromír Kuben	Česká rep.	7	7	0	7	1	7	29
	Jan Moláček	Česká rep.	7	0	1	7	7	7	29
9.	Alexandr Kazda	Česká rep.	3	7	0	4	7	7	28
10.–11.	Marek Pechal	Česká rep.	6	1	0	5	7	7	26
	Michał Pilipczuk	Poľsko	4	0	1	7	7	7	26
12.	Andrzej Grzesik	Poľsko	5	7	0	7	1	3	23
13.	*Ondrej Budáč*	Slovensko	4	0	1	6	6	3	20
14.	*Hana Budáčová*	Slovensko	2	0	1	7	1	6	17
15.	*Peter Černo*	Slovensko	5	0	0	2	1	7	15
16.	Piotr Danilewski	Poľsko	0	0	0	7	0	6	13
17.	Jakub Kallas	Poľsko	0	0	0	2	1	7	10
18.	*Jozef Bodnár*	Slovensko	3	0	1	2	0	3	9

Zadania úloh 4. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Dokážte, že reálne čísla p, q, r spĺňajú podmienku

$$p^4(q-r)^2 + 2p^2(q+r) + 1 = p^4$$

práve vtedy, keď kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \qquad y^2 - py + r = 0$$

majú reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 1$.

(J. Šimša)

Úloha 2.
Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje najviac konečne veľa takých trojíc navzájom rôznych prvočísel p, q, r, pre ktoré je číslo $qr - k$ násobkom p, číslo $pr - k$ násobkom q a súčasne číslo $pq - k$ násobkom r.

Úloha 3.
Vnútri tetivového štvoruholníka $ABCD$ je daný bod P tak, že platí

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BAP| + |\sphericalangle PDC|.$$

Označme E, F, G päty kolmíc z bodu P postupne na priamky AB, AD a DC. Dokážte, že trojuholník FEG je podobný s trojuholníkom PBC.

(J. Švrček)

Úloha 4.
V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1, \quad \frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1, \quad \frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1.$$

(J. Földes)

Úloha 5.
Vnútri strán AB, BC, CA daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body K, L, M tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|}.$$

Dokážte, že trojuholníky ABC a KLM majú spoločný priesečník výšok práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnostranný.

(P. Černek)

Úloha 6.
Na stole leží k kôpok s $1, 2, \ldots, k$ kamienkami, pričom $k \geqq 3$. V prvom kroku vyberieme 3 ľubovoľné kôpky na stole, spojíme ich do jednej a z tejto novej kôpky odstránime 1 kamienok (preč zo stola). V druhom kroku opäť spojíme niektoré tri kôpky do jednej a potom z nej odoberieme 2 kamienky. Všeobecne v i-tom kroku spojíme ľubovoľné tri kôpky, v ktorých je spolu viac ako i kamienkov, do jednej kôpky a potom z nej i kamienkov odstránime. Predpokladajme, že po niekoľkých krokoch zostane na stole jediná kôpka, v ktorej je p kamienkov. Dokážte, že číslo p je štvorec práve vtedy, keď obe čísla $2k + 2$ a $3k + 1$ sú štvorce. Ďalej potom nájdite najmenšie k, pre ktoré je číslo p štvorec.

(R. Kučera)

Riešenia úloh 4. česko–slovensko–poľského stretnutia

Úloha 1.
Tvrdenie úlohy v sebe zahŕňa dve implikácie. Dokážeme najskôr jednu a potom druhú.

Prvá časť. Nech kvadratické rovnice zo zadania majú reálne korene spĺňajúce $x_1y_1 - x_2y_2 = 1$. Podľa známeho vzťahu majú tieto korene vyjadrenia

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm K}{2} \qquad \text{a} \qquad y_{1,2} = \frac{p \pm L}{2}, \tag{1}$$

pričom reálne čísla K, L spĺňajú rovnosti $K^2 = p^2 - 4q$ a $L^2 = p^2 - 4r$ (číslam K, L priradíme znamienka podľa očíslovania koreňov). Potom

$$1 = x_1y_1 - x_2y_2 = \frac{(-p + K)(p + L) - (-p - K)(p - L)}{4} = \frac{p(K - L)}{2},$$

odkiaľ $p \neq 0$ a $K - L = 2/p$. Dosadením do rovnosti

$$(K + L)(K - L) = K^2 - L^2 = (p^2 - 4q) - (p^2 - 4r) = 4(r - q)$$

vyjde $K + L = 2p(r - q)$. Zo získaných vyjadrení čísel $K + L$ a $K - L$ dostaneme $K = 1/p - p(q - r)$, po umocnení $K^2 = 1/p^2 - 2(q - r) + p^2(q - r)^2$. Keď to porovnáme s rovnosťou $K^2 = p^2 - 4q$, obdržíme po jednoduchej úprave žiadanú rovnosť zo zadania.

Druhá časť. Nech reálne čísla p, q, r spĺňajú prvú rovnosť zo zadania. Potom zrejme $p \neq 0$. Danú rovnosť upravíme dvoma podobnými spôsobmi na tvary

$$p^4(r - q)^2 + 2p^2(r - q) + 1 = p^4 - 4p^2q \quad \text{a} \quad p^4(q - r)^2 + 2p^2(q - r) + 1 = p^4 - 4p^2r.$$

Odtiaľ po vydelení číslom p^2 zisťujeme, že diskriminanty kvadratických rovníc zo zadania majú vyjadrenia

$$p^2 - 4q = \left(\frac{p^2(r - q) + 1}{p}\right)^2 \quad \text{a} \quad p^2 - 4r = \left(\frac{p^2(q - r) + 1}{p}\right)^2,$$

takže to sú nezáporné čísla a príslušné (reálne) korene majú tvar (1), pričom

$$K = \frac{p^2(r-q)+1}{p} \quad \text{a} \quad L = -\frac{p^2(q-r)+1}{p}.$$

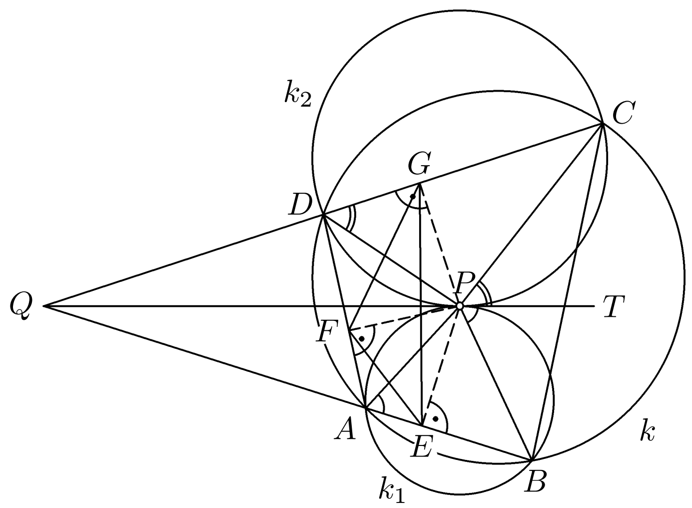
Znamienka čísel K a L sme zvolili tak, aby vyšlo (pozri prvú časť)

$$x_1y_1 - x_2y_2 = \frac{p(K-L)}{2} = \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{p^2(r-q)+1}{p} + \frac{p^2(q-r)+1}{p} \right) = 1.$$

Úloha 2.
Navzájom rôzne prvočísla p, q, r vyhovujú podmienkam úlohy práve vtedy, keď číslo $pq + pr + qr - k$ je deliteľné každým z čísel p, q, r, čiže ich súčinom pqr. Rovnosť $pq + pr + qr - k = n \cdot pqr$ pre vhodné celé n prepíšme na $k = pq + pr + qr - n \cdot pqr$. Ak $n \leqq 0$, vyplýva z ostatnej rovnosti, že $\max\{pq, pr, qr\} \leqq k$. Potom však každé z prvočísel p, q, r je najviac $k/2$ a takých trojíc je konečný počet. Ak $n \geqq 1$, dostávame odhad $k \leqq pq + pr + qr - pqr$. Ukážme, že s výnimkou trojice $\{p, q, r\} = \{2, 3, 5\}$ je ostatný výraz vždy záporný (čo bude v spore s tým, že $k > 0$). V takom prípade môžeme určite predpokladať, že $2 \leqq p < q < r$ a $r \geqq 7$. Potom $pq \geqq 2 \cdot 3 = 6$ a z nerovnosti $(p-2)(q-2) \geqq 0$ vyplýva $p + q \leqq pq/2 + 2$, takže

$$pq + pr + qr - pqr = (p+q)r + pq - pqr \leqq (\tfrac{1}{2}pq + 2)r + pq - pqr =$$
$$= 2r - pq(\tfrac{1}{2}r - 1) \leqq 2r - 6(\tfrac{1}{2}r - 1) = 6 - r < 0.$$

Úloha 3.
Označme k kružnicu opísanú štvoruholníku $ABCD$ a k_1, k_2 kružnice opísané trojuholníkom PAB, PCD. Vnútri uhla BPC uvažujme takú polpriamku PT, pre ktorú platí



Obr. 40

$|\sphericalangle BPT| = |\sphericalangle BAP|$. Podľa zadania potom platí (obr. 40)

$$|\sphericalangle CPT| = |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle BPT| = |\sphericalangle BPC| - |\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle PDC|.$$

Priamka PT je teda spoločnou vnútornou dotyčnicou oboch kružníc k_1 a k_2.

Uvažujme najskôr prípad, keď strany AB a CD uvažovaného tetivového štvoruholníka nie sú rovnobežné. Vzhľadom na to, že úsečky AB a CD sú spoločnými tetivami prislúchajúcich dvojíc kružníc k_1, k a k_2, k, existuje jediný bod Q, ktorý má rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam k, k_1 a k_2. Týmto bodom Q je spoločný bod všetkých troch priamok (chordál) AB, CD a PT. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že bod Q leží na polpriamke BA za bodom A (obr. 40).

Podľa Tálesovej vety sú zrejme štvoruholníky $AEPF$, $FPGD$ a $QEPG$ tetivové. Z rovností príslušných obvodových uhlov tak vyplýva

$$\begin{aligned}|\sphericalangle EFG| &= |\sphericalangle EFP| + |\sphericalangle GFP| = |\sphericalangle BAP| + |\sphericalangle PDC| = \\ &= |\sphericalangle BPT| + |\sphericalangle CPT| = |\sphericalangle BPC|.\end{aligned}$$

Podobne zistíme, že

$$\begin{aligned}|\sphericalangle FEG| &= |\sphericalangle FEP| - |\sphericalangle GEP| = |\sphericalangle FAP| - |\sphericalangle GQP| = \\ &= |\sphericalangle DAP| - |\sphericalangle DQP| = |\sphericalangle QDA| - |\sphericalangle QPA|,\end{aligned}$$

lebo $|\sphericalangle DAP| + |\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle QDA| + |\sphericalangle DQP|$. Pre úsekový uhol QPA navyše platí $|\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle PBA|$, takže

$$\begin{aligned}|\sphericalangle FEG| &= |\sphericalangle QDA| - |\sphericalangle QPA| = |\sphericalangle QDA| - |\sphericalangle PBA| = \\ &= |\sphericalangle QBC| - |\sphericalangle PBA| = |\sphericalangle PBC|.\end{aligned}$$

Tým sme dokázali, že trojuholníky FEG a PBC sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch, a sú teda podobné (uu).

Ak sú priamky AB a CD rovnobežné, je $ABCD$ rovnoramenný lichobežník so základňami AB a CD. Odtiaľ vyplýva, že body E, P, G ležia na osi súmernosti lichobežníka $ABCD$ a trojuholníky APD a BPC sú zhodné. Z vlastností obvodových uhlov tetivových štvoruholníkov $AEPF$ a $FPGD$ ľahko vyplýva, že trojuholníky EFG a APD sú podobné ($|\sphericalangle FEG| = |\sphericalangle PAD|$ a $|\sphericalangle EGF| = |\sphericalangle ADP|$). Odtiaľ už vyplýva podobnosť trojuholníkov FEG a PBC. Tým je dôkaz hotový.

Úloha 4.

Z tvaru rovníc vyplýva podmienka $xyz \neq 0$. Aspoň dve z čísel x, y, z musia mať rovnaké znamienko. Potom je kladná pravá strana rovnice, v ktorej sú tieto dve čísla v podiele, preto je kladná aj príslušná ľavá strana, takže zostávajúce z čísel x, y, z má rovnaké znamienko ako prvé dve. Platí teda buď $x, y, z > 0$, alebo $x, y, z < 0$.

Zaoberajme sa iba prvým prípadom, druhý sa totiž prevedie na prvý zmenou riešenia (x, y, z) na riešenie $(-x, -y, -z)$. Prvé dve rovnice sústavy vynásobme výrazom xyz

a potom ich odčítajme. Po úprave dostaneme $z - x = y(x^2 - yz)$. Ak je trojica (x, y, z) riešením, sú riešeniami aj trojice (y, z, x) a (z, x, y), ktoré dostaneme cyklickou zámenou. Preto môžeme predpokladať, že $x = \max\{x, y, z\}$. Potom $z - x \leqq 0$ a $x^2 - yz \geqq 0$ (nezabúdajme, že $x, y, z > 0$), takže z rovnosti $z - x = y(x^2 - yz)$ a podmienky $y > 0$ vyplýva $z - x = x^2 - yz = 0$, čo znamená $x = y = z$. Máme teda jedinú rovnicu $1/x^2 = 1 + 1$, ktorá má (jediný) kladný koreň $x = \sqrt{2}/2$.

Odpoveď. Sústava má práve dve riešenia $x = y = z = \pm\sqrt{2}/2$.

Úloha 5.
Bod V roviny trojuholníka ABC je priesečníkom jeho výšok práve vtedy, keď platí zároveň $AV \perp BC$ a $BV \perp AC$, čiže

$$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \qquad \text{a} \qquad \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Po dosadení $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BV} - \overrightarrow{CV}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{CV}$ a jednoduchej úprave dostaneme ekvivalentnú podmienku vo forme rovnosti skalárnych súčinov

$$\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV} = \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CV} = \overrightarrow{BV} \cdot \overrightarrow{CV}. \tag{1}$$

Našou úlohou je teda zistiť, kedy platí sústava (1) zároveň s podobnou sústavou

$$\overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{LV} = \overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{MV} = \overrightarrow{LV} \cdot \overrightarrow{MV}, \tag{2}$$

ktorá vyjadruje, že bod V je priesečníkom výšok trojuholníka KLM. Vyjadríme vektory z (2) ako lineárne kombinácie vektorov z (1). Podľa zadania existuje číslo p, $0 < p < 1$, pre ktoré platí

$$\overrightarrow{AK} = p\,\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BL} = p\,\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CM} = p\,\overrightarrow{CA}.$$

Keď do prvej rovnosti dosadíme $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{KV}$ a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{BV}$, dostaneme po úprave prvú z rovností

$$\overrightarrow{KV} = (1-p)\overrightarrow{AV} + p\,\overrightarrow{BV}, \ \overrightarrow{LV} = (1-p)\overrightarrow{BV} + p\,\overrightarrow{CV}, \ \overrightarrow{MV} = (1-p)\overrightarrow{CV} + p\,\overrightarrow{AV}.$$

Druhé dve rovnosti odvodíme analogicky. Odtiaľ vynásobením dostaneme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{LV} &= (1-p)^2\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{BV} + p(1-p)\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CV} + p(1-p)\overrightarrow{BV}^2 = \\ &= (1-p)s + p(1-p)\overrightarrow{BV}^2, \end{aligned}$$

kde písmeno s označuje spoločnú hodnotu súčinov z (1). Analogicky platí

$$\overrightarrow{KV} \cdot \overrightarrow{MV} = (1-p)s + p(1-p)\overrightarrow{AV}^2 \quad \text{a} \quad \overrightarrow{LV} \cdot \overrightarrow{MV} = (1-p)s + p(1-p)\overrightarrow{BV}^2.$$

Vidíme, že sústava (2) je ekvivalentná so sústavou rovností

$$p(1-p)\overrightarrow{AV}^2 = p(1-p)\overrightarrow{BV}^2 = p(1-p)\overrightarrow{CV}^2,$$

ktorá je vzhľadom na $p(1-p) \neq 0$ splnená práve vtedy, keď $|AV| = |BV| = |CV|$. Táto podmienka znamená, že priesečník výšok V trojuholníka ABC splýva so stredom kružnice opísanej. To nastane práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnostranný.

Iné riešenie. V prvej časti riešenia predpokladajme, že ABC je rovnostranný trojuholník, a označme O stred kružnice opísanej tomuto trojuholníku. Pri jednej z rotácií o $120°$ okolo bodu O platí $A \mapsto B \mapsto C \mapsto A$ a tiež $K \mapsto L \mapsto M \mapsto K$, lebo napríklad body K, resp. L delia v rovnakom pomere úsečku AB, resp. úsečku BC, ktorá je obrazom prvej úsečky v spomenutej rotácii. To znamená, že aj trojuholník KLM je rovnostranný a bod O je ortocentrom oboch trojuholníkov ABC a KLM.

V druhej časti riešenia predpokladajme, že ABC nie je rovnostranný trojuholník. Potom stred O kružnice opísanej tomuto trojuholníku nesplýva s jeho ťažiskom T. Ľahko ukážeme, že bod $T = (A+B+C)/3$ je ťažiskom aj trojuholníka KLM. Podľa zadania totiž existuje číslo $p \in (0,1)$ také, že

$$K = pA + (1-p)B, \quad L = pB + (1-p)C, \quad M = pC + (1-p)A,$$

odkiaľ okamžite vyplýva rovnosť $(K+L+M)/3 = (A+B+C)/3$.

Pripusťme, že trojuholníky ABC a KLM majú okrem ťažiska T spoločné aj ortocentrum, ktoré označíme V. Podľa známej vety ležia body V, T, O v uvedenom poradí na jednej priamke, nazývanej Eulerova priamka trojuholníka ABC, pričom platí $|VT| : |TO| = 2 : 1$. Stred kružnice opísanej je teda ťažiskom a ortocentrom jednoznačne určený. Úvahou o Eulerovej priamke trojuholníka KLM tak zisťujeme, že bod O je nielen stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC, ale aj stredom kružnice opísanej trojuholníku KLM. Body K, L, M majú preto rovnakú vzdialenosť od bodu O, takže majú aj rovnakú mocnosť ku kružnici opísanej trojuholníku ABC. Tieto mocnosti sa rovnajú hodnotám

$$\begin{aligned} -|AK| \cdot |BK| &= -p(1-p)|AB|^2, \\ -|BL| \cdot |CL| &= -p(1-p)|BC|^2, \\ -|CM| \cdot |AM| &= -p(1-p)|AC|^2, \end{aligned}$$

ktorých porovnaním dostaneme rovnosti $|AB| = |BC| = |CA|$ (lebo $p \notin \{0,1\}$). To je v spore s predpokladom, že trojuholník ABC nie je rovnostranný.

Úloha 6.

Po i spravených krokoch bude na stole $k - 2i$ kôpok. Ak teda zostane nakoniec na stole jediná kôpka, bolo číslo k nepárne a celkový počet krokov bol $(k-1)/2$. Rozoberieme, či číslo k dáva po delení štyrmi zvyšok 1, alebo zvyšok 3.

Prípad $k = 4c + 1$. Na začiatku leží na stole $1 + \cdots + k = k(k+1)/2 = (4c+1)(2c+1)$ kamienkov, vo všetkých $2c$ krokoch odstránime celkom $1 + \cdots + 2c = c(2c+1)$ kamienkov, takže počet kamienkov v poslednej kôpke bude

$$p = (4c+1)(2c+1) - c(2c+1) = (2c+1)(3c+1).$$

Čísla $2c+1$ a $3c+1$ sú však nesúdeliteľné, takže p je štvorec práve vtedy, keď sú štvorce obe čísla $2c+1$ a $3c+1$, teda práve vtedy, keď sú štvorce ich štvornásobky $4(2c+1) = 2k+2$ a $4(3c+1) = 3k+1$.

Prípad $k = 4c+3$. Na začiatku leží na stole $1+\cdots+k = k(k+1)/2 = 2(c+1)(4c+3)$ kamienkov, vo všetkých $2c+1$ krokoch odstránime celkom $1 + \cdots + (2c+1) = (c+1)(2c+1)$ kamienkov, takže počet kamienkov v poslednej kôpke bude

$$p = 2(c+1)(4c+3) - (c+1)(2c+1) = (c+1)(6c+5).$$

Keby bolo číslo p štvorec, museli by byť štvorcami obe nesúdeliteľné čísla $c+1$ a $6c+5$. Ukážme, že to nie je možné. Pripusťme existenciu prirodzených čísel x, y takých, že $c+1 = x^2$ a $6c+5 = y^2$. Z rovnosti $6x^2 - y^2 = 1$ vyplýva, že číslo y je nepárne, takže číslo y^2 dáva po delení ôsmimi zvyšok 1. Číslo $6x^2$ potom po delení ôsmimi dáva zvyšok 2, odkiaľ vyplýva, že číslo $3x^2$ po delení štyrmi dáva zvyšok 1, a to je spor. V prípade $k = 4c+3$ teda p nikdy nie je štvorec, rovnako ako nie je štvorec ani číslo $3k+1 = 12c+10$ (párne číslo, ktoré nie je deliteľné štyrmi).

Teraz nájdeme najmenšie číslo $k = 4c+1$, $c \geqq 1$, pre ktoré sú obe čísla $2c+1$ a $3c+1$ štvorce. Z rovností $2c+1 = x^2$ a $3c+1 = y^2$ pre vhodné celé $x, y > 1$ vyplýva $3x^2 - 2y^2 = 1$, takže x je nepárne. Potom číslo $2y^2$ po delení štyrmi dáva zvyšok 2, takže aj y je nepárne. Položme $x = 2a+1$, $y = 2b+1$ ($a, b > 0$ celé) a dosaďme do rovnosti $3x^2 - 2y^2 = 1$. Po úprave dostaneme vzťah $3a(a+1) = 2b(b+1)$, kam postupne dosadzujeme $a = 1, 2, \ldots$ Nájdeme tak rýchlo najmenšie vyhovujúce $a = 4$ a $b = 5$, ktorým zodpovedá $x = 9$, $y = 11$, $c = 40$ a $k = 161$.

45. Medzinárodná matematická olympiáda

V dňoch 6. – 18. júla 2004 sa v krajine Socrata, Olympijských hier a množstva geniálnych matematikov, teda v Grécku, uskutočnila už 45. Medzinárodná matematická olympiáda (IMO). Zúčastnilo sa jej 486 žiakov stredných škôl z 85 krajín. Každá krajina mohla vyslať najviac 6 súťažiach. Slovensko reprezentovali

Jozef Bodnár, Gymnázium Fiľakovo, 3. ročník,

Ondrej Budáč, Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy, Lučenec, 2. ročník,

Hana Budáčová, Gymnázium Boženy Slančíkovej Timravy, Lučenec, 4. ročník,

Peter Černo, Gymnázium Ľudovíta Štúra, Trenčín, 3. ročník,

František Simančík, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 3. ročník,

Tomáš Váňa, Gymnázium Milana Rastislava Štefánika, Žiar nad Hronom, 4. ročník.

Pedagogickým vedúcim družstva bol Ján Mazák, študent FMFI UK Bratislava, vedúcim výpravy SR bol predseda SK MO doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. z fakulty PEDaS ŽU v Žiline.

Naši žiaci sa v súťaži nestratili: Tomáš Váňa, František Simančík a Ondrej Budáč získali strieborné medaily, ďalším trom našim reprezentantom chýbal povestný kúsok šťastia – získali po 15 bodov, pričom na bronzovú medailu bolo treba 16 bodov. Aj oni však získali diplom Honorable Mention, ktorý sa udeľuje účastníkom, ktorí vyriešili bezchybne aspoň jeden zo šiestich (obvykle veľmi náročných) príkladov. Pretože v družstve boli len dvaja maturanti, je tu pre budúci rok nádej na ešte lepšie výsledky, ale miesto nemá nikto isté – každý si musí účasť v družstve znovu vybojovať a prejsť neúprosným sitom našej domácej súťaže so striktnými pravidlami. Výsledky družstva SR sú uvedené v tabuľke.

Meno	1	2	3	4	5	6	súčet	cena
Jozef Bodnár	7	2	0	1	4	1	15	diplom HM
Ondrej Budáč	7	2	2	7	6	0	24	striebro
Hana Budáčová	7	1	3	1	3	0	15	diplom HM
Peter Černo	7	0	0	7	1	0	15	diplom HM
František Simančík	7	4	1	7	3	3	25	striebro
Tomáš Váňa	7	5	0	7	6	0	25	striebro

Absolútnymi víťazmi IMO s plným počtom 42 bodov sa stali jeden Kanaďan, jeden Maďar a dvaja Rusi. IMO je súťaž jednotlivcov, ale býva zvykom sčítať body celého družstva a vznikne tak neoficiálne poradie krajín, ktoré je uvedené v tabuľke (čísla v zátvorke sú uvedené za krajinami, ktoré mali na IMO menší počet účastníkov).

Por.	Štát	Z	S	B	∑	Por.	Štát	Z	S	B	∑
1.	Čína	6	0	0	220	44.	Estónsko	0	0	2	85
2.	USA	5	1	0	212	45.	Uzbekistan	0	0	3	79
3.	Rusko	4	1	1	205	46.	Švédsko	0	0	3	75
4.	Vietnam	4	2	0	196	47.	Azerbajdžan	0	1	0	72
5.	Bulharsko	3	3	0	194	48.	Macedónsko	0	0	1	71
6.	Tchaj-wan	3	3	0	190	49.	Slovinsko	0	0	2	69
7.	Maďarsko	2	3	1	187		Taliansko	0	0	2	69
8.	Japonsko	2	4	0	182	51.	Litva	0	0	0	65
9.	Irán	1	5	0	178	52.	Kirgizstan	0	0	1	63
10.	Rumunsko	1	4	1	176		Lotyšsko	0	0	1	63
11.	Ukrajina	1	5	0	174	54.	Indonézia	0	0	1	61
12.	Južná Kórea	2	2	2	166	55.	Albánsko	0	0	1	57
13.	Bielorusko	0	4	2	154		Španielsko	0	0	1	57
14.	India	0	4	2	151		Švajčiarsko	0	0	2	57
15.	Izrael	1	1	4	147	58.	Nový Zéland	0	0	2	56
16.	Poľsko	2	1	1	142	59.	Nórsko	0	0	0	55
17.	Moldavsko	2	0	4	140		Rakúsko	0	0	1	55
18.	Singapur	0	3	3	139	61.	Holandsko	0	0	0	53
19.	Mongolsko	0	3	2	135	62.	Turkmenistan	0	0	2	52
20.	Veľká Británia	1	1	4	134	63.	Cyprus	0	0	1	49
21.	Brazília	0	2	4	132		Fínsko	0	0	1	49
	Kanada	1	0	3	132		Peru (3)	0	0	2	49
	Kazachstan	2	0	2	132	66.	Írsko	0	0	1	48
	Srbsko a Čierna Hora	0	2	3	132	67.	Uruguaj	0	0	0	47
25.	Nemecko	0	3	1	130	68.	Dánsko	0	0	1	46
26.	Grécko	0	2	3	126	69.	Portoriko (5)	0	1	0	43
27.	Austrália	1	1	2	125	70.	Bosna a Hercegovina	0	0	0	40
28.	Gruzínsko	0	0	5	123	71.	Luxembursko (3)	0	1	0	36
29.	Kolumbia	0	2	2	122	72.	Island	0	0	0	35
30.	Hongkong	0	2	2	120	73.	Malajzia	0	0	1	34
31.	Slovensko	0	3	0	119	74.	Srí Lanka	0	0	0	33
32.	Turecko	0	2	3	118	75.	Tunisko	0	0	0	31
33.	Južná Afrika	0	3	1	110	76.	Trinidad a Tobago (5)	0	0	0	29
34.	Česká republika	0	2	2	109	77.	Portugalsko	0	0	0	26
35.	Thajsko	0	0	4	99	78.	Kuba (1)	0	0	1	17
36.	Arménsko	0	0	4	98	79.	Filipíny (5)	0	0	0	16
37.	Mexiko	0	0	3	96	80.	Venezuela (2)	0	0	0	15
38.	Francúzsko	0	0	4	94	81.	Ekvádor	0	0	0	14
39.	Argentína	1	0	2	92	82.	Mozambik (3)	0	0	0	13
40.	Chorvátsko	0	0	3	89		Paraguaj (3)	0	0	0	13
41.	Maroko	0	0	3	88	84.	Kuvajt	0	0	0	5
42.	Belgicko	0	1	2	86	85.	Saudská Arábia	0	0	0	4
	Macao	0	0	2	86						

Možno stojí za povšimnutie, že z bývalej európskej pätnástky pred nami skončila len Veľká Británia, Nemecko a tesne aj domáce Grécko. Množstvo zaujímavých informácií nájde záujemca na *http://www.imo2004.gr*.

Pokiaľ ide o IMO, Gréci boli veľmi srdeční a zvládli hlavné úlohy usporiadateľa, ale niekoľkohodinové čakania neboli zvláštnosťou. Príchod vedúcich delegácií (tí sú potom členmi medzinárodnej *Jury*, ktorá rozhoduje o všetkom) bol 6. júla. Ja som priletel do Atén krátko po 15. hodine, ale z letiska nás odviezli do Delf až o 19:50, takže večera bola krátko pred polnocou. Vtedy sme ešte nevedeli, že to je dobre, lebo večera bude občas aj neskôr. Všetci súťažiaci spolu s pedagogickým vedúcim mali príchod 9. júla a boli ubytovaní v Aténach v hoteli „President“, ale vedúci delegácií boli (ako aj na predošlých IMO) striktne oddelení od žiakov, až kým neprebehla súťaž (12. a 13. júla); my sme boli v čase 6. – 13. júla v menších hoteloch v Delfách a v tamojšom *Európskom kultúrnom centre* sme vyberali príklady, riešenia, finalizovali textácie úloh, urobili preklady do materinských jazykov súťažiacich a venovali sa niektorým (aj) nevyhnutným byrokratickým povinnostiam. Našli sa však aj tri hodiny na prehliadku slávnej delfskej veštiarne. Ten komplex je skutočne impozantný a myslím, že máloktorý sochár by zvládol aj pri dnešnej technike nádhernú sochu napr. kráľa Iniohosa. Asi jediné, čo nám vnútrozemcom na Delfách mohlo vadiť, že sme sa dívali na more (19 km kľukatou cestou, ale oveľa menej priamo, lebo môj hotel „King Iniohos“ v Delfách bol v nadmorskej výške 620 m), ale nebolo kedy odskočiť si zaplávať.

Medzitým nás 11. júla odviezli do Atén na slávnostné otvorenie 45. IMO. Predstavte si 2,5 hodinovú cestu autobusom tesne popoludní v gréckej horúčave, keď sa pokazí klimatizácia a namiesto chladenia autobus kúri asi na teplotu 70°C. V uliciach Atén nemohol už ani pokračovať, hrozilo to požiarom. Takže sme išli ďalej pešo, až kým poslali pre nás iný autobus. Cesta nazad však bola dobrá – bol večer, klimatizáciu opravili a do Delf sme sa dostali dokonca už okolo druhej v noci. Po súťaži 13. júla popoludní nás presťahovali do Atén (klimatizácia fungovala) a boli sme ubytovaní v hoteli „Ledra Marriott“. Potom sme spolu s Jankom Mazákom dva ďalšie dni obhajovali pred porotou práce našich žiakov a prišiel jediný deň, keď vedúcich (a samozrejme aj pedagogických vedúcich) delegácií niekam odvezú: tentoraz to bolo na Peloponéz po trase Atény – Korint – Mykény – Epidaurus – Korint – Atény. Asi je to zbytočné, ale predsa to napíšem: bolo sa na čo dívať. Škoda len, že je to obvykle len jeden deň na medzinárodných matematických olympiádach. Žiaci mávajú – samozrejme, okrem tých dvoch súťažných dní – pestrý a príjemný program. Dodajme, že zaslúžene, veď celé IMO je pre nich.

Určite stojí za zmienku, že Grécko v tomto roku usporiadalo po IMO jedny „o kúsok“ väčšie športové OH, potom paralympijské hry a ešte v septembri medzinárodnú informatickú olympiádu. Klobúk dole, tí Gréci nie sú až tak starí, ako to z tých ruín vyzerá…

Cestovné formality boli zo strany MŠSR zabezpečené veľmi dobre a dovolím si aj touto cestou za to poďakovať.

Usporiadateľom 46. IMO bude Mexiko v čase 8. – 19. 7. 2005, a to v meste Mérida. V ďalších rokoch IMO usporiadajú postupne Slovinsko, Vietnam, Španielsko; polstoročnicu oslávi IMO v roku 2009 v Nemecku. Naša MO bude mať vtedy už 58 rokov.

Vojtech Bálint

Zadania úloh MMO

Úloha 1.
Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica nad priemerom BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N. Označme O stred strany BC. Osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom BMR a CNR prechádzajú spoločným bodom ležiacim na strane BC.

(Rumunsko)

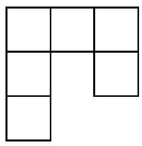
Úloha 2.
Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré spĺňajú rovnosť

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

pre všetky reálne čísla a, b, c také, že $ab+bc+ca=0$.

(Južná Kórea)

Úloha 3.
Nazvime *hák* útvar vytvorený zo šiestich jednotkových štvorčekov ako na obr. 41 alebo



Obr. 41

ľubovoľný útvar, ktorý vznikne jeho otočením či súmernosťou. Určte všetky pravouholníky $m \times n$, ktoré sa dajú hákmi pokryť tak, že
- pravouholník je pokrytý bez medzier a prekrytí;
- žiadna časť háku nepokrýva plochu mimo pravouholníka.

(Estónsko)

Úloha 4.
Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Nech $t_1, t_2, \dots, t_n$ sú kladné reálne čísla také, že

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Ukážte, že t_i, t_j, t_k sú dĺžky strán trojuholníka pre všetky i, j, k, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$.

(Južná Kórea)

Úloha 5.
V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečka BD nerozpoľuje ani jeden z uhlov ABC, CDA. Bod P leží vnútri $ABCD$ a spĺňa rovnosti

$$|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle BDA|.$$

Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď $|AP| = |CP|$.

(Poľsko)

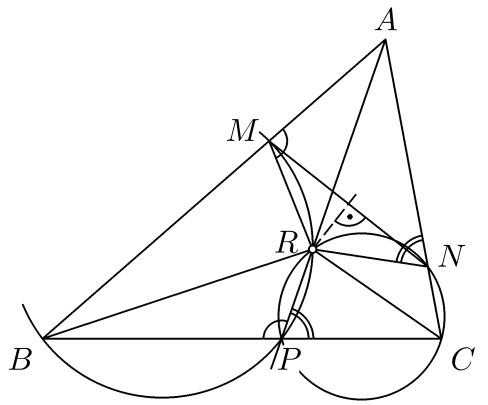
Úloha 6.
Prirodzené číslo nazveme *striedavé*, ak každé dve susedné číslice v jeho desiatkovom zápise majú rôznu paritu. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že n má striedavý násobok.

(Irán)

Riešenia úloh IMO

Úloha 1.
(Podľa *Františka Konopeckého*.) Pretože body M, N ležia na kružnici s priemerom BC, platí $|OM| = |ON| = |OB|$. Trojuholník MNO je teda rovnoramenný a os jeho uhla MON je zároveň osou úsečky MN. Bod R, ktorý je priesečníkom osi uhla MAN s osou protiľahlej strany MN trojuholníka AMN, leží preto na kružnici opísanej trojuholníku AMN. Pritom obe osi sú totožné len vtedy, keď $|AM| = |AN|$, čo vzhľadom na predpoklad $|AB| \neq |AC|$ nie je možné, lebo z vlastností tetivového štvoruholníka $BCNM$ ľahko vyplýva, že trojuholníky AMN a ACB sú podobné (zhodujú sa v dvoch uhloch).

Z mocnosti bodu A ku kružnici s priemerom BC vyplýva, že bod A má rovnakú mocnosť aj k obom kružniciam opísaným trojuholníkom BMR a CNR (obr. 42). Ak



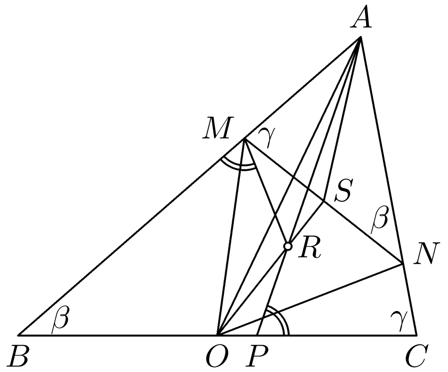
Obr. 42

označíme P druhý spoločný bod týchto dvoch kružníc (jedným je bod R), musí bod A ležať na ich spoločnej sečnici PR (to je práve množina všetkých bodov, ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť). Z tetivových štvoruholníkov $BPRM$ a $CPRN$ teraz spočítame, že

$$|\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle BPR| + |\sphericalangle CPR| = |\sphericalangle AMR| + |\sphericalangle ANR| = 180^\circ,$$

lebo AMR a ANR sú protiľahlé uhly tetivového štvoruholníka $AMRN$. Uhol BPC je teda priamy, takže spoločný bod P oboch kružníc leží na strane BC.

Iné riešenie. Označme S stred úsečky MN a P priesečník osi uhla BAC so stranou BC. Pretože trojuholníky AMN a ACB sú podobné, pričom ťažnici AS zodpovedá ťažnica AO, platí $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle CAS|$ (obr. 43), takže os uhla BAC je zároveň aj osou



Obr. 43

uhla OAS. Preto

$$\frac{|RS|}{|RO|} = \frac{|AS|}{|AO|}.$$

Z uvedenej podobnosti ďalej vyplýva

$$\frac{|AS|}{|AO|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MS|}{|BO|} = \frac{|MS|}{|MO|},$$

čo spolu s predchádzajúcou rovnosťou znamená, že MR je osou vnútorného uhla OMS.

Označme vnútorné uhly trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom. Pretože $|OM| = |OB|$, teda $|\sphericalangle BMO| = \beta$, a pretože $|\sphericalangle AMN| = \gamma$, veľkosť uhla OMN je α. Takže $|\sphericalangle BMR| = \beta + \alpha/2 = |\sphericalangle CPA|$. Dostali sme, že štvoruholník $BPRM$ je tetivový. Analogicky je tetivový aj štvoruholník $CPRN$. Teda bod $P \in BC$ je spoločným bodom oboch kružníc opísaných trojuholníkom BMR a CNR.

Úloha 2.

Ukážeme, že riešením sú iba mnohočleny $P(x) = sx^2 + tx^4$ pre ľubovoľné reálne s, t.

Nech $P(x)$ spĺňa podmienky zadania. Ak $a = b = 0$, tak $ab + bc + ca = 0$ pre každé reálne c. Preto dostávame

$$P(0-0) + P(0-c) + P(c-0) = 2P(0+0+c), \quad \text{čiže} \quad P(0) + P(-c) = P(c)$$

pre každé reálne c. Dosadením $c = 0$ dostaneme $P(0) = 0$, takže $P(c) = P(-c)$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$. Teda P je párna funkcia a musí byť tvaru

$$P(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2n-2} + \cdots a_1 x^2, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Teraz dokážeme, že stupeň mnohočlena P môže byť najviac 4.

Pre ľubovoľné reálne čísla u a v trojica $a = uv$, $b = (1-u)v$, $c = (u^2-u)v$ spĺňa

$$ab + bc + ca = (a+b)c + ab = v(u^2-u)v + uv(1-u)v = 0.$$

Dosadením tejto trojice do rovnosti zo zadania dostaneme

$$P\left((2u-1)v\right) + P\left((1-u^2)v\right) + P\left((u^2-2u)v\right) = 2P\left((u^2-u+1)v\right)$$

pre všetky reálne u, v. Pri pevnom u môžeme ostatnú rovnosť považovať za identitu mnohočlenov v premennej v. Porovnaním vedúcich koeficientov na oboch stranách máme pre všetky $u \in \mathbb{R}$ rovnosť

$$(2u-1)^{2n} + (1-u^2)^{2n} + (u^2-2u)^{2n} = 2(u^2-u+1)^{2n}.$$

Zvolením $u = -2$ dostaneme $5^{2n} + 3^{2n} + 8^{2n} = 2 \cdot 7^{2n}$, takže $8^{2n} < 2 \cdot 7^{2n}$. Avšak už pre $n = 3$ platí $8^{2n} > 2 \cdot 7^{2n}$ ($8^{2\cdot 3} = 262\,144 > 235\,298 = 2 \cdot 7^{2\cdot 3}$), a teda tým skôr to platí aj pre $n > 3$. Takže $n \leqq 2$, z čoho $P(x) = sx^2 + tx^4$ pre nejaké reálne s a t.

Na druhej strane, každý mnohočlen uvedeného tvaru spĺňa podmienky zadania. Aby sme to overili, uvedomme si najskôr, že ľubovoľná lineárna kombinácia dvoch mnohočlenov, ktoré spĺňajú podmienky zadania, tiež spĺňa tieto podmienky. Takže stačí overiť mnohočleny x^2 a x^4. To, že vyhovuje x^2, vyplýva z identity

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2 = -6(ab+bc+ca).$$

Overme aj x^4. Nech $ab+bc+ca = 0$. Označme $p = a-b$, $q = b-c$ a $r = c-a$. Pri overení x^2 sme vlastne ukázali, že $p^2+q^2+r^2 = 2(a+b+c)^2$. Potom, keďže $p+q+r = 0$, želanú rovnosť dostaneme nasledovne:

$$\begin{aligned}
pq + qr + rp &= -\tfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2) = -(a+b+c)^2,\\
(pq)^2 + (qr)^2 + (rp)^2 &= (pq+qr+rp)^2 - 2pqr(p+q+r) = (a+b+c)^4,\\
p^4 + q^4 + r^4 &= (p^2+q^2+r^2)^2 - 2\left((pq)^2+(qr)^2+(rp)^2\right) = 2(a+b+c)^4.
\end{aligned}$$

Iné riešenie. Pre každé $z \in \mathbb{R}$ trojica $(a,b,c) = (6z, 3z, -2z)$ spĺňa podmienku $ab+bc+ca = 0$. Dosadením do zadanej rovnosti dostávame

$$P(3z) + P(5z) + P(-8z) = 2P(7z).$$

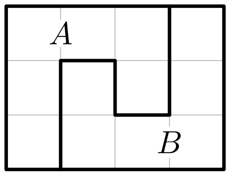
Takže ak $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, platí nutne pre každé $i = 0, 1, 2, \dots$ rovnosť

$$\left(3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i\right) a_i = 0.$$

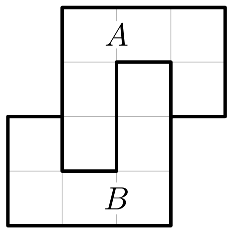
Výraz v zátvorkách je záporný pre nepárne i a kladný pre $i = 0$ a pre všetky párne $i \geqq 6$. Iba pre $i = 2$ a $i = 4$ je výraz nulový. Preto $P(x) = sx^2 + tx^4$ pre nejaké $s, t \in \mathbb{R}$.

Ostáva len overiť, že všetky mnohočleny tohto tvaru vyhovujú, čo urobíme rovnako ako v prvom riešení.

Úloha 3.
Predpokladajme, že pravouholník $m\times n$ je pokrytý hákmi tak, ako sa spomína v zadaní. Pre každý hák A máme jediný hák B, ktorý pokrýva *vnútorný* štvorček háku A jedným zo svojich *koncových* štvorčekov. Pritom vnútorný štvorček háku B je nutne pokrytý koncovým štvorčekom háku A. Takže v pokrytí sú všetky háky popárované do dvojíc.



Obr. 44



Obr. 45

Sú len dve možnosti, ako umiestniť B ku A, aby nevznikli medzery a prekrytia. V jednom prípade tvoria A a B obdĺžnik 4×3 (obr. 44), v druhom prípade osemuholníkový útvar (obr. 45). Pravouholník $m\times n$ teda vieme pokryť hákmi práve vtedy, keď ho vieme pokryť týmito *dvojútvarmi* zloženými z 12 štvorčekov. Preto mn musí byť nutne deliteľné dvanástimi. Ukážeme, že niektorý z rozmerov m a n musí byť deliteľný štyrmi.

Predpokladajme, že to neplatí. Potom m aj n sú párne, nakoľko $4\mid mn$. Rozdeľme pravouholník na jednotkové štvorčeky a do istých štvorčekov vpíšme čísla 1 alebo 2 ako na obr. 46 (jednotky sú vpísané v každom štvrtom riadku a v každom štvrtom stĺpci, dvojky sú na priesečníkoch „ojednotkovaných“ riadkov a stĺpcov). Keďže počet

			1				1		
			1				1		
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1
			1				1		
			1				1		
			1				1		
1	1	1	2	1	1	1	2	1	1
			1				1		
			1				1		
			1				1		

Obr. 46

štvorčekov v každom riadku aj stĺpci je párny, súčet všetkých čísel vpísaných do pravouholníka je párny. Ľahko možno overiť, že každý obdĺžnik 4×3 vždy pokryje čísla, ktorých súčet je 3 alebo 7. Útvar z obr. 45 zasa vždy pokryje čísla, ktorých súčet je 5 alebo 7. Teda počet všetkých dvojútvarov musí byť párny (súčet nepárneho počtu nepárnych čísel by bol nepárny). Potom ale $24 \mid mn$, čiže mn je deliteľné aj ôsmimi, čo je v spore s predpokladom, že m ani n nie je deliteľné štyrmi.

Uvedomme si ešte, že žiadny z rozmerov m, n sa nemôže rovnať 1, 2 ani 5 (nech ukladáme háky akokoľvek, nevieme nimi pokryť riadok či stĺpec pozdĺž strany pravouholníka dĺžky 1, 2 či 5). Zdôvodnili sme teda, že ak je pokrytie možné, tak aspoň jeden rozmer je deliteľný tromi, aspoň jeden štyrmi a $m, n \notin \{1, 2, 5\}$.

Naopak, ak sú tieto podmienky splnené, potom sa pravouholník hákmi pokryť dá (iba použitím obdĺžnikov 4×3). Totiž ak jeden rozmer je deliteľný tromi a druhý štyrmi, je existencia pokrytia zrejmá. A ak je jeden z rozmerov, povedzme m, deliteľný dvanástimi a $n \notin \{1, 2, 5\}$, potom n vieme rozložiť na súčet niekoľkých trojok a niekoľkých štvoriek. Celý pravouholník preto môžeme rozdeliť na pásy $m \times 3$ a $m \times 4$. Pritom každý z takých pásov zrejme pokryť vieme.

Úloha 4.

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

1° Aby sme tvrdenie dokázali pre $n = 3$, potrebujeme ukázať, že každé tri kladné reálne čísla t_1, t_2, t_3 spĺňajúce nerovnosť

$$10 > (t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) \tag{1}$$

spĺňajú aj trojuholníkové nerovnosti. Predpokladajme sporom, že to neplatí. Bez ujmy na všeobecnosti (vďaka symetrickosti nerovnosti (1)) môžeme predpokladať, že $t_1 \geqq t_2 + t_3$. Označme V výraz na ľavej strane (1). Úpravou dostávame

$$\begin{aligned} V &= (t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) = 3 + \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1}{t_3} + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_3}{t_1} + \underbrace{\frac{t_2}{t_3} + \frac{t_3}{t_2}}_{\geqq 2} \geqq \\ &\geqq 5 + t_1\left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \frac{t_2 + t_3}{t_1} \geqq 5 + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pri ostatnom odhade sme použili nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom čísel $1/t_2$ a $1/t_3$, resp. čísel t_2 a t_3. Keď rovnakú nerovnosť použijeme na predpoklad $t_1 \geqq t_2 + t_3$, dostaneme $t_1 \geqq 2\sqrt{t_2 t_3}$. Označme pre zjednodušenie úprav $t_1/\sqrt{t_2 t_3} = a$. Máme teda $a \geqq 2$. Pokračovaním v úpravách (2) získame

$$V \geqq 5 + 2a + \frac{2}{a} = 10 + \frac{2a^2 - 5a + 2}{a} = 10 + \frac{(2a-1)(a-2)}{a} \geqq 10 \tag{3}$$

(využili sme odvodenú nerovnosť $a \geqq 2$). Spojením (1), (2) a (3) dostávame zjavný spor $10 > V \geqq 10$.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre hodnotu $n - 1 \geqq 3$. Tvrdenie dokazujme opäť sporom. Nech teda kladné reálne čísla $t_1, t_2, \dots, t_n$ spĺňajú

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}\right) \tag{4}$$

a niektoré tri z nich nespĺňajú trojuholníkové nerovnosti. Vďaka symetrickosti nerovnosti (4) môžeme opäť bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $t_1 \geqq t_2 + t_3$. Výraz na pravej strane (4) označme W. Úpravami dostávame

$$\begin{aligned} W &= (t_1 + t_2 + \dots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}\right) = \\ &= (t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) + \\ &+ t_n\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{n-1}}\right) + \frac{1}{t_n}(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}) + 1 \geqq \\ &\geqq (n-1)^2 + 1 + \underbrace{\left(\frac{t_n}{t_1} + \frac{t_1}{t_n}\right)}_{\geqq 2} + \dots + \underbrace{\left(\frac{t_n}{t_{n-1}} + \frac{t_{n-1}}{t_n}\right)}_{\geqq 2} + 1 \geqq \\ &\geqq (n-1)^2 + 1 + 2(n-1) + 1 = n^2 + 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Všimnime si, ako sme využili indukčný predpoklad. Keďže $t_1 \geqq t_2 + t_3$, nemôže platiť

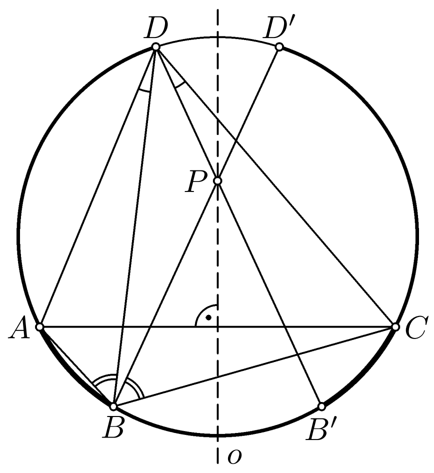
$$(n-1)^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{n-1}}\right)$$

(bolo by to v spore s tým, že tvrdenie platí pre kladné reálne čísla $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$), platí teda opačná nerovnosť, ktorú sme pri úpravách (5) použili. Spojením (4) a (5) máme $n^2 + 1 > W \geqq n^2 + 1$, čo je spor.

Poznámka. Riešenie je zaujímavé tým, že druhý krok indukcie je oveľa jednoduchší ako prvý krok. Pri matematickej indukcii to zvyčajne býva naopak.

Úloha 5.

(Podľa *Františka Konopeckého*.) Vzhľadom na to, že uhlopriečka BD nie je osou ani

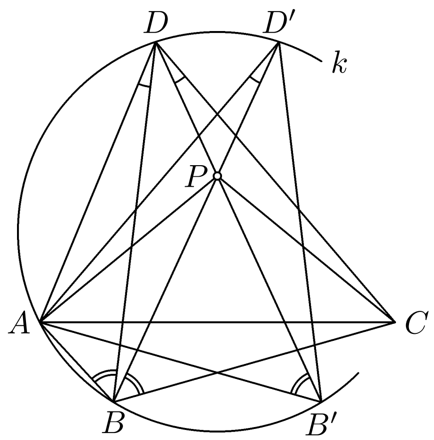


Obr. 47

jedného z vnútorných uhlov uvažovaného štvoruholníka $ABCD$ (pri vrcholoch B a D) a bod P leží vnútri $ABCD$, nemôže ležať na uhlopriečke BD.

Predpokladajme najskôr, že $ABCD$ je tetivový. Označme B' a D' priesečníky jemu opísanej kružnice s polpriamkami opačnými k PD, resp. k PB. Rovnosť uhlov ABD a PBC (obr. 47) tak znamená rovnosť príslušných oblúkov AD a CD'. Podobne sa zhodujú aj oblúky AB a CB'. To ale znamená, že bod B' je obrazom bodu B a bod D' obrazom bodu D v osovej súmernosti podľa osi o úsečky AC. V tejto osovej súmernosti je tak úsečka BD' obrazom úsečky $B'D$ a ich priesečník P preto leží na osi uhlopriečky AC. Teda $|AP| = |CP|$.

Obrátene, nech $|AP| = |CP|$. Uvažujme kružnicu k opísanú trojuholníku ABD a označme B' a D' jej priesečníky s polpriamkami opačnými k PD, resp. k PB (obr. 48).



Obr. 48

Z mocnosti bodu P ku kružnici k vyplýva

$$\frac{|PB|}{|PD|}=\frac{|PB'|}{|PD'|},$$

takže trojuholníky BPD a $B'PD'$ sú podobné. To ale naviac znamená, že trojuholníky BDC a $B'D'A$ sa zhodujú v dvojiciach uhlov pri stranách BD a $B'D'$, takže sú podobné s rovnakým koeficientom podobnosti ako trojuholníky BPD a $B'PD'$. A pretože v tejto podobnosti si zodpovedajú dve zhodné úsečky CP a AP, jedná sa o zhodnosť (ľahko nahliadneme, že sa jedná o osovú súmernosť). Táto zhodnosť zobrazí kružnicu k opísanú trojuholníku ABD na seba, proti bod C, ktorý je obrazom bodu A, leží tiež na tejto kružnici a štvoruholník $ABCD$ je teda tetivový.

Úloha 6.
Striedavých čísel vieme vytvoriť veľa, no vo všeobecnosti ich ťažko možno popísať v tvare, z ktorého by bolo vidieť, čím sú deliteľné. Zamerajme sa preto na nejakú úzku skupinu striedavých čísel, o ktorých vieme povedať viac. Najjednoduchšie striedavé čísla vytvoríme z jednotiek a núl. Zistime, či už medzi takýmito číslami nenájdeme násobky nejakej väčšej skupiny čísel. Presnejšie povedané, snažme sa pre číslo n vytvoriť striedavé číslo tvaru $1010\ldots101$ (nazývajme ďalej takéto číslo *superstriedavé* a označujme ho s_k, kde k je počet jednotiek v jeho zápise), ktoré by bolo násobkom n. Medzi superstriedavými číslami nájdeme vďaka Dirichletovmu princípu určite dve rôzne, ktoré dávajú po delení číslom n rovnaký zvyšok. Teda ich rozdiel je násobkom n. Na druhej strane, rozdiel dvoch superstriedavých čísel s_k a s_ℓ pre $k>\ell$ je zrejme tvaru

$$\underbrace{1010\ldots101}_{k\text{ jednotiek}}-\underbrace{1010\ldots101}_{\ell\text{ jednotiek}}=\underbrace{1010\ldots101}_{k-\ell\text{ jednotiek}}\underbrace{00\ldots00}_{2\ell\text{ núl}}=s_{k-\ell}\cdot 10^{2\ell}.$$

Takže pre každé n vieme nájsť k a ℓ také, že $n\mid s_{k-\ell}\cdot 10^{2\ell}$. Ak n je nesúdeliteľné s číslom 10, tak dokonca $n\mid s_{k-\ell}$, teda n má striedavý násobok.

Vidíme, že problém je s číslami n, ktoré sú párne, resp. deliteľné piatimi. Zrejme žiadny ich násobok nie je superstriedavý. Striedavé násobky k nim teda musíme hľadať v inom tvare. Skúsme ich nájsť najskôr pre čísla n, ktoré sú mocninou čísla 5, t. j. pre čísla $n=5^\alpha$. Pre malé hodnoty α sa nám to naozaj darí, keďže

$$5,\quad 25=5^2,\quad 125=5^3,\quad 8\,125=13\cdot 5^4,\quad 78\,125=25\cdot 5^5 \tag{1}$$

sú striedavé. Pre väčšie α môžeme striedavý násobok čísla 5^α vytvoriť indukciou. Totiž keď máme vytvorený striedavý násobok A_k čísla 5^k, ktorý má k číslic (pripúšťame, aby sa desiatkový zápis začínal nulou), môžeme vytvoriť striedavý násobok čísla 5^{k+1} tak, že pred A_k napíšeme vhodne jednu číslicu. Prvý krok indukcie je v (1). Pre druhý krok predpokladajme, že už máme vytvorené striedavé číslo

$$A_k=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_1}=5^k\cdot d,\qquad d\in\mathbb{N},\quad a_1,a_2,\ldots a_k\in\{0,1,2,\ldots,9\}.$$

Potom predpísaním nejakej číslice a_{k+1} pred A_k dostaneme

$$A_{k+1} = \overline{a_{k+1}A_k} = a_{k+1} \cdot 10^k + A_k = 10^k a_{k+1} + 5^k d = 5^k(2^k a_{k+1} + d).$$

Aby A_{k+1} bolo striedavé a súčasne násobkom 5^{k+1}, stačí a_{k+1} zvoliť tak, aby malo opačnú paritu ako a_k a aby $2^k a_{k+1}+d$ bolo deliteľné piatimi. To zrejme vždy ide, nakoľko prvú podmienku spĺňa 5 rôznych číslic (buď číslice z $\{1,3,5,7,9\}$, alebo z $\{0,2,4,6,8\}$) a pre každú z nich dáva číslica a_{k+1}, a teda aj číslo $2^k a_{k+1} + d$ iný zvyšok po delení piatimi (keďže 2^k a 5 sú nesúdeliteľné). Jeden z tých zvyškov teda musí byť nulový a vtedy $5 \mid 2^k a_{k+1} + d$. Ukázali sme teda, že všetky mocniny piatich majú striedavé násobky. Pritom z uvedeného postupu vyplýva, že pre dané $n = 5^\alpha$ vieme striedavý násobok vytvoriť tak, aby mal párny počet číslic a končil sa nepárnou číslicou.

Venujme sa teraz mocninám čísla dva. Opäť ukážeme, že pre každé $n = 2^\beta$ existuje striedavý násobok n. Postup bude podobný, ako pri mocninách piatich, avšak pridávať budeme až dve číslice a na vytvorené čísla budeme mať prísnejšie predpoklady. Presnejšie, dokážeme, že pre každé prirodzené k existuje $(2k-1)$-ciferné striedavé číslo B_k, ktoré je deliteľné číslom 2^{2k-1} ale nie je deliteľné číslom 2^{2k}. Prvý krok indukcie nám zabezpečia striedavé čísla

$$B_1 = 2, \quad B_2 = 232 = 2^3 \cdot 29, \quad B_3 = 27\,232 = 2^5 \cdot 851, \quad B_4 = 2\,127\,232 = 2^7 \cdot 16\,619.$$

V druhom kroku predpokladajme, že máme striedavé číslo

$$B_k = \overline{b_{2k-1}b_{2k-2}\dots b_1} = 2^{2k-1} \cdot d, \qquad d \in \mathbb{N},\ 2 \nmid d, \quad b_1, \dots b_{2k-1} \in \{0,1,2,\dots,9\}$$

(zo striedavosti a párnosti B_k nutne číslica b_{2k-1} je párna). Chceme zvoliť číslo $b = \overline{b_{2k+1}b_{2k}}$, (pričom $b_{2k} \in \{1,3,5,7,9\}$ a $b_{2k+1} \in \{0,2,4,6,8\}$) tak, aby číslo

$$B_{k+1} = \overline{bB_k} = b \cdot 10^{2k-1} + B_k = 10^{2k-1}b + 2^{2k-1}d = 2^{2k-1}(5^{2k-1}b + d)$$

bolo deliteľné číslom 2^{2k+1}, ale nebolo deliteľné číslom 2^{2k+2}. Potrebujeme teda, aby $5^{2k-1}b + d$ bolo deliteľné štyrmi, ale nebolo deliteľné ôsmimi. Avšak podľa predpokladu d je nepárne, teda dáva po delení ôsmimi jeden zo zvyškov 1, 3, 5 alebo 7. Za b teda stačí zvoliť jedno z čísel 21, 23, 25 alebo 27 tak, aby $5^{2k-1}b$ dávalo po delení ôsmimi taký zvyšok, že keď ho sčítame s d, výsledok bude dávať po delení ôsmimi zvyšok 4 (t. j. ak d dáva zvyšok 1, $5^{2k-1}b$ chceme so zvyškom 3, k zvyšku 3 chceme zvyšok 1, k zvyšku 5 zvyšok 7 a k zvyšku 7 zvyšok 5). Keďže 5^{2k-1} je nesúdeliteľné s 8 a čísla 21, 23, 25 a 27 dávajú rôzne nepárne zvyšky po delení ôsmimi, pre jednu hodnotu $b \in \{21,23,25,27\}$ bude zvyšok $5^{2k-1}b$ po delení ôsmimi naozaj taký, ako chceme. Aj pre mocniny dvoch sme teda našli striedavé násobky. Pritom ak pred B_k pripíšeme ľubovoľnú nepárnu číslicu, dostaneme striedavé číslo, ktoré je tiež násobkom 2^{2k-1}, pretože B_k má $2k-1$ číslic. Takže ku každému $n = 2^\beta$ vieme nájsť striedavé číslo, ktoré má párne veľa číslic.

Takto vyzbrojení môžeme prejsť ku všeobecnému prípadu, keď $n = 5^\alpha \cdot 2^\beta \cdot m$, pričom m nie je deliteľné dvoma ani piatimi. Pre $\alpha = \beta = 0$ sme už úlohu vyriešili (číslo n má v takom prípade superstriedavý násobok).

Uvažujme ďalej prípad, keď $\beta = 0$. Číslo 5^α má striedavý násobok s párnym počtom číslic, označme ho M. Zrejme potom aj číslo $S_k = \overline{MM\ldots M}$ (k-krát napíšeme za sebou číslo M) je striedavým násobkom 5^α. Rovnakou úvahou ako pri superstriedavých číslach nájdeme k a ℓ také, že $m \mid S_{k-\ell}$. Potom $S_{k-\ell}$ je striedavým násobkom n.

Úplne rovnako nájdeme striedavý násobok n v prípade, keď $\alpha = 0$.

Keď $\beta = 1$ a $\alpha \geqq 1$, stačí k číslu $S_{k-\ell}$, ktoré sme našli pre $n = 5^\alpha \cdot m$, pripísať sprava nulu. Dostaneme číslo, ktoré bude striedavé (keďže M a teda aj $S_{k-\ell}$ končili nepárnou číslicou) a bude násobkom dvoch aj násobkom $5^\alpha \cdot m$, t. j. bude násobkom $5^\alpha \cdot 2^1 \cdot m$.

Ostal prípad, keď $\beta \geqq 2$ a $\alpha \geqq 1$. V takom prípade je ale $n = 5^\alpha \cdot 2^\beta \cdot m$ násobkom čísla 20, teda ľubovoľný jeho násobok je tiež násobkom 20, čiže končí jedným z dvojčíslí 00, 20, 40, 60, 80. Také číslo zrejme nie je nikdy striedavé.

Odpoveď. Hľadanými číslami sú všetky čísla, ktoré nie sú násobkom čísla 20.

Zadania súťažných úloh

Kategória P

Archív zadaní Matematickej olympiády, kategórie P sa nachádza na WWW stránke http://www.ksp.sk/mop.

P – I – 1

Firma Pripojsa poskytovala svojim zákazníkom veľmi spoľahlivé pripojenie na internet. Kvôli tomu si vybudovala svoju vlastnú sieť spájajúcu niekoľko najväčších miest krajiny. Sieť pozostáva z uzlov umiestnených v týchto mestách a z liniek vedúcich medzi mestami. Každá linka spája dve mestá. Táto sieť mala tú vlastnosť, že ak sa prerušila ľubovoľná linka, sieť stále zostala funkčná, t.j. zvyšné linky umožňovali komunikáciu medzi ľubovoľnými dvoma mestami.

Nedávno sa firma rozhodla rozšíriť svoje služby aj pre zákazníkov v ďalších mestách. Preto vybudovala množstvo liniek pripájajúcich tieto mestá k už existujúcej sieti. Teraz by vo firme potrebovali vedieť, či je ich sieť stále ešte dostatočne spoľahlivá.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý načíta zoznam uzlov a liniek siete a zistí, či má sieť tú vlastnosť, že ak sa ľubovoľná jedna linka preruší, všetky mestá v sieti môžu ešte stále medzi sebou komunikovať pomocou zvyšných liniek.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `siet.in` obsahuje dve kladné celé čísla n a m, kde n je počet miest v sieti a m je počet liniek ($n \leq 100$). Pre jednoduchosť sú mestá v sieti očíslované číslami $1, 2, \ldots, n$. Na každom z nasledujúcich m riadkov sú dve čísla určujúce mestá spojené linkou.

Môžete predpokladať, že je možné komunikovať medzi každými dvomi mestami v sieti a že žiadna dve linky nespájajú rovnakú dvojicu miest.

Formát výstupu Výstupný súbor `siet.out` obsahuje jediný riadok, na ktorom je slovo „ANO“, ak sa v sieti na vstupe dá komunikovať medzi ľubovoľnými dvoma mestami aj po prerušení ľubovoľnej (jednej) linky a slovo „NIE“, ak sieť túto vlastnosť nemá.

Príklad

```
siet.in      siet.out                         siet.in      siet.out
5 6          ANO                              4 4          NIE
1 2                                           1 2
2 3                                           2 3
3 1                                           3 1
3 4                                           3 4
4 5
2 5
```

(Ak sa v 2. príklade preruší linka medzi mestami 3 a 4, tieto mestá nebudú môcť komunikovať.)

P – I – 2

Janko si založil maličkú programátorskú firmu, ktorú nazval príznačne AttoSoft[1]. Nedávno sa mu konečne podarilo získať prvého klienta. Ten mu dal za úlohu naprogramovať N jednoduchých programov.

Janko je však lenivý programovať, preto zamestnal N programátorov, na každý program jedného. Keď sa však zamestnaní programátori chceli pustiť do práce, vznikol problém. Janko má totiž len jeden počítač a na ňom v každom okamihu môže robiť len jeden programátor.

Zrazu si Janko uvedomil, že nie je jedno, v akom poradí budú programátori písať svoje programy. Podľa podpísanej zmluvy totiž programátorov neplatí za vykonanú prácu. Každého programátora platí za čas, ktorý uplynie od začiatku práce na celej zákazke až do okamihu, kým ten programátor nedokončí svoj program. Janko o každom z programátorov vie, koľko mu musí zaplatiť za jednu hodinu a ako dlho mu napísanie jeho programu bude trvať. Pomôžte mu zistiť, v akom poradí má programátorov poslať programovať, aby im dokopy zaplatil čo najmenej.

Príklad Majme troch programátorov A, B, C. A chce 100 Sk za hodinu a na svoj program potrebuje 2 hodiny. B chce 20 Sk za hodinu a potrebuje 5 hodín času. C chce 500 Sk za hodinu a potrebuje 20 hodín.

Ak by programovali v poradí A, B, C, tak by Janko musel zaplatiť A za 2 hodiny, B za 7 a C za 27 hodín, čo by ho vyšlo na 13 840 Sk.

Ak by programovali v poradí C, B, A, stálo by to Janka len $500 \times 20 + 20 \times 25 + 100 \times 27 = 13\,200$ Sk, preto takéto poradie je lepšie. (Ale nie je to najlepšie možné riešenie.)

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý načíta počet programátorov, ich hodinové mzdy a časy potrebné na ich prácu a spočíta, v akom poradí má Janko nechať programátorov pracovať, aby im dokopy zaplatil najmenšiu možnú sumu.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru `attosoft.in` obsahuje kladné celé číslo N $(1 \leq N \leq 10\,000)$ – počet programátorov. Nasleduje N riadkov, i-ty z nich obsahuje dve celé čísla m_i, t_i $(0 < m_i, t_i \leq 30\,000)$, kde m_i je hodinová mzda i-teho programátora a t_i je čas v hodinách, ktorý i-ty programátor potrebuje na napísanie svojho programu.

Formát výstupu Výstupný súbor `attosoft.out` obsahuje N riadkov, v j-tom z nich je jedno celé číslo od 1 do N – číslo programátora, ktorý má programovať ako j-ty. Ak má úloha viac riešení, vypíšte ľubovoľné z nich.

[1]mikro je 10^{-6}, piko je 10^{-12}, atto je 10^{-18}

Príklad

Súbor `attosoft.in`	**Súbor** `attosoft.out`
`3`	`1`
`100 2`	`3`
`20 5`	`2`
`500 20`	*(Janko zaplatí* 11 740 *Sk.)*

P – I – 3

Dané je pole $A[1..N]$ celých čísel. Napíšte program, ktorý bude vedieť čo najrýchlejšie spracúvať nasledujúce príkazy:
– zmeň hodnotu $A[x]$ na y
– vypíš súčet prvkov $A[x] + A[x+1] + \ldots + A[y]$
Váš program si na začiatku môže pole A v rozumnom čase predspracovať.

Formát vstupu Vstupný textový súbor `sucty.in` obsahuje vopred neurčený počet riadkov. Na prvom riadku je uvedené jediné celé číslo N ($1 \leq N \leq 2\,000$). Druhý riadok obsahuje pôvodné hodnoty v poli A – celé čísla $a_1, a_2, \ldots, a_N$ oddelené medzerami ($0 \leq \leq a_i \leq 1\,000\,000$).

Nasleduje niekoľko riadkov s príkazmi, každý z nich je jedného z nasledujúcich tvarov:

1 x y ($1 \leq x \leq N$, $0 \leq y \leq 1\,000\,000$)	zmeň hodnotu $A[x]$ na y
2 x y ($1 \leq x \leq y \leq N$)	vypíš hodnotu $A[x] + \ldots + A[y]$

Vstup je ukončený riadkom obsahujúcim jediné číslo 0.

Formát výstupu Váš program musí spracovať príkazy v poradí, v akom sú uvedené na vstupe. Pre každý príkaz na vypísanie súčtu nejakých prvkov poľa musí do výstupného súboru `sucty.out` zapísať jeden riadok a na ňom jedno celé číslo – súčet príslušných prvkov poľa v danom okamihu.

Príklad

Súbor `sucty.in`	**Súbor** `sucty.out`
`14`	`26`
`1 4 3 1 1 3 1 1 3 1 4 1 1 1`	`8`
`2 1 14`	`8`
`2 3 6`	`5`
`1 2 0`	
`2 3 6`	
`1 3 0`	
`2 3 6`	
`0`	

P – I – 4

V tejto úlohe sa budeme zaoberať *registrovými počítačmi. Register* je niečo podobné ako premenná. Presnejšie, v registri môže byť uložené *ľubovoľne veľké* nezáporné celé číslo. Na rozdiel od premenných, ktoré vieme medzi sebou sčítať, odčítať a násobiť, s registrom vieme robiť len tri jednoduché operácie: zväčšiť jeho obsah o 1, zmenšiť jeho obsah o 1 (ak v ňom bola 0, ostane v ňom 0) a pozrieť sa, či je v ňom 0.

Registrový počítač má k dispozícií neobmedzene veľa registrov, označených R_0, R_1, R_2, atď. Okrem registrov má registrový počítač k dispozícií len **konečne veľkú** pomocnú pamäť.

Program pre náš registrový počítač budeme písať v jazyku podobnom jazyku Pascal. Náš programovací jazyk bude rozšírený napr. o príkazy na prácu s registrami, na druhej strane niektoré príkazy z Pascalu budeme musieť zakázať.

Náš počítač bude riešiť úlohy nasledovného typu: dostane na vstupe slovo (reťazec písmen) a po nejakom čase odpovie, či je to slovo dobré alebo nie. Aby nám vedel odpovedať, zavedieme špeciálne príkazy **Accept** a **Reject**. Akonáhle sa vykoná príkaz **Accept**, slovo je dobré a výpočet končí. Akonáhle sa vykoná príkaz **Reject**, slovo je zlé a výpočet končí. Ak sa výpočet zacyklí, prípadne ak skončí a počas neho sa nevykoná ani **Accept**, ani **Reject**, slovo je tiež zlé.

Príkaz „prirátaj 1 k obsahu registra R“ budeme značiť **Inc**(R), „odrátaj 1 od obsahu registra R“ budeme značiť **Dec**(R). Výraz **Zero**(R) bude pravdivý, ak je v registri R nula a nepravdivý inak. Na začiatku výpočtu sú vo všetkých registroch nuly.

V programe môžeme použiť len konečne veľa registrov. Okrem nich môžeme použiť už iba konštantný počet pomocných premenných typu *byte*[2] (teda nemôžeme použiť polia!) a špeciálnu premennú **vstup** typu *char*. Premennú **vstup** môžeme meniť len zavolaním príkazu **Read**(**vstup**). Ak počítač ešte nedočítal vstupné slovo, príkaz **Read**(**vstup**) prečíta ďalšie písmeno a uloží ho do premennej **vstup**. Ak počítač už vstupné slovo dočítal, príkaz **Read**(**vstup**) uloží do premennej **vstup** špeciálny znak $.

Keďže registrový počítač má okrem registrov len konečne veľa pamäte, nemôže si dovoliť používať ani rekurziu (nemal by si kde pamätať návratové adresy). My pre istotu úplne zakážeme definovať a používať v našom programe procedúry. Takisto je zakázané volanie štandardných procedúr a funkcií jazyka Pascal. V aritmetických výrazoch sa smú používať iba premenné (teda nie registre), konštanty, celočíselné operátory $+$, $-$, $*$, div, mod a zátvorky. V podmienkach sa smú používať výrazy **Zero**(R_i), bežné relačné operátory ($<$, $<=$, $\ldots$), logické spojky a zátvorky.

Z kľúčových slov jazyka Pascal sú teda povolené iba nasledovné: **var**, **begin**, **end**, **if**, **then**, **else**, **case**, **of**, **while**, **do**, **repeat**, **until**, **for**, **to**, **downto**, **div**, **mod**, **and**, **or**, **not** a **xor**.

Príklad 1

Napíšte program pre registrový počítač, ktorý bude riešiť nasledujúcu úlohu: Na vstupe bude reťazec písmen a, b, c. Nech α je počet tých písmen a vo vstupnom reťazci, za ktorými už nie je žiadne c. Podobne nech β je počet b, za ktorými nie je žiadne c. Počítač má vstupný reťazec vyhlásiť za dobrý práve vtedy, keď $\alpha = \beta$.

Riešenie V registri R_1 si pamätáme aktuálnu hodnotu α, v registri R_2 hodnotu β. Vždy, keď prečítame písmeno c, oba registre vynulujeme. Na konci jednoducho porovnáme hodnoty uložené v registroch. Rozmyslite si, že by stačilo použiť jeden register (v ktorom by sme mali hodnotu $|\alpha - \beta|$).

[2] obsah takejto premennej je celé číslo od 0 do 255

```
var vstup : char;
begin
  Read(vstup);
  while (vstup <> '$') do begin
    if (vstup = 'a') then Inc(R_1);
    if (vstup = 'b') then Inc(R_2);
    if (vstup = 'c') then begin
      while not Zero(R_1) do Dec(R_1);
      while not Zero(R_2) do Dec(R_2);
    end;
    Read(vstup);
  end;
  while not Zero(R_1) do begin
    Dec(R_1); if (Zero(R_2)) then Reject else Dec(R_2);
  end;
  if Zero(R_2) then Accept;
end.
```

Príklad 2

Napíšte program pre registrový počítač, ktorý bude riešiť nasledujúcu úlohu: Na vstupe bude reťazec písmen a. Počítač ho má vyhlásiť za dobrý práve vtedy, keď je jeho dĺžka mocninou troch.

Riešenie Prečítame vstupné slovo, pričom si do R_1 uložíme jeho dĺžku. Potrebujeme zistiť, či je to mocnina troch. Aby sme to zistili, budeme uloženú hodnotu deliť tromi, kým to pôjde. Ak na konci dostaneme podiel 0 a zvyšok 1, pôvodné číslo bola mocnina 3, inak nie.

```
var vstup : char; zvysok : byte;
begin
  Read(vstup);
  while (vstup <> '$') do begin Inc(R1); Read(vstup); end;
  if Zero(R1) then Reject;
  while true do begin
    zvysok := 0;
    while not Zero(R1) do begin
      Dec(R1);
      zvysok := (zvysok + 1) mod 3;
      if (zvysok = 0) then Inc(R2);
    end;
    if (Zero(R2) and (zvysok = 1)) then Accept;
    if (zvysok <> 0) then Reject;
    while not Zero(R2) do begin Dec(R2); Inc(R1); end;
  end;
end.
```

Súťažná úloha

Napíšte program pre registrový počítač, ktorý bude riešiť nasledujúcu úlohu: Vstupom bude reťazec písmen *a*, *b*, *c*, *d*. Počítač ho má vyhlásiť za dobrý práve vtedy, keď je v ňom najviac písmen *a*.

Teda napríklad vstup *baacd* je dobrý, vstup *baacdbb* nie je dobrý (lebo písmen *b* je viac ako *a*) a ani vstup *ac* nie je dobrý (lebo písmen *a* a *c* je rovnako).

Základným kritériom hodnotenia bude počet registrov, ktoré váš počítač potrebuje. Snažte sa zostrojiť počítač, ktorý ich používa čo najmenej!

P – II – 1

Firma Truhlík a syn má v meste N budov a chce svoje budovy prepojiť počítačovou sieťou. Vedenie rozhodlo, že v K ($1 \leq K \leq N$) budovách zakúpia vysokorýchlostné pripojenie na internet. Okrem toho, niektoré dvojice budov budú prepojené optickým káblom.

Dve budovy sú v tom istom komponente siete, ak sa medzi nimi dá komunikovať cez niekoľko optických káblov (teda prípadne cez niekoľko iných budov). Aby mohli spolu komunikovať dve budovy v rôznych komponentoch siete, musí každý z týchto komponentov obsahovať aspoň jeden počítač pripojený na internet.

Súťažná úloha

Na vstupe sú dané čísla N a K a pre každú dvojicu budov jedno kladné celé číslo – cena vybudovania optického kábla medzi týmito dvoma budovami. Navrhnite efektívny algoritmus, ktorý vyberie, ktorých K budov pripojiť na internet a ktoré dvojice budov spojiť optickým káblom tak, aby každé dve budovy mohli spolu komunikovať a aby celková cena optických káblov bola najmenšia možná.

Príklad

Vstup:
$N = 4, K = 2$
Ceny spojení:
(1,2): 100
(1,3): 10
(1,4): 100
(1.5): 300
(2,3): 100
(2,4): 10
(2,5): 300
(3,4): 47
(3,5): 27
(4,5): 74

Výstup:
Na internet pripojíme budovy 1 a 2, káblom spojíme dvojice $(1, 3)$, $(2, 4)$ a $(3, 5)$. Cena kábla bude 47.

P – II – 2

Jankovej programátorskej firme AttoSoft sa podarilo získať druhého klienta. Ten mu dal opäť za úlohu naprogramovať N jednoduchých programov.

Janko chce tentokrát ušetriť, preto namiesto programátorov zamestnal N študentov, na každý program jedného. Janko má stále iba jeden počítač, a na ňom v každom okamihu môže robiť len jeden študent. Hlavný problém je ale v tom, že študenti môžu pracovať len medzi prednáškami.

Študent i potrebuje p_i hodín času na napísanie prideleného programu, príde do firmy v čase s_i a musí odísť najneskôr v čase t_i. Program nemusí napísať naraz, môže občas prácu prerušiť, počítač uvoľniť iným študentom a vypiť si kofolu.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý zistí, ktorý študent má kedy používať počítač, tak aby všetci stihli napísať svoje programy za jeden deň, alebo rozhodne, že to nie je možné.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$N = 3$ $p_1 = 1, s_1 = 3, t_1 = 4$ $p_2 = 2, s_2 = 2, t_2 = 5$ $p_3 = 5, s_1 = 1, t_1 = 10$	Študent 1 pracuje od tretej do švrtej, študent 2 pracuje od druhej do tretej a od štvrtej do piatej, študent 3 pracuje od piatej do desiatej.
Vstup	**Výstup**
$N = 2$ $p_1 = 200, s_1 = 300, t_1 = 500$ $p_2 = 200, s_2 = 400, t_2 = 600$	Nedá sa.

P – II – 3

Kleofáš dostal dnes zrána hlad, a tak sa rozhodol spraviť si syrovú bagetu. Bagetu si môžeme predstaviť ako úsečku dlhú N cm, alebo presnejšie ako uzavretý interval $\langle 0, N\rangle$. Každý kúsok syru tvorí taktiež uzavretý interval. Keďže Kleofáš je pedant, kladie kúsky syru tak, aby súradnice ich začiatkov aj koncov boli celé čísla. Kleofáš by chcel, aby jeho bageta bola pokrytá syrom presne podľa jeho predstáv. Na to ale potrebuje jednoduchý počítačový program, ktorý by mu pomohol.

Súťažná úloha

Na vstupe je veľkosť bagety N ($1 \leq N \leq 10^6$). Nasleduje P príkazov ($1 \leq P \leq 10^9$), každý z nich je jedného z nasledujúcich tvarov:

`PRIDAJ a b`	(Kleofáš pridal kúsok syra, siahajúci od a po b.)
`KOLKO c`	(Program by mal vypísať, koľko kusov syra leží na pozícií c.)

Váš program musí spracúvať príkazy v poradí, v akom sú uvedené na vstupe. Pre každý príkaz `KOLKO` vypíšte jedno číslo – počet dovtedy pridaných kúskov syru, ktoré ležia nad súradnicou c. (Keďže kúsky syra sú uzavreté intervaly, rátajú sa aj tie kúsky, pre ktoré je c súradnica jeho začiatku alebo konca.)

Príklad

Vstup	Výstup
`N=20`	
`PRIDAJ 1 10`	
`PRIDAJ 6 12`	
`KOLKO 5`	`1`
`KOLKO 6`	`2`
`PRIDAJ 4 14`	
`KOLKO 5`	`2`
`KOLKO 16`	`0`

P – II – 4

Pôvodný študijný text „Registrové počítače“ k príkladu P–II–4 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **115**.

V tomto kole sa budeme zaoberať tzv. *dvojsmernými* registrovými počítačmi. Od registrových počítačov z domáceho kola sa odlišujú tým, že sa pri čítaní vstupného slova vedia vracať späť.

Premenná **vstup** vždy obsahuje hodnotu aktuálneho písmena vstupu. Na začiatku je aktuálnym písmenom prvé písmeno vstupu. Aktuálne písmeno vstupu vieme zmeniť zavolaním príkazov **Left** (aktuálnym sa stane predchádzajúce písmeno) a **Right** (aktuálnym sa stane nasledujúce písmeno). Ak by sa aktuálne písmeno malo nachádzať mimo vstupného slova, premenná **vstup** bude obsahovať špeciálny znak \$. (Môžeme si predstaviť, že pred aj za vstupným slovom sa nachádza dostatočne veľa znakov \$.)

Príklad

Napíšte program pre dvojsmerný registrový počítač, ktorý bude riešiť nasledujúcu úlohu: Na vstupe bude reťazec písmen a, b, c. Nech α je počet písmen a vo vstupnom reťazci, β nech je počet b a γ nech je počet c. Počítač má vstupný reťazec vyhlásiť za dobrý práve vtedy, keď $\alpha = \beta = \gamma$.

Riešenie Prejdeme vstupné slovo zľava doprava, v registroch R_1 a R_2 spočítame hodnoty α a β, keď vstupné slovo dočítame, porovnáme obsahy registrov. Vrátime sa na začiatok, pri druhom prechode spočítame v R_1 a R_2 hodnoty β a γ a porovnáme ich. Rozmyslite si, že by stačilo použiť jediný register (v ktorom by sme mali hodnotu $|\alpha-\beta|$, resp. $|\beta-\gamma|$).

```
var vstup : char;
begin
  while (vstup <> '$') do begin
    if (vstup = 'a') then Inc(R_1);
    if (vstup = 'b') then Inc(R_2);
    Right;
  end;
```

```
    while not Zero(R_1) do begin
      Dec(R_1); if Zero(R_2) then Reject else Dec(R_2);
    end;
    if not Zero(R_2) then Reject;
    { bolo rovnako 'a' a 'b', vratime sa na zaciatok }
    Left; while (vstup <> '$') do Left;
    Right;

    while (vstup <> '$') do begin
      if (vstup = 'b') then Inc(R_1);
      if (vstup = 'c') then Inc(R_2);
      Right;
    end;
    while not Zero(R_1) do begin
      Dec(R_1); if Zero(R_2) then Reject else Dec(R_2);
    end;
    if Zero(R_2) then Accept;
end.
```

Súťažná úloha

Napíšte program pre dvojsmerný registrový počítač, ktorý bude riešiť nasledujúcu úlohu: Vstupom bude reťazec písmen a, b, c, d. Počítač ho má vyhlásiť za dobrý práve vtedy, keď je to palindróm, t.j. je rovnaký, keď ho čítame odpredu aj odzadu. Formálne: slovo $a_1a_2a_3 \ldots a_{n-1}a_n$ je palindróm, ak $a_1 = a_n$, $a_2 = a_{n-1}$, $\ldots$, $a_{\lfloor n/2 \rfloor} = a_{\lceil n/2 \rceil}$. Teda napríklad vstupy *bacab* a *dd* sú palindrómy, vstupy *baacdbb* a *bacabdccc* nie sú.

Základným kritériom hodnotenia bude počet registrov, ktoré váš počítač potrebuje. Snažte sa zostrojiť počítač, ktorý ich používa čo najmenej!

P – III – 1

Istá nemenovaná tajná spoločnosť má N agentov. V záujme utajenia každý agent môže vydávať rozkazy iba niekoľkým ďalším agentom. Agent, ktorý dostane rozkaz, pošle tento rozkaz všetkým agentom, ktorým môže vydávať rozkazy. Šéfom spoločnosti je taký agent, ktorý ak vydá rozkaz, tak ho časom dostanú všetci agenti. (Spoločnosť môže mať aj viacero šéfov, nemusí mať žiadneho.)

Súťažná úloha

Na vstupe je počet agentov N. Agenti sú očíslovaní číslami od 7 (presnejšie 007) do $N + 6$. Pre každého agenta je tiež daný zoznam agentov, ktorým môže vydať rozkaz. Navrhnite efektívny algoritmus, ktorý nájde šéfa tajnej spoločnosti (ak je ich viac, stačí nájsť ľubovoľného) alebo zistí, že tajná spoločnosť nemá šéfa.

Príklad

Vstup	**Výstup**
$N = 3$	Agent 7 je šéf.
agent 7 rozkazuje agentovi 8	
agent 8 rozkazuje agentovi 9	
agent 9 rozkazuje agentovi 7	

Vstup	**Výstup**
$N = 4$	Žiaden agent nie je šéf.
agent 7 nerozkazuje nikomu	
agent 8 nerozkazuje nikomu	
agent 9 rozkazuje agentom 7 a 8	
agent 10 rozkazuje agentom 7 a 8	

P – III – 2

Meteorologická stanica každú minútu meria teplotu vzduchu. Meteorológovia by potrebovali program, ktorý by im v každom okamihu hovoril, aká najnižšia teplota bola nameraná počas posledných K minút. Vašou úlohou bude napísať tento program.

Na vstupe je číslo K, nasleduje postupnosť nameraných teplôt ukončená hodnotou -1000. Váš program by vždy po prečítaní teploty mal vypísať najnižšiu spomedzi posledných K načítaných teplôt.[3]

Príklad

Vstup	**Výstup**
$K = 3$	
teploty:	
9.0	9.0
4.7	4.7
5.3	4.7
2.1	2.1
9.0	2.1
9.8	2.1
17.0	9.0
9.5	9.5
-1000	

P – III – 3

Študijný text „Registrové počítače“ k príkladu P–III–3 možno nájsť v zadaní príkladu P–I–4 na strane **115***.*

V tomto kole sa budeme opäť zaoberať tzv. *jednosmernými registrovými počítačmi* – rovnakými ako v domácom kole.

[3] Resp. najnižšiu spomedzi doteraz načítaných teplôt, ak ich bolo menej ako K.

Súťažná úloha

a) Nech R je reťazec tvorený písmenami a, b, c, A, B, C. Označme $m(R)$ reťazec tvorený malými písmenami v R (v poradí, v akom sa vyskytujú v R). Analogicky označme $v(R)$ reťazec tvorený veľkými písmenami v R. Reťazec $upcase(R)$ dostaneme z R tak, že nahradíme všetky malé písmená zodpovedajúcimi veľkými.

Napr. ak $R = aaAcB$, tak $m(R) = aac$, $v(R) = AB$ a $upcase(R) = AAACB$.

Napíšte program pre jednosmerný registrový počítač, ktorý bude riešiť nasledujúcu úlohu: Na vstupe dostane reťazec R, tvorený písmenami a, b, c, A, B, C. Počítač ho má vyhlásiť za dobrý práve vtedy, ak $upcase(m(R)) = v(R)$. (Slovom: ak veľké písmená v R tvoria „to isté“ slovo ako malé.)

Teda napr. vstupy aA, Aa a $abAcBaCABb$ sú dobré, ale vstupy aa, $BcbC$ ani $acACa$ nie sú dobré.

Váš program môže použiť ľubovoľný konečný počet registrov, hodnotí sa len jeho správnosť. Ak si myslíte, že takýto program neexistuje, dokážte to.

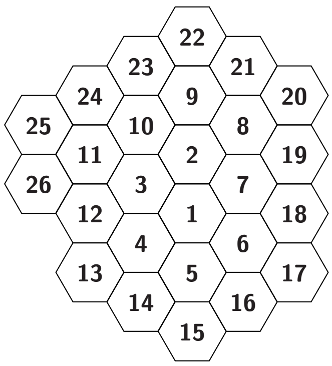
b) Dokážte, že pre ľubovoľnú úlohu platí: Ak vieme zostrojiť program pre registrový počítač, ktorý rieši danú úlohu pomocou troch registrov, tak vieme zostrojiť program, ktorý túto úlohu rieši pomocou iba dvoch registrov.

Inými slovami: Ukážte postup, ako existujúci program používajúci 3 registre prepísať na ekvivalentný, ktorý potrebuje len dva registre. Nezabudnite zdôvodniť správnosť vášho postupu.

P – III – 4

„Ták, a teraz budete skákať vždy, keď zapískam! A každý ináč.“ rozkázal Konrád svojim dvom psíkom. Chudáci malí, musia teraz obidvaja poskakovať po lúke, až kým sa obidvaja súčasne neschovajú.

Svet je nekonečná šesťuholníková sieť. Políčka sveta sú očíslované prirodzenými číslami idúc od čísla 1 po špirále. Lúku tvorí prvých N políčok sveta. Na obrázku je príklad lúky pre $N = 26$.



Obr. 49

Na lúke stoja naši dvaja psíci na políčkach S_1, S_2. Skrýš pre prvého je na políčku T_1, pre druhého na políčku T_2. Na M políčkach lúky rastú bodliaky a psíci tam za žiadnych okolností neskočia.

Na jedno písknutie dokážu psíci preskočiť na ľubovolné susedné políčko, pokiaľ na ňom nerastú bodliaky. Nemôžu skákať obidvaja súčasne tým istým smerom a taktiež nemôžu obidvaja dopadnúť na to isté políčko. Na každé písknutie musí každý z nich preskočiť na iné políčko (aj keby už stál v skrýši).

Vašou úlohou je zistiť, na koľko najmenej písknutí môžu psíci stáť súčasne vo svojich skrýšach.

Súťažná úloha

Na vstupe je za sebou popis niekoľkých (max. 5) problémov.

Každý problém má na prvom riadku 2 čísla N ($2 \leq N \leq 500$), M ($0 \leq M \leq N-2$), na druhom riadku čísla políčok S_1, T_1, S_2 a T_2 ($1 \leq S_1, T_1, S_2, T_2 \leq N$). Nasleduje ďalších M riadkov s číslami políčok, kde rastú bodliaky.

Vstup je ukončený riadkom obsahujúcim $M = N = 0$.

Môžete predpokladať, že $S_1 \neq S_2$, $T_1 \neq T_2$ a že na políčkach S_1, S_2 nie sú bodliaky. Za posledným vstupom je riadok s dvoma nulami.

Na výstup vypíšte pre každý problém jeden riadok s najmensím počtom písknutí, po ktorom môžu psíci súčasne stáť vo svojich skrýšach. Ak sa to nedá, vypíšte namiesto počtu taktov text „neda sa“.

Príklad

Vstup
```
11 0
3 10 6 7
11 1
3 10 6 7
1
10 2
3 10 7 8
2
9
0 0
```

Výstup
```
2
3
neda sa
```

P – III – 5

Jankovej programátorskej firme AttoSoft sa podarilo získať ďalšieho klienta, ktorý potrebuje naprogramovať N programov. Jankovi a jeho programátorom sa však do práce veľmi nechcelo a tak prišiel termín odovzdania a programy ešte stále nie sú hotové. Janko sa zľakol a začal študovať zmluvu, ktorú so zákazníkom podpísal.

V zmluve bol pre každý program uvedený vzorec, akým sa počíta pokuta za neskoré odovzdanie programu v závislosti od doby omeškania. Našťastie netreba zaplatiť súčet pokút, **ale len najvyššiu pokutu zo všetkých**. Teraz sa Janko snaží naplánovať prácu na programoch tak, aby zaplatil čo najmenšiu pokutu. Ako predtým, aj teraz má k dispozícii len jeden počítač, a preto sa nedá pracovať na viacerých programoch naraz. Prácu na jednom programe nemožno prerušiť.[4]

[4] Šikovnejší z vás si po prečítaní zvyšku zadania uvedomia, že aj keby sa to smelo, neoplatí sa to.

Súťažná úloha

Na vstupe je pre každý z nedokončených programov vzorec na výpočet pokuty a koľko dní treba na jeho dokončenie. Napíšte program, ktorý nájde rozvrh na dokončenie programov, pri ktorom Janko zaplatí najmenšiu pokutu. Pre jednoduchosť má vzorec na výpočet pokuty tvar polynómu najviac tretieho stupňa $ax^3 + bx^2 + cx + d$, v ktorom sú koeficienty a, b, c, d nezáporné a x je počet dní, o ktoré sa odovzdanie programu omeškalo.

Formát vstupu Prvý riadok vstupného súboru obsahuje kladné celé číslo N ($1 \leq N \leq$ $\leq 5\,000$) – počet programov. Nasleduje N riadkov, i-ty z nich obsahuje päť celých čísel l_i, a_i, b_i, c_i, d_i ($1 \leq l_i \leq 100$, $0 \leq a_i, b_i, c_i, d_i \leq 5\,000$) kde l_i je čas v dňoch potrebný na dokončenie i-teho programu a a_i, b_i, c_i, d_i sú koeficienty vzorca na výpočet pokuty. Môžete predpokladať, že za 100 000 dní sa stihnú naprogramovať všetky programy.

Formát výstupu Výstupný súbor obsahuje N čísel, oddelených bielymi znakmi (medzerami alebo koncami riadkov). Tieto čísla reprezentujú čísla programov v poradí, v akom ich treba dokončiť, aby pokuta bola najmenšia možná. Ak má úloha viac riešení, vypíšte ľubovoľné z nich.

Príklad

Vstup	**Výstup**
`3`	`1`
`10 1 0 0 0`	`3`
`3 0 0 0 10`	`2`
`1 0 0 5 0`	

Poznámka Pokuta za program číslo 1 dokončený po desiatich dňoch je $10^3 = 1000$, za program číslo 2 dokončený po 14 dňoch je 10 a za program číslo 3 dokončený po 11 dňoch je $5 \cdot 11 = 55$. Janko teda zaplatí pokutu 1000.

Riešenia súťažných úloh

Kategória P

P – I – 1

Na úvod pár slov pre tých, ktorým slová *teória grafov* príliš nehovoria. V našom chápaní graf je niekoľko bodov (ktoré budeme volať vrcholy), niektoré dvojice bodov sú pospájané čiarami (ktoré budeme volať hrany). Alebo ešte raz a formálnejšie, (neorientovaný) graf je dvojica $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholov a $E \subseteq \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$ je množina neusporiadaných dvojíc vrcholov = hrán. Práve takýto graf máme v našej úlohe na vstupe – mestá v krajine sú vrcholy grafu a linky sú hrany medzi nimi.

Hovoríme, že graf je súvislý, ak sa po hranách dá prejsť z ľubovoľného vrcholu do ľubovoľného iného. Podľa zadania graf na vstupe je súvislý. Máme zistiť, či odstránenie niektorej hrany jeho súvislosť poruší. Hranu, ktorej odstránenie znesúvislí graf, voláme most.

Ako zistiť, či je graf súvislý? Existuje viacero algoritmov, sú známe pod spoločným názvom *ofarbovanie vrcholov* alebo tiež *prehľadávanie*. Základná myšlienka: začneme v nejakom vrchole grafu a postupne systematicky ofarbujeme všetky vrcholy, kam sa vieme dostať. Keď už nevieme nič ofarbiť, skončili sme. Teraz sa už len stačí pozrieť, či sú ofarbené všetky vrcholy. Samozrejme, treba vrcholy ofarbovať tak, aby sme určite žiaden nevynechali. Teraz si vysvetlíme jeden vhodný postup, nazývaný prehľadávanie do hĺbky.

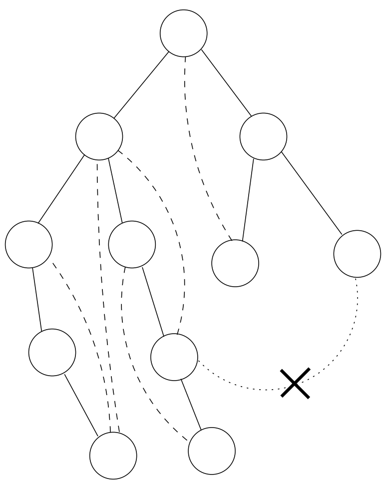
Prehľadávanie do hĺbky je podobné postupu, akým človek skúma neznáme mesto. Začneme tým, že sa postavíme do nejakého vrcholu a ofarbíme ho. Odteraz budeme farbiť vrcholy aj hrany grafu, kade chodíme. Ak z vrcholu, kde sme, vedie ešte nepoužitá hrana, vyberieme sa ňou ďalej. Ak sme prišli do ešte nenavštíveného vrcholu, ofarbíme ho a rekurzívne zavoláme prehľadávanie z neho. (Teda opäť sa snažíme nájsť nepoužitú hranu, atď.) Ak sme prišli do skôr navštíveného vrcholu (t.j. ofarbeného), okamžite sa po hrane, ktorou sme prišli, vrátime späť. No a posledný prípad je keď sme vo vrchole, z ktorého vedú samé ofarbené hrany. V takomto prípade sa len vrátime tou hranou, ktorou sme do neho prvýkrát prišli. Keď sa takto chceme vrátiť z vrcholu, kde sme začínali, prehľadávanie končí.

Zjavne takto prejdeme práve dvakrát (tam a späť) po každej z hrán, ku ktorým sa vieme dostať a navštívime všetky vrcholy, ku ktorým sa vieme dostať zo začiatočného vrcholu. Algoritmus je teda korektný a jeho časová zložitosť je $O(M + N)$. Dá sa ľahko rekurzívne implementovať, viď program na konci riešenia.

Najjednoduchším riešením pôvodnej úlohy by teda bolo postupne vyskúšať každú hranu odstrániť a pozrieť sa, či je výsledný graf ešte stále súvislý. Takéto riešenie by malo časovú zložitosť $O(M(M + N))$ – pre každú hranu potrebujeme spustiť jedno prehľadávanie.

My ukážeme algoritmus, ktorý bude bežať v čase $O(M + N)$ (teda optimálnom) a nájde v grafe všetky mosty.

Naše riešenie bude modifikáciou algoritmu prehľadávania do hĺbky. Predtým, než vysvetlíme samotné riešenie, potrebujeme si ukázať niekoľko vlastností prehľadávania do hĺbky. Spustime ho na našom súvislom grafe zo vstupu. Všimnime si tie hrany grafu, ktorými sme počas prehľadávania prišli do dovtedy nenavštíveného vrcholu. Týchto hrán je zjavne $N-1$ (jedna pre každý vrchol okrem toho, v ktorom sme začínali). Graf nimi tvorený je strom, lebo je súvislý a neobsahuje kružnice. Tento strom budeme volať DFS strom (DFS = depth-first search = prehľadávanie do hĺbky). Vrchol, z ktorého sme začínali prehľadávať, budeme volať koreň. Z každého iného vrcholu x vedie po stromových hranách (hranách DFS stromu) do koreňa práve jedna cesta. Vrcholy na tejto ceste budeme volať predkami vrcholu x, vrchol x budeme volať ich potomkom. Špeciálne každý vrchol je sám sebe aj predkom, aj potomkom. Všetci potomkovia vrcholu x a stromové hrany medzi nimi tvoria podstrom s koreňom x.



Obr. 50

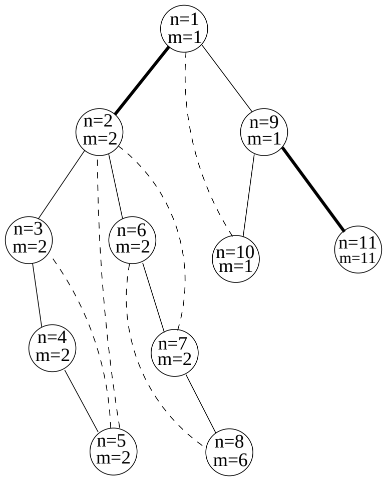
Ostatné hrany teoreticky môžu byť dvoch typov. Ak hrana spája vrchol s nejakým jeho predkom alebo potomkom, budeme ju volať spätná, ostatné hrany budeme volať priečne. (Nech uv je hrana, ktorá nie je stromová. Všimnime si podstromy s koreňmi u, v. Sú dve možnosti – ak je jeden z nich podgrafom druhého, hrana uv je spätná, inak musia tieto podstromy byť disjunktné (prečo?) a hrana uv je priečna.) V DFS strome však žiadne priečne hrany nemôžu byť. Prečo? Sporom. Nech uv je priečna hrana. Bez ujmy na všeobecnosti nech sme počas prehľadávania do u prišli skôr. Všimnime si teraz okamih, keď sa počas prehľadávania ideme vrátiť späť z u. Aby uv bola priečna hrana, nesmeli sme doteraz v navštíviť (ináč by v bol potomok u a hrana uv by bola spätná). Ale v je sused u, preto by sme sa z u ešte nemali vracať späť ale mali by sme sa vybrať do v, spor.

Takže hrany grafu môžeme rozdeliť na stromové a spätné. Zjavne ak hrana leží na nejakej kružnici, po jej odstránení graf zostane súvislý. Každá spätná hrana uv leží na kružnici (tvorenej hranou uv a cestou z u do v po DFS strome). Preto mostami môžu byť len stromové hrany. Každý most rozdeľuje graf na dve časti, v jednej z nich je koreň.

Predstavme si, že náš graf zavesíme za koreň. Teraz sa vyberme z koreňa dodola po stromových hranách. Majme konkrétnu stromovú hranu uv, pričom u je bližšie ku koreňu ako v. Kedy je uv most? Vtedy, keď ju nemáme ako obísť. Inými slovami ak sa z podstromu s koreňom v nevieme dostať do u (alebo ekvivalentne: do u alebo ľubovoľného jeho predka) bez použitia hrany uv.

Budeme teda pre každú hranu uv chcieť určiť, či existuje cesta z v do u alebo jeho predka, ktorá nepoužíva hranu uv. Hľadajme takú cestu, ktorá používa najmenší počet spätných hrán a zo všetkých takých ciest je najkratšia. Čo o nej vieme povedať? Posledná jej hrana bude určite spätná, lebo po stromových sa nad u nedostaneme. Všetky vrcholy na nej okrem posledného budú ležať v podstrome s koreňom v, lebo akonáhle sa dostaneme nad u, končíme. Do všetkých vrcholov v podstrome s koreňom v sa ale vieme dostať z v stromovými hranami. Ukázali sme teda nasledovné tvrdenie: AK nejaká hľadaná cesta existuje, TAK existuje aj taká, pri ktorej ideme najskôr niekoľkými stromovými a potom jednou spätnou hranou. Stačí nám teda pre každú hranu overiť, či existuje takáto cesta. Ako na to?

Počas prehľadávania číslujme vrcholy v poradí, v akom do nich prichádzame. Číslo vrcholu x budeme značiť $n(x)$. Zjavne všetky vrcholy v podstrome s koreňom v majú číslo väčšie ako $n(u)$. Na druhej strane všetci predkovia u majú číslo menšie ako $n(u)$. Keby sme pre v vedeli najmenšie číslo vrcholu, do ktorého sa vieme dostať bez použitia hrany uv, vyhrali sme – uv je most práve vtedy, ak je toto číslo väčšie ako $n(u)$. Ukázali sme si ale, že nám stačí uvažovať cesty, ktoré idú najskôr niekoľkými stromovými hranami „dodola“ a potom jednou spätnou „dohora“. Budeme si teda pre každý vrchol priamo počas prehľadávania počítať najmenšie číslo vrcholu, do ktorého sa vieme z neho dostať takouto cestou.



Obr. 51

Tým už máme výsledný algoritmus takmer hotový, zostáva si to už len celé zhrnúť. Prehľadávame náš graf do hĺbky a zároveň si pre každý vrchol x počítame dve čísla: $n(x)$ (koľký objavený vrchol to je) a $m(x) = \min\{n(y) \mid$ do y vedie z x cesta vyššie uvedeného tvaru$\}$. Ako počítať hodnotu $n(x)$ je zjavné. Hodnota $m(x)$ je minimum z $n(x)$, zo všetkých hodnôt $m(x_i)$ pre synov vrcholu x a zo všetkých hodnôt $n(y_i)$ vrcholov, do ktorých vedie z x spätná hrana. Hodnotu $m(x)$ teda vieme spočítať v okamihu, keď sa počas prehľadávania vraciame z vrcholu x. V tomto okamihu vieme aj rozhodnúť o hrane z x do jeho otca y, či je most – stačí porovnať hodnoty $m(x)$ a $n(y)$ (resp. $m(x)$ a $n(x)$).

P – I – 2

Uvažujme ľubovolné poradie, v ktorom budú programátori pracovať, a pozrime sa na dva po sebe napísané programy, nech sú to i a j. Napísanie programu budeme odteraz volať udalosť. Prvá z našich udalostí, teda i, začne v čase T_0, bude trvať čas t_i a Janko za ňu zaplatí sumu $(T_0 + t_i)m_i$, druhá udalosť, j, začne v čase $T_0 + t_i$ (teda hneď po skončení i) a bude stáť $(T_0 + t_i + t_j)m_j$ – každého programátora platíme nielen za čas, kedy pracuje, ale od úplneho začiatku.

Keď to všetko spočítame, zistíme, že ak sa udalosti vykonajú v poradí i, j, Janko bude musieť za ne zaplatiť sumu $S_{i,j} = T_0(m_i + m_j) + t_i m_i + (t_i + t_j)m_j$.

Čo by sa stalo, keby sme v tomto poradí vymenili udalosti i a j? Podobne ako v predošlom prípade môžeme spočítať, koľko bude musieť Janko zaplatiť za tieto 2 udalosti.

Za prvú (teda j) to bude $(T_0+t_j)m_j$ a za druhú $(T_0+t_j+t_i)m_i$, čo je spolu $S_{j,i} = T_0(m_i + m_j) + t_jm_j + (t_j + t_i)m_i$.

Porovnajme teraz tieto 2 výsledky. Označme si pre jednoduchosť ich spoločnú časť $A := T_0(m_i + m_j) + t_im_i + t_jm_j$ a po triviálnych úpravách dostávame:

$$S_{i,j} = A + m_im_j\frac{t_i}{m_i} \qquad S_{j,i} = A + m_im_j\frac{t_j}{m_j}$$

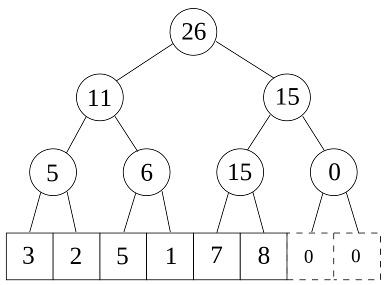
Nás zaujíma to, ktorá z týchto hodnôt je menšia, ale to je zjavne tá, ktorá má menší pomer $\frac{t_k}{m_k}$. To teda znamená, že ak $\frac{t_i}{m_i} > \frac{t_j}{m_j}$, výmenou poradia týchto udalostí dosiahneme nižšiu výslednú sumu. (Zjavne zmena poradia 2 po sebe nasledujúcich udalostí neovplyvní sumu, ktorú zaplatíme ostatným programátorom.)

Z uvedeného vyplýva, že ak v nejakom poradí udalostí nájdeme 2 po sebe idúce, pričom tá prvá má väčší pomer $\frac{t_k}{m_k}$ ako tá druhá, ich výmenou získame nové poradie udalostí, ktoré je lacnejšie. Teda optimálne poradie bude také, v ktorom sú pomery $\frac{t_k}{m_k}$ usporiadané od najmenšieho po najväčší.

Samotný program je potom už jednoduchý – stačí udalosti utriediť vzostupne podľa pomeru $\frac{t_k}{m_k}$, čo vieme realizovať v čase $O(n \log n)$ napríklad algoritmom QuickSort.

P – I – 3

Pre jednoduchosť ďalších úvah zväčšme najskôr pole A tak, aby jeho veľkosť bola najbližšia väčšia mocnina dvoch. Tým sa pole A nanajvýš dvakrát predĺži, takže na časovej zložitosti výsledného algoritmu sa to neodrazí. Nech odteraz $N = 2^K$ je dĺžka predĺženého poľa.



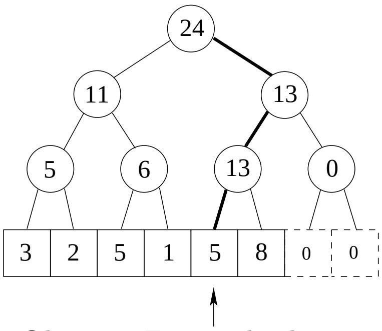
Obr. 52

Predstavme si, že nad poľom A vybudujeme úplný binárny strom. Jeho listy budú zodpovedať jednotlivým políčkam poľa A, každý vyšší vrchol tohoto stromu bude zodpovedať nejakému intervalu v poli A (presnejšie bude zodpovedať políčkam, určeným listami z jeho podstromu). V každom vrchole stromu si budeme pamätať súčet čísel v príslušnom intervale poľa. Takejto dátovej štruktúre budeme hovoriť intervalový strom.

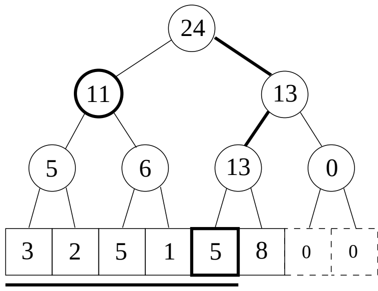
V najspodnejšej vrstve nášho stromu je N vrcholov, vo vyššej ich je $N/2$, v tretej odspodu $N/4$, atď. V celom našom strome je teda $2N - 1$ vrcholov, preto budeme potrebovať na jeho zapamätanie pamäť veľkosti $\Theta(N)$ (čítaj: lineárnu). Pri predspracovaní poľa A budeme potrebovať túto pamäť naplniť, preto predspracovanie musí bežať v čase

$\Omega(N)$ (čítaj: aspoň lineárnom). Ľahko nahliadneme, že v lineárnom čase vieme náš strom skutočne vytvoriť – stačí ho vytvárať zdola nahor.

Čo sa stane s naším stromom, keď zmeníme hodnotu prvku $A[j]$? Musíme zmeniť zapamätané hodnoty pre všetky intervaly, ktoré zmenený prvok obsahujú. Tie ale zodpovedajú práve vrcholom na ceste z j-teho listu do koreňa. Je ich teda $K + 1 = O(\log N)$. Zmeniť hodnotu v poli A teda vieme v logaritmickom čase.



Obr. 53: Zmena hodnoty.



Obr. 54: Počítanie súčtu.

Ešte ostáva ukázať, ako pomocou nášho stromu odpovedať na otázky zo zadania. Riešme najskôr jednoduchšiu úlohu: Akú hodnotu má súčet $S(x) = A[1] + \ldots + A[x]$? Pozrime sa do koreňa nášho stromu. Sú dve možnosti: Ak interval od 1 po x leží celý v ľavom podstrome, zavoláme sa rekurzívne naň. Ak nie, tak tento interval zaberá celý ľavý podstrom a kúsok pravého. Tak zoberieme súčet všetkých políčok v ľavom podstrome (ten máme spočítaný v ľavom synovi) a rekurzívne sa zavoláme na pravého syna a zvyšok intervalu.

Takto postupne v našom strome schádzame dole po ceste od koreňa do x-tého listu, na každej úrovni urobíme len konštantný počet operácií. Preto pre ľubovoľné x vieme hodnotu $S(x)$ spočítať v čase $O(\log N)$. To je ale všetko, čo potrebujeme vedieť – totiž $A[x] + \ldots + A[y] = S(y) - S(x - 1)$ (pričom definujeme $S(0) = 0$).

Za pomoci intervalového stromu vieme teda každý príkaz spracovať v logaritmickom čase. Naše riešenie potrebuje lineárnu pamäť a lineárny čas na predspracovanie.

Najjednoduchšia implementácia intervalového stromu je uložiť ho v jednom poli, podobne ako haldu. Teda synovia vrcholu x sú na políčkach $2x$ a $2x + 1$, pôvodné pole A začína na pozícii N. V praxi sa občas pamäťová zložitosť znižuje na polovicu tým, že si pamätáme len súčty v ľavých synoch, implementácia je potom ale trochu náročnejšia.

P – I – 4

Najjednoduchšie riešenie je použiť štyri registre, v každom si počítať počet písmen jedného typu. Keď dočítame slovo, v R_0 máme počet prečítaných písmen a, v R_1 počet b, atď. Teraz budeme naraz zmenšovať hodnoty vo všetkých štyroch registroch. **Accept** zavoláme práve vtedy, ak register R_0 ostane najdlhšie neprázdny.

Počet použitých registrov sa dá ľahko zmenšiť na 3: Nech sme doteraz prečítali α písmen a, β písmen b, γ písmen c a δ písmen d. V registroch si budeme pamätať absolútne hodnoty výrazov $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$, v troch premenných si budeme pamätať ich znamienka. (Napr. 0 ak je v príslušnom registri nula, 1 ak je tam kladné číslo a 255 ak je záporné.)

Takto v každom okamihu výpočtu vieme povedať, či bolo doteraz písmen a najviac – to platí práve vtedy, keď sú všetky tri znamienka, čiže všetky tri pamätané hodnoty kladné.

Naše riešenie bude potrebovať len dva registre. Dá sa ukázať (v tomto vzorovom riešení to nespravíme) že jeden register na riešenie tejto úlohy nestačí, preto naše riešenie bude vzhľadom na počet registrov optimálne.

V priebehu výpočtu si v R_0 budeme pamätať číslo $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta$, register R_1 budeme používať na pomocné výpočty. Keď napríklad prečítame ďalšie písmeno b, za pomoci registra R_1 vynásobíme obsah registra R_0 tromi. Keď dočítame vstup, potrebovali by sme porovnať hodnoty α, β, γ a δ. Podobne ako v prvom riešení ich budeme naraz zmenšovať (to v našom prípade znamená deliť obsah R_0 vhodným číslom) a akceptujeme práve vtedy, ak nám na konci ostane kladná mocnina 2.

P – II – 1

Najprv zadefinujme našu úlohu v jazyku teórie grafov. *Vrcholmi* nášho grafu budú budovy, *hrany* budú reprezentovať možné prepojenia optickým káblom. Vyriešme našu úlohu najprv pre $K = 1$. V takom prípade je našou úlohou vybrať takú množinu hrán, aby všetky vrcholy boli navzájom poprepájané (nie nutne priamo). Takáto množina hrán sa nazýva *kostra grafu* a keďže chceme, aby súčet cien hrán v kostre bol čo najmenší, máme problém hľadania *najlacnejšej kostry.*

Rozmyslite si, že najlacnejšia kostra grafu neobsahuje žiadny cyklus – keby nejaký obsahovala, mohli by sme jeho ľubovoľnú hranu vyhodiť. Na druhej strane, keď do najlacnejšej kostry pridáme ľubovoľnú hranu, vznikne nám cyklus – vrcholy, medzi ktorými vedie pridaná hrana, boli už spojené pomocou niektorých hrán kostry.

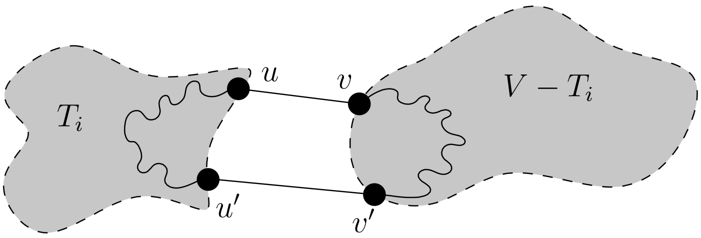
Hľadanie najlacnejšej kostry (Primov algoritmus). Algoritmus je založený na nasledujúcej myšlienke. Vrcholy grafu rozdelíme na dve skupiny: na pripojené a nepripojené. Na začiatku algoritmu si zvolíme ľubovoľný vrchol a prehlásime ho za pripojený. Ostatné vrcholy sú zatiaľ nepripojené. V každom kroku algoritmu pripojíme jeden vrchol k už doteraz vytvorenej sieti nasledujúcim spôsobom. Nájdeme najkratšiu hranu spájajúcu pripojený a nepripojený vrchol. Túto hranu pridáme do siete a jej druhý koniec sa stane pripojeným vrcholom. Skončíme, keď sú všetky vrcholy pripojené.

Aby náš algoritmus bol efektívny, potrebujeme vedieť rýchlo nájsť najkratšiu hranu spájajúcu pripojený a nepripojený vrchol. To spravíme tak, že pre každý nepripojený vrchol si pamätáme, ktorý z pripojených vrcholov je k nemu pripojený najkratšou hranou. Vždy, keď pridáme ku pripojeným vrcholom ďalší vrchol, musíme si informáciu o najbližších pripojených vrcholoch aktualizovať, tak že prezrieme nepripojené vrcholy a ak je novopripojený vrchol bližšie, našu informáciu zmeníme.

To, že výsledná množina hrán tvorí kostru, je zrejmé. Treba ale dokázať, že táto kostra je najlacnejšia. Predstavme si ľubovoľnú najlacnejšiu kostru (ďalej ju budeme nazývať NK) a porovnávajme ju s výsledkom nášho algoritmu (ďalej VNA).

Ak NK a VNA sú zhodné, VNA je najlacnejšia kostra. Predpokladajme teda, že NK a VNA nie sú zhodné. Nech T_i je množina pripojených vrcholov po i-tom kroku nášho algoritmu. Zoraďme hrany vo VNA podľa toho, ako sme ich pridávali a nájdime prvú hranu, ktorá sa vyskytuje vo VNA, ale nevyskytuje sa v NK. Nech táto hrana bola pridaná v kroku $i+1$ a nech spája vrchol $u \in T_i$ a vrchol $v \notin T_i$.

Pridajme hranu (u, v) do NK. Tým vznikne v NK cyklus, ktorý začína v T_i, prejde po hrane (u, v) von z T_i a potom sa vráti nejakou cestou späť do T_i (pozri obrázok 55). Na tejto ceste musí existovať aspoň jedna hrana (u', v'), ktorá má jeden koniec v T_i a druhý koniec mimo T_i. Cena tejto hrany musí byť aspoň taká, ako je cena hrany (u, v). V opačnom prípade by si náš algoritmus v kroku $i+1$ musel vybrať hranu (u', v') namiesto hrany (u, v). Preto ak hranu (u', v') odoberieme z NK a pridáme hranu (u, v), cena NK sa nezvýši. Nemôže sa však ani znížiť, lebo NK je najlacnejšia. Preto upravená NK bude naďalej najlacnejšou kostrou v grafe. Navyše VNA a NK sa teraz zhodujú na prvých $i+1$ hranách. Takýmto spôsobom postupne prerobíme NK na VNA, pričom nezvýšime jej cenu, a teda VNA musí byť tiež najlacnejšia kostra.



Obr. 55: Pridaním hrany (u, v) vznikne v NK cyklus, ktorý začína v T_i, prejde po hrane (u, v) von z T_i a potom sa vráti nejakou cestou späť do T_i.

Riešenie pre všeobecné K. Doteraz sme predpokladali $K = 1$. Ak $K > 1$, nemusíme hranami pospájať všetky vrcholy. Na komunikáciu totiž môžeme využiť aj internet. Stačí, ak naša sieť bude pozostávať z K súvislých častí: v každej takejto súvislej časti vyberieme jeden vrchol, ktorý pripojíme na internet, a tak každý vrchol s každým bude môcť komunikovať.

Takúto sieť môžeme dostať napríklad tak, že z najlacnejšej kostry NK uberieme $K-1$ najdrahších hrán. Tým sa nám totiž NK rozpadne práve na K súvislých častí. Jediným problémom je ukázať, že takéto riešenie je skutočne najlacnejšie možné.

Označme teda P množinu $K-1$ najdrahších hrán kostry NK. Po ich odobratí z NK dostaneme množinu hrán Q, ktorá pozostáva z K súvislých častí. Nech existuje lacnejšia množina hrán T, ktorá takisto tvorí sieť pozostávajúcu z K súvislých častí.

Všimnime si teraz graf tvorený kostrou NK a hranami z T. Keďže už NK je súvislá, tento graf je súvislý. Preto sa dá vybrať niekoľko hrán NK, ktorými sa dajú jednotlivé komponenty T pospájať. Každá pridaná hrana nám spojí dva komponenty do jedného väčšieho, a teda stačí pridať $K-1$ hrán. Označme množinu týchto pridaných hrán S.

Všimnime si nasledujúce dva fakty:

- Množina hrán S určite nie je drahšia ako P, lebo obe obsahujú $K-1$ hrán z kostry NK, ale P sme vybrali tak, aby obsahovala najdrahšie hrany.

- Z nášho predpokladu, množina hrán T je lacnejšia ako množina hrán Q.

Z toho ale vyplýva, že kostra $S \cup T$ je lacnejšia ako NK $= P \cup Q$, čo je spor s tým, že NK je najlacnejšia kostra. Tým sme ukázali, že na vyriešenie úlohy stačí z NK odobrať $K - 1$ najdrahších hrán.

Časová zložitosť. Hľadanie najlacnejšej kostry v každom kroku pridá jeden vrchol do množiny pripojených, teda spraví celkovo $N - 1$ krokov. V každom kroku najprv v čase $O(N)$ nájde najkratšiu hranu spájajúcu pripojený a nepripojený vrchol. Potom aktualizuje informáciu o najbližšom pripojenom vrchole pre všetky nepripojené vrcholy. Táto aktualizácia nás stojí opäť $O(N)$ operácií. Celková zložitosť je teda kvadratická, t.j. $O(N^2)$.

Z výslednej kostry potom potrebujeme ubrať $K - 1$ najdrahších hrán. To môžeme urobiť tak, že hrany kostry zotriedime (triedenie možno robiť v čase $O(N \log N)$, v tomto prípade nám ale stačí aj triedenie v čase $O(N^2)$). Celková časová zložitosť je teda $O(N^2)$.

P – II – 2

Uvažujme, ktorý zo študentov má pracovať pri počítači v danom okamžiku t. Zrejme to musí byť jeden z tých študentov, ktorí už prišli do firmy, ale ešte nedokončili svoj program. O týchto študentoch budeme vravieť, že sú *aktívni* v čase t. Dokážme teraz, že pracovať vždy môžeme poslať toho z aktívnych študentov, ktorý musí odísť najskôr (nech je to študent a). Ak by totiž existoval rozvrh, v ktorom v čase t pracuje nejaký iný študent b, tak študent a sa ešte dostať k počítaču v čase t' medzi t a časom odchodu t_a. Študent b však odchádza v čase $t_b \geq t_a$. Preto môžeme zostrojiť nový rozvrh, v ktorom necháme študenta a chvíľu pracovať na počítači v čase t a taký istý dlhý čas potom necháme študenta b pracovať na počítači v čase t'. Ak bol pôvodný rozvrh správny, aj zmodifikovaný rozvrh je správny, lebo každý pracuje rovnako dlho ako v pôvodnom rozvrhu a každý pracuje pred svojim odchodom.

Dokázali sme teda, že v každom okamžiku môže pracovať ten z aktívnych študentov, kto musí najskôr odísť. Kedy teda môže dôjsť k zmene obsadenia počítača? Buď keď príde nový študent a musí odísť skôr ako študent, ktorý práve pracuje (v tom prípade sa vystriedajú pri počítači), alebo ak študent, ktorý práve pracuje, dokončí svoj program a uvoľní počítač.

Náš algoritmus bude zostrojovať rozvrh obsadenia počítača od začiatku do konca. Študentov si utriedime podľa času príchodu a pre každého si pamätáme, koľko ešte potrebuje pracovať. Tiež si udržujeme množinu aktívnych študentov. V každom kroku algoritmu nájdeme najbližšiu udalosť, ktorá môže ovplyvniť rozvrh. Takouto udalosťou je buď príchod študenta alebo ukončenie práce práve pracujúceho študenta. V oboch prípadoch zaktualizujeme dátové štruktúry a potom nájdeme aktívneho študenta s najskorším odchodom a priradíme mu počítač. Ak tento študent už nemá dosť času na dokončenie programu, vyhlásime, že všetky programy sa nedajú dokončiť.

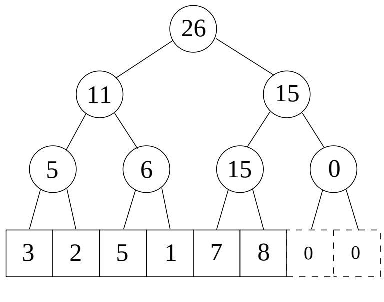
Triedenie študentov je možné spraviť v čase $O(N \log N)$. Počet udalostí je $2N$, lebo každý študent raz príde a raz dokončí program. Pre každú udalosť potrebujeme nájsť aktívneho študenta s najskorším odchodom. Ak musíme kvôli tomu porovnať všetkých aktívnych študentov, dostaneme algoritmus s časovou zložitosťou $O(N^2)$. Algoritmus sa však dá zefektívniť ak uložíme aktívnych študentov do binárnej haldy podľa času odchodu. V takom prípade spracovanie jednej udalosti trvá len $O(\log N)$ – ak nám niekto prišiel, vložíme ho do haldy, ak niekto skončil prácu, z haldy ho vyberieme. Následne sa pozrieme na minimum v halde – študenta, ktorý ide odteraz pracovať. Celková zložitosť algoritmu s použitím haldy je teda iba $O(N \log N)$.

P – II – 3

Na príkaz `KOLKO c` by náš program mal odpovedať, v koľkých dovtedy zadaných intervaloch c leží. Na úvod uvedieme dve triviálne riešenia. Prvé je jednoducho si pamätať všetky dovtedy zadané intervaly a pri každom príkaze `KOLKO` ich všetky prejdeme. Pamäťová zložitosť takéhoto riešenia je $O(P)$, časová v najhoršom prípade až $O(P^2)$. (Príkaz `PRIDAJ` vieme spracovať v $O(1)$, ale na `KOLKO` potrebujeme v najhoršom až $O(P)$.) Trochu lepšie je použiť pomocné pole veľkosti $N+1$, v ktorom si pre každú pozíciu budeme pamätať počet intervalov, ktoré ju obsahujú. Jeden interval pridáme v čase $O(N)$, na otázku odpovieme v čase $O(1)$. Výsledná časová zložitosť je $O(NP)$, pamäťová $O(N)$.

Uvedomme si, čo vlastne potrebujeme zistiť, keď nám príde príkaz `KOLKO c`. Potrebujeme nájsť S – počet intervalov, ktoré začínajú na pozícii $\leq c$ a končia na pozícii $\geq c$. Nech $Z(x)$ je počet intervalov, ktoré začínajú na pozícii $\leq x$ a $K(x)$ je počet intervalov, ktoré končia na pozícii $\leq x$. Potom $S = Z(c) - K(c-1)$. (Totiž zlé intervaly, ktoré končia pred c sú zarátané aj v $Z(c)$, aj v $K(c-1)$, a teda ich do S nezarátame.) Stačilo by nám teda vedieť rýchlo zisťovať hodnoty $Z(x)$ a $K(x)$.

Budeme využívať myšlienku z domáceho kola – dátovú štruktúru, ktorú sme nazvali *intervalový strom*[5]. Pripomeňme si, o čo išlo: Predstavme si, že nad poľom A (ktorého dĺžku N sme zväčšili na najbližšiu mocninu dvoch) vybudujeme úplný binárny strom. Jeho listy budú zodpovedať jednotlivým políčkam poľa A, každý vyšší vrchol tohoto stromu bude zodpovedať nejakému intervalu v poli A (presnejšie bude zodpovedať políčkam, určeným listami z jeho podstromu). V každom vrchole stromu si budeme pamätať súčet čísel v príslušnom intervale poľa. Zmeniť hodnotu v poli A (a príslušne upraviť súčty vo vrcholoch stromu) vieme v čase $O(\log N)$, zistiť súčet ľubovoľného intervalu v poli A vieme takisto v čase $O(\log N)$.



Obr. 56

$Z(c)$ je vlastne súčet počtov intervalov začínajúcich na pozíciách $0, 1, 2, \ldots, c$. Budeme mať pole, v ktorom si tieto počty budeme pamätať a nad ním vybudovaný *intervalový*

[5]Nepliesť si s intervalmi zo zadania!

strom. Každé pridanie intervalu zmení jednu hodnotu v poli, túto zmenu vieme uskutočniť v čase $O(\log N)$. Analogicky budeme používať druhé pole (a druhý *intervalový strom*) pre počty intervalov, ktoré na jednotlivých pozíciách končia. Pomocou týchto dátových štruktúr vieme každú hodnotu Z aj K spočítať v čase $O(\log N)$.

Detailnejší popis oboch operácií s *intervalovým stromom* a jeho implementácie v poli nájdete vo vzorových riešeniach domáceho kola. Časová zložitosť nášho vzorového riešenia je $O(P \log N)$ a pamäťová $O(N)$. Všimnite si, že by nám stačilo udržiavať jedno pole, pridanie intervalu $\langle a, b\rangle$ by zodpovedalo napr. zväčšeniu hodnoty na pozícií a a zmenšeniu hodnoty na pozícií $b+1$.

P – II – 4

Predstavme si, že by sme okrem registrov mali k dispozícií jeden zásobník[6]. Potom by sme už úlohu ľahko vyriešili: Ideme po vstupnom slove zľava doprava, prečítané písmená vkladáme na zásobník. Keď teraz budeme vyberať písmená zo zásobníka, vychádzať budú v opačnom poradí ako boli vložené. Preto sa vrátime na začiatok slova a ideme porovnávať, či je slovo rovnaké odpredu aj odzadu. Vždy prečítame jedno písmeno zo vstupu, vyberieme jedno zo zásobníka a porovnáme ich. Skončíme, keď niekedy dostaneme dve rôzne písmená (slovo je zlé) alebo keď dočítame celé vstupné slovo (a teda je dobré).

Keby sme teda mali k dispozícií zásobník, máme úlohu vyriešenú. Zásobník si však vieme simulovať v jednom registri (za pomoci druhého)! Ako na to? Odteraz budú písmená a, b, c, d zodpovedať číslam 1, 2, 3, 4. Číslo v registri R_1 bude predstavovať náš zásobník – keď ho zapíšeme v sústave so základom 5, jednotlivé cifry budú predstavovať vložené hodnoty (cifra na mieste jednotiek bude naposledy vložená hodnota). Teda keď do prázdneho zásobníka uložíme postupne písmená a, c, b, a, bude v R_1 hodnota $a \times 5^3 + c \times 5^2 + b \times 5 + a = 1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 125 + 75 + 10 + 1 = 211$.

Ako ale s takýmto registrom-zásobníkom pracovať? Vložiť novú hodnotu x je jednoduché – za pomoci registra R_2 vynásobíme obsah R_1 piatimi a potom ho x-krát zväčšíme o 1. Takisto vybrať naposledy vloženú hodnotu nie je ťažké – je to presne opačná operácia. Vydelíme obsah registra R_1 piatimi. Zvyšok po delení je naposledy vložená hodnota, podiel (ktorý dostaneme v R_2) je zásobník bez tejto hodnoty.

Máme teda funkčné riešenie, ktoré potrebuje dva registre. Nejde to predsa len lepšie? S iba jedným registrom sa nám už nepodarí simulovať zásobník, musíme vymyslieť niečo iné.

Na úvod trocha terminológie: aktuálne písmeno sa bude pri našom riešení pohybovať sem a tam po vstupnom slove. Kvôli názornosti budeme namiesto „aktuálne je i-te písmeno vstupného slova“, resp. „presunieme akt. písmeno doľava/doprava“ hovoriť „stojíme na pozícií i“, resp. „ideme doľava/doprava“. Dĺžku vstupného slova budeme značiť n.

Predstavme si, že stojíme na pozícií i (pričom ale i si nepamätáme, v R_1 je nula). Chceli by sme písmeno na tejto pozícií porovnať s jemu zodpovedajúcim písmenom na

[6] Zásobník je dátová štruktúra, ktorá podporuje operácie „vlož prvok“ a „vyber naposledy vložený prvok“.

pozícií $n+1-i$. Náš program však nevie n ani i. Ako na to? Písmeno na našej pozícií si zapamätáme v premennej. Teraz si zistíme i. Ideme doľava, kým neprídeme na začiatok vstupného slova a zvyšujeme R_1. Zodpovedajúce písmeno je i-te od konca. Nie je nič ľahšie ako prísť naň – prejdeme na koniec slova, potom zmenšujeme R_i a ideme doľava, kým v ňom nie je nula. Písmená porovnáme. Ak nesedia, končíme. Inak by sme sa chceli vrátiť späť na pozíciu, kde sme začínali. Na to použijeme presne rovnaký postup: Idúc doprava spočítame v R_1 potrebný počet krokov, presunieme sa na začiatok a spravíme rovnako veľa krokov. Skončili sme teda v rovnakej situácií ako sme začínali, len máme porovnané aktuálne písmeno s jemu zodpovedajúcim. Celý tento postup budeme volať *porovnanie*.

My by sme ale chceli postupne porovnať všetky navzájom si prislúchajúce dvojice písmen. To ale nie je problém. Začíname na prvom písmene vstupu. Spravíme *porovnanie*. Ak nie je prvé písmeno rovnaké ako posledné, skončili sme, inak pokračujeme. Presunieme sa doprava (na druhé písmeno) a spravíme ďalšie *porovnanie*. Takto pokračujeme až kým neporovnáme n-té písmeno s prvým (a nezistíme, že už nemáme porovnávané písmeno kam posunúť).

P – III – 1

Úlohu reprezentujeme pomocou orientovaného grafu. Agenti predstavujú vrcholy grafu. Skutočnosť, že agent a môže vydať rozkaz agentovi b, vyjadríme pomocou orientovanej hrany (a, b). Našou úlohou je nájsť v tomto grafe vrchol, z ktorého sa môžeme dostať do každého iného vrcholu.

Uvažujme nasledujúci algoritmus. Začneme prehľadávaním do hĺbky z ľubovoľného vrcholu grafu. Ak prehľadávaním prejdeme všetky vrcholy, našli sme šéfa; v opačnom prípade pokračujeme tým, že začneme nové prehľadávanie do hĺbky v jednom z vrcholov, ktorý sme ešte neprehľadali (doteraz prehľadané vrcholy pritom necháme označené ako prehľadané). To opakujeme, až kým neprehľadáme všetky vrcholy nášho grafu. Nech r je vrchol, ktorý je začiatkom posledného prehľadávania.

Tvrdenie

Ak náš graf má (aspoň jedného) šéfa, tak vrchol r je šéfom.

Dôkaz

Predpokladajme, že náš graf má šéfa a že vrchol r nie je šéfom. Nech je šéfom vrchol s. Musíme uvažovať dve možnosti:

- **Vrchol s bol objavený v poslednom prehľadávaní.** To by ale znamenalo, že sa do tohoto vrcholu môžeme dostať z vrcholu r (lebo vrchol r je počiatkom tohto prehľadávania) a teda sa môžeme dostať z vrcholu r do ľubovoľného iného vrcholu cez s, čo je ale v spore s našim predpokladom, že r nie je šéfom.

- **Vrchol s bol objavený skôr ako v poslednom prehľadávaní.** Keďže sa však z vrcholu s dá dostať do ľubovoľného vrcholu, museli by sme potom vrchol r objaviť v tom istom prehľadávaní ako s, a teda vrchol r nemôže byť začiatkom posledného prehľadávania.

Zostáva nám teda jedine overiť (opäť prehľadávaním do hĺbky), či r je skutočne šéfom grafu; v opačnom prípade graf nemá šéfa. Časová zložitosť celého algoritmu je $O(M+N)$, kde N je počet vrcholov a M je počet hrán grafu.

Iný, na implementáciu zložitejší algoritmus: Nájdeme silno súvislé komponenty grafu na vstupe. Topologicky maximálny je každý komponent, do ktorého nevedie žiadna hrana. Ak je takýchto komponentov viac, graf nemá šéfa. Ak je jeden, šéfmi sú práve vrcholy v ňom.

P – III – 2

Ľahko zostrojíme riešenie, ktoré potrebuje čas $O(K)$ na spracovanie jednej hodnoty na vstupe. Stačí si v cyklicky prepisovanom poli pamätať posledných K hodnôt. Zakaždým, keď prečítame ďalšie číslo zo vstupu, pole prejdeme a vypíšeme najmenšiu z hodnôt v ňom.

Ukážeme si lepšie riešenie, ktoré bude potrebovať na spracovanie jedného čísla čas $O(\log K)$. Predstavme si, že by sme si aktuálnych K hodnôt udržiavali v halde. Novú hodnotu do tejto haldy ľahko pridáme v čase $O(\log K)$. Pred tým, ako vypíšeme minimum (ktoré je v koreni haldy), potrebujeme z haldy vyhodiť najstaršiu hodnotu. Odkiaľ ale máme vedieť, ktorá z nich to je?

Pomôžeme si tak, že hodnoty, ktoré nám budú prichádzať, vložíme nielen do haldy, ale aj do fronty. Medzi týmito dátovými štruktúrami si budeme udržiavať smerníky, aby sme v každom okamihu vedeli o každom prvku fronty povedať, kde je v halde a naopak.

Keď teda príde nová hodnota, vložíme ju do haldy a na koniec fronty. Následne zo začiatku fronty vyberieme najstaršiu hodnotu, pomocou smerníka ju nájdeme v halde a odstránime ju aj odtiaľ. Teraz už len vypíšeme hodnotu v koreni haldy.

Obe operácie s haldou majú časovú zložitosť $O(\log K)$, zvyšné operácie vieme spraviť v konštantnom čase. Pamäť spotrebovaná haldou aj frontou je $O(K)$.

Existuje však ešte lepšie riešenie. Stačí si uvedomiť, že ak nám príde teplota T, môžeme zabudnúť všetky skoršie teploty, ktoré sú od T väčšie alebo rovné – zjavne žiadna z nich už nikdy nebude najmenšia. Teploty, ktoré si ešte pamätáme, budeme udržiavať v poradí, v akom boli na vstupe. Uvedomte si, že potom budú v každom okamihu pamätané teploty tvoriť rastúcu postupnosť.

Čo sa stane, keď príde nová teplota? Niekoľko najväčších pamätaných teplôt si môžeme prestať pamätať. To spravíme ľahko, lebo tieto teploty sú práve na konci zoznamu. Na koniec zoznamu zaradíme práve prečítanú teplotu. Na začiatku zoznamu je najstaršia pamätaná teplota, ak už je pristará, vyhodíme ju. V tomto okamihu je na začiatku zoznamu najmenšia teplota z posledných K prečítaných. Vypíšeme ju a pokračujeme ďalej.

Spracovanie jednej teploty má pri tomto riešení *amortizovanú* časovú zložitosť $O(1)$. To znamená, že síce spracovanie jednej konkrétnej teploty môže trvať dlho (ak vyhadzujeme veľa starších teplôt), ale na spracovanie N teplôt nám bude určite stačiť čas $O(N)$.

To preto, že každú teplotu do zoznamu raz vložíme a raz z neho vyhodíme. (Predchádzajúce riešenie potrebovalo na spracovanie N teplôt čas $O(N \log K)$.) Pamäťová zložitosť je opäť $O(K)$.

P – III – 3

a) Na úvod si pripomeňme, že v riešeniach krajského kola ste sa mohli dočítať okrem iného o tom, ako pomocou dvoch počítadiel simulovať zásobník. Pre istotu zopakujeme, ako na to:

Zásobník si vieme simulovať v jednom registri (za pomoci druhého). Odteraz budú písmená a, b, c zodpovedať číslam 1, 2, 3. Číslo v registri R_1 bude predstavovať náš zásobník – keď ho zapíšeme v sústave so základom 4, jednotlivé cifry budú predstavovať vložené hodnoty (cifra na mieste jednotiek bude naposledy vložená hodnota). Teda keď do prázdneho zásobníka uložíme postupne písmená a, c, b, a, bude v R_1 hodnota $a \times 4^3 + c \times 4^2 + b \times 4 + a = 1 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 64 + 48 + 8 + 1 = 121$.

Ako ale s takýmto registrom-zásobníkom pracovať? Vložiť novú hodnotu x je jednoduché – za pomoci registra R_2 vynásobíme obsah R_1 štyrmi a potom ho x-krát zväčšíme o 1. Takisto vybrať naposledy vloženú hodnotu nie je ťažké – je to presne opačná operácia. Vydelíme obsah registra R_1 štyrmi. Zvyšok po delení je naposledy vložená hodnota, podiel (ktorý dostaneme v R_2) je zásobník bez tejto hodnoty.

Ako ale vyriešiť zadanú úlohu? Jedna možnosť je simulovať (pomocou dvoch zásobníkov) frontu, v ktorej si udržujeme tie písmená, ktorých pár sme ešte nevideli. Toto riešenie je pomerne komplikované, jeho základná myšlienka je, že prichádzajúce písmená vkladáme do prvého zásobníka, písmená na kontrolu vyberáme z druhého zásobníka a vždy, keď sa nám druhý zásobník vyprázdni, doň presypeme obsah prvého zásobníka.

Ukážeme si jednoduchšie riešenie. Budeme opäť používať dva zásobníky. Do prvého budeme vkladať všetky prichádzajúce malé písmená (ako hodnoty 1,2,3), do druhého veľké (tiež ako hodnoty 1,2,3). Nuž a po dočítaní slova sa jednoducho zahľadíme na oba zásobníky. Vstupné slovo bolo dobré práve vtedy, ak ich obsah je rovnaký. To ľahko overíme.

```
var vstup : char;
    i, co : byte;
begin
  Read(vstup);
  while (vstup <> '$') do begin
    if (vstup >= 'a') then begin
      if (vstup = 'a') then co := 1;
      if (vstup = 'b') then co := 2;
      if (vstup = 'c') then co := 3;

      while not Zero(R_1) do begin Dec(R_1); for i := 1 to 4 do Inc(R_0); end;
      while not Zero(R_0) do begin Dec(R_0); Inc(R_1); end;
      while (co > 0) do begin Inc(R_1); co := co - 1; end;
```

```
    end else begin
      if (vstup = 'A') then co := 1;
      if (vstup = 'B') then co := 2;
      if (vstup = 'C') then co := 3;

      while not Zero(R_2) do begin Dec(R_2); for i := 1 to 4 do Inc(R_0); end;
      while not Zero(R_0) do begin Dec(R_0); Inc(R_2); end;
      while (co > 0) do begin Inc(R_2); co := co − 1; end;
    end;
    Read(vstup);
  end;
  while (not Zero(R_1)) and (not Zero(R_2)) do begin Dec(R_1); Dec(R_2); end;
  if Zero(R_1) and Zero(R_2) then Accept;
end.
```

b) Kvôli prehľadnosti nech pôvodné registre sú R_1, R_2, R_3 a nové registre Q_1, Q_2.

Použijeme myšlienku podobnú tej z domáceho kola. Zakódujeme obsah všetkých troch registrov do jedného, druhý register budeme používať ako pomocný pri práci s prvým. Takže namiesto troch registrov s obsahom a, b, c budeme mať jeden register Q_1 s obsahom $2^a3^b5^c$. Pri simulovaní každej z operácií použijeme Q_2 ako pomocný register. Ako na začiatku, tak aj po odsimulovaní každej z operácií v ňom bude uložená nula.

Operácie **Inc**(R_x) v pôvodnom programe nahradíme tým, že obsah nového registra Q_1 vynásobíme 2, 3, resp. 5. Podobne príkaz **Dec**(R_x) nahradíme príslušným delením.

Odsimulovať podmienku **Zero**(R_x) bude trošku komplikovanejšie. Počas vyhodnocovania nejakej zloženej podmienky totiž nemôžeme robiť operácie s registrami – zistiť, či je v R_x nula teda musíme **pred** vyhodnotením príslušnej podmienky. Navyše drobné problémy spôsobí, že táto podmienka sa môže vyskytovať aj v podmienke pre príkaz **while**, kde ju treba vyhodnocovať pri každej iterácii (a nie len pred prvým volaním **while**).

Definujme „makro“ (kus výpočtu) **SpocitajZ**(R_x), ktoré bude fungovať nasledovne: Ak je v R_x nula, po jeho vykonaní bude v premennej z kladná hodnota, inak tam bude 0. Toto makro bude fungovať nasledovne: Začneme tým, že obsah Q_1 vydelíme príslušným prvočíslom, pričom si (v premennej z) zapamätáme zvyšok, ktorý sme dostali po tomto delení. Vrátime obsah Q_1 do pôvodného stavu. Ak obsah Q_1 bol deliteľný príslušným prvočíslom (a teda neplatí **Zero**($\mathbf{R_x}$)), bude v z nula, inak tam bude kladný zvyšok. Výraz **Zero**(R_x) má teda v tomto okamihu rovnakú pravdivostnú hodnotu ako výraz $(z > 0)$.

Každý príkaz „**if** P **then** príkazy;“ nahradíme makrom **SpocitajZ**(R_x) a príkazom „**if** P' **then** príkazy;“, kde podmienka P' vznikla z P tak, že sme namiesto všetkých výskytov výrazu **Zero**(R_x) dali výraz $(z > 0)$.

Každý príkaz „**while** P **do** príkazy;“ nahradíme nasledujúcim kusom výpočtu: „**SpocitajZ**(R_x); **while** P' **do begin** príkazy; **SpocitajZ**(R_x); **end**;“

Nové „makrá“ **Inc**, **Dec** (ktorými nahradíme každý výskyt týchto príkazov v pôvodnom programe) a **SpocitajZ** (na simuláciu **Zero**) budú teda vyzerať nasledovne:

```
var x, y, z, i : byte; { nove premenne, neboli v povodnom programe }
```

```
{ Inc(R_x) – x je v premennej x, predpokladame, ze Zero(Q_2) }

  if (x = 1) then y := 2 else if (x = 2) then y := 3 else y := 5;
  { vynasobime obsah Q_1 cislom y }
  while (not Zero(Q_1)) do begin
    Dec(Q_1);
    for i := 1 to y do Inc(Q_2);
  end;
  while (not Zero(Q_2)) do begin
    Dec(Q_2); Inc(Q_1);
  end;

{ Dec(R_x) – x je v premennej x, predpokladame, ze Zero(Q_2) }

  if (x = 1) then y := 2 else if (x = 2) then y := 3 else y := 5;
  z := 0;
  { vydelime obsah Q_1 cislom y }
  while (not Zero(Q_1)) do begin
    Dec(Q_1);
    if (Zero(Q_1)) then begin z := 1; break; end; { v R_x bola nula }
    for i := 1 to y – 1 do Dec(Q_1);
    Inc(Q_2);
  end;
  if (z = 1) then begin
    { obnovime povodny stav Q_1 – nic sa nemeni }
    while (not Zero(Q_2)) do begin
      Dec(Q_2); for i := 1 to y do Inc(Q_1);
    end;
    Inc(Q_1);
  end else begin
    { presunieme do Q_1 podiel }
    while (not Zero(Q_2)) do begin
      Dec(Q_2); Inc(Q_1);
    end;
  end;

{ SpocitajZ(R_x) – x je v premennej x, predpokladame, ze Zero(Q_2) }

  if (x = 1) then y := 2 else if (x = 2) then y := 3 else y := 5;
  { vydelime obsah Q_1 cislom y }
  z := 0;
  while (not Zero(Q_1)) do begin
    Dec(Q_1);
```

```
    z := z + 1;
    if (z = y) then begin z := 0; Inc(Q_2); end;
end;
{ vratime spaet povodnu hodnotu do Q_1 }
while (not Zero(Q_2)) do begin
    Dec(Q_2); for i := 1 to y do Inc(Q_1);
end;
for i := 1 to z do Inc(Q_1);
{ a v premennej z mame hladany zvysok }
```

Dva dôležité detaily, ktoré ste si mohli všimnúť:

1. Netreba zabudnúť ošetriť situáciu, ak register R_i obsahuje nulu. V tomto prípade aj po vykonaní **Dec**(R_i) musí v R_i (podľa definície) zostať nula.
2. Ak sme pri simulovaní príkazov **Inc**, **Dec** a **Zero** potrebovali použiť premenné, muselo ísť o **nové** premenné, ktoré sa dovtedy v programe nevyskytovali. (Čo ak napr. pôvodný program obsahoval časť `for i:=1 to 3 do Inc(R_1)` a my pri simulácií **Inc**(R_1) použijeme i?) Voľných mien pre nové premenné máme k dispozícii nekonečne veľa, ľahko nájdeme nejaké nepoužité.

Ľahko nahliadneme, že keď takto upravíme ľubovoľný program, tak upravený program bude ekvivalentný s pôvodným – t.j. dá na každom vstupe rovnaký výstup ako pôvodný program. Nuž a ak pôvodný program používal tri registre, upravený program už používa len dva.

Uvedomte si, že použitím tohto postupu na program používajúci $k > 3$ registrov dostaneme program, používajúci $k-1$ registrov. Preto platí pomerne prekvapivý výsledok: K ľubovoľnej úlohe, ktorú vieme riešiť na registrovom počítači, existuje program, ktorému na jej riešenie stačia dva registre.

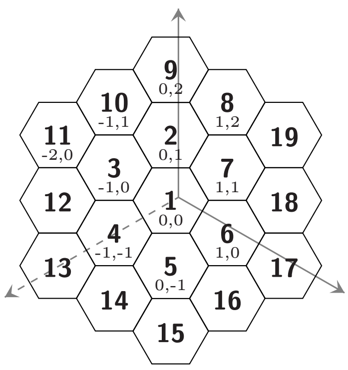
P – III – 4

Na poskakovanie psíkov sa môžeme pozerať ako na hru. Stav hry sa dá jednoznačne popísať pozíciou obidvoch psíkov. Skok psíkov predstavuje ťah. Keď psíci skočia, zmenia stav hry. Povolené stavy hry budú tie, ktoré zodpovedajú povoleným pozíciám psíkov. Pre každý stav hry budeme skúmať, na koľko ťahov sa dá do neho dostať zo začiatočného stavu (keď obidvaja psíci sú na začiatočných miestach). Tento počet ťahov budeme označovať vzdialenosťou daného stavu.

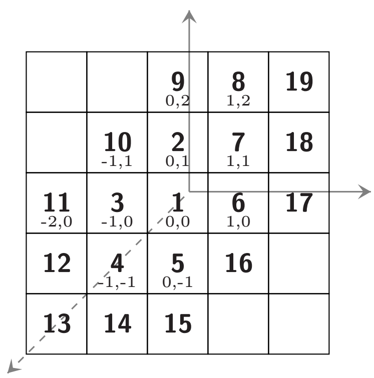
Vzdialenosť začiatočného stavu je 0. Všetky stavy, do ktorých sa dá z neho dostať na jeden ťah budú vo vzdialenosti 1. Teraz prejdeme cez všetky stavy vo vzdialenosti 1 a hľadáme, do ktorých nových stavov sa z nich vieme dostať – zjavne budú vo vzdialenosti 2. Takto môžeme analogicky pokračovať pre stavy vo vzdialenosti 3, 4, ... Skončíme, keď nájdeme koncový stav (obidvaja psíci sú na koncových miestach), alebo sme už neobjavili žiadny nový stav. Táto technika prehľadávania stavov sa nazýva prehľadávanie do šírky.

Otázkou ostáva, ako pre každý stav určiť, do ktorých ďalších (susedných) stavov za z neho dá dostať na jeden ťah. Dosť by nám pomohlo, keby sme vedeli pre každé políčko na lúke povedať čísla jeho susedov. Susedia stavu by sa potom našli ľahko. Zo všetkých možných pohybov obidvoma psíkmi 6 smermi (36 možností) vyškrtáme skákanie rovnakým smerom, skákanie po bodliakoch, skočenie mimo lúky a skočenie na to isté políčko.

Aby sa nám hľadali susedia ľahšie, ukážeme si, ako sa dá 6-uholníkový plánik lúky reprezentovať v obyčajnom dvojrozmernom poli. Na políčku 1 si vyberieme dva smery. Jeden ukazuje stúpajuci smer prvej súradnice, druhý smer druhej súradnice. Takto sme priradili ku každému políčku súradnice x, y, čomu zodpovedajú indexy v obyčajnom dvojrozmernom poli. V dvojrozmernom poli nájsť susedov je už ľahké. Konkrétne pri našej voľbe súradnicových osí budú susedia políčka x, y na políčkach $x, y+1$, $x-1, y$, $x-1, y-1$, $x, y-1$, $x+1, y$ a $x+1, y+1$.



Obr. 57



Obr. 58

Ako zistíme pre políčko s číslom k jeho súradnice? Všimnime si, že špirálu môžeme rozložiť na vrstvy šesťuholníkového tvaru. Najprv si zistíme, na koľkej vrstve špirály sa k nachádza, potom stranu na vrstve, pozíciu na strane a je to.

Počet políčok na 0-tej vrstve špirály: 1

Počet políčok na i-tej vrstve špirály: Vrstva špirály má 6 strán, na každej je i políčok – $6i$

Počet políčok na špirálach $0..v$: $1 + \sum_{i=1}^{v} 6i = 3v^2 - 3v + 1$

Vrstva špirály, kde sa nachádza políčko k: Hľadáme kladné riešenie rovnice $k = 3v^2 - 3v + 1$ a zaokrúhlime ho nahor. Po vyriešení dostaneme $v = \left\lceil \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k}{3} - \frac{1}{12}} \right\rceil$. (Jednoduchší a trochu pomalší postup: zvyšujeme v, kým počet políčok nedosiahne k.)

Strana na špirále, kde sa nachádza políčko k: Poznáme už vrstvu v, kde sa k nachádza. Odrátame od k celkový počet políčok na skorších vrstvách a ešte 1. Takto dostaneme poradové číslo políčka v tejto vrstve (číslované od 0). Na vrstve v má každá strana v políčok, rozdiel teda stačí predeliť v. Číslo strany s bude podiel, pozícia na strane p bude zvyšok po tomto delení.

Už vieme pre dané políčko k zrátať jeho vrstvu v, stranu s a pozíciu na strane p. Z týchto hodnôt dostaneme súradnice podľa nasledujúcej tabuľky:

s	x	y
0	+v-1-p	+v
1	-1-p	+v-1-p
2	-v	-1-p
3	-v+1+p	-v
4	+1+p	-v+1+p
5	+v	+1+p

Implementácia Stav hry je jednoznačne repezentovaný súradnicami x_1, y_1, x_2, y_2 obidvoch psíkov. Pri prehľadávaní do šírky si pamätáme zoznam stavov, ktoré sme už videli, ale ešte sme z nich neskúšali prehľadávať nové vrcholy. Na to nám poslúži fronta. Ďalej potrebujeme vedieť pre každý stav rýchlo zistiť, či sme ho ešte nevideli, už videli, alebo sa do neho nedá ísť (bodliaky). Na to máme vyhradené štvorrozmerné pole, kde je to priamo zapísané. (Presne toto isté sa dalo spraviť dvojrozmerným poľom, do ktorého by sme indexovali pôvodnými súradnicami. Tam by sme ale navyše potrebovali vedieť zo súradníc povedať pôvodné číslo políčka.)

Aby sme nemuseli pri prehľadávaní do šírky kontrolovať, či nevylezieme von z lúky, postavíme okolo celej lúky bodliaky. Rovnako zakážeme stavy, kde by boli obidvaja psíci na jednom mieste.

Prehľadávame priestor o veľkosti rádovo $O(N^2)$, kde N je veľkosť lúky. Časová aj pamäťová zložitosť prehľadávania je lineárna od veľkosti tohto priestoru, teda $O(N^2)$.

P – III – 5

Označme $S = \sum_{i=1}^{N} l_i$ počet dní, ktoré AttoSoft potrebuje na dokončenie všetkých programov. Posledný program teda dokončíme po S dňoch.

Uvažujme nasledujúci algoritmus. Spočítajme pre každý program pokutu, ktorú by sme zaň zaplatili, ak by sme ho dokončili po S dňoch. Program s najmenšou takou pokutou dáme do rozvrhu ako posledný. Ak je to program číslo i, zostáva nám naplánovať všetky zvyšné programy na prvých $S - l_i$ dní, čo urobíme rovnakým spôsobom (t.j. opäť vyberieme ako posledný program s najnižšou pokutou po $S - l_i$ dňoch, atď.)

Správnosť algoritmu ukážeme indukciou vzhľadom na počet programov, ktoré potrebujeme dokončiť. Ak je potrebné dokončiť jeden program, existuje len jediný možný rozvrh, a teda náš algoritmus funguje správne.

Nech teda počet programov, ktoré treba dokončiť je N a nech pre ľubovoľný menší počet programov náš algoritmus funguje správne. Označme G riešenie získané našim algoritmom (v tomto riešení je posledným programom program číslo i). Nech existuje iné, lacnejšie riešenie O, ktoré končí programom číslo j. Ak $i = j$, tak rozdiel medzi G a O musí byť v poradí prvých $N - 1$ programov. Podľa indukčného predpokladu však toto poradie v riešení G je optimálne, preto riešenie O nemôže byť lacnejšie.

V opačnom prípade, vytvorme nový rozvrh O' nasledujúcim spôsobom. Nech rozvrh O dokončuje programy v poradí $o_1, o_2, \dots, o_N$ a nech $o_k = i$. Podľa rozvrhu O' dokončíme programy v nasledujúcom poradí: $o_1, o_2, \dots, o_{k-1}, o_{k+1}, \dots, o_N, i$. Všimnime si, že riešenie O' je nanajvýš také drahé, ako riešenie O. Pokuta za programy $o_{k+1}, \dots, o_N$ je totiž nižšia ako v riešení O, lebo ich dokončíme skôr (pokuta rastie s počtom dní po termíne). Navyše, pokuta za program i dokončený po S dňoch určite nepresahuje pokutu za program o_N dokončený po S dňoch, keďže program i sme vybrali tak, aby táto pokuta bola najmenšia možná.

Riešenie O' ale nemôže byť lacnejšie ako riešenie G (platí tu ten istý argument, ako v prvom prípade). Preto ani riešenie O nemôže byť lacnejšie ako G. Dokázali sme, že žiadne lacnejšie riešenie ako G neexistuje, riešenie nájdené našim algoritmom je teda optimálne.

V každom kroku algoritmu musíme spočítať príslušnú pokutu pre každý program, ktorý sme ešte nezaradili do rozvrhu. Preto časová zložitosť algoritmu je $O(N^2)$.

11. Stredoeurópska informatická olympiáda

Jedenásty ročník Stredoeurópskej olympiády v informatike (CEOI 2004) sa konal v dňoch 12.–18. júla 2004 v Rzesówe v Poľsku. Účastníci – tímy z Chorvátska, Českej republiky, Nemecka, Maďarska, Poľska, Rumunska a Slovenska (Bosna a Hercegovina ako hostia) – v priebehu dvoch súťažných dní otestovali svoje schopnosti napísaním algoritmov a otestovaním k nim vytvorených programov pre šesť problémov z teórie grafov, geometrických problémov až po teóriu hier. Riešenia boli vyhodnocované počítačom automaticky, pričom bola tiež testovaná časová a pamäťová zložitosť algoritmov vhodným výberom vstupných údajov.

Boli udelené štyri zlaté medaily: víťazom súťaže je Luka Kalinovcic z Chorvátska a ďalšie tri zlaté medaily boli udelené Filipovi Wolskému z Poľska, Lovrovi Puzarovi z Chorvátska a Bartomiejovi Romanskému z Poľska. Naši študenti získali 2 bronzové medaily (Peter Perešini a Michal Poláčik), ale v neoficiálnom hodnotení stredoeurópskych družstiev skončili na piatom mieste (v hodnotení podľa počtu získaných bodov). Ďalší naši súťažiaci (Jakub Tekeľ a Marek Jančuška) sa umiestnili na 26.–27. mieste (oficiálne sa nemedailové miesta nezverejňujú). Stredoeurópske tímy, ktoré prichádzajú na túto olympiádu sú na vysokej odbornej úrovni a získať medailu v takej vyrovnanej súťaži nie je ľahké.

Treba skonštatovať, že tohtoročná súťaž bola po odbornej stánke pripravená mimoriadne dobre a vybrané problémy boli skutočne náročné na riešenie. Dva a viac zo šiestich problémov vyriešili len 12 súťažiaci, z našich bol medzi nimi len jeden. Konštatujem, že úlohy boli pripravované pre špičku súťažiacich.

Po súťažiach sa študenti mohli zúčastniť výletov do okolia mesta – návšteva Rzesówa, Soliny a Lanzuta.

Na záver by sme chceli oceniť prácu učiteľov a študentov vysokých škôl, ktorí spolupracujú pri príprave študentov stredných škôl na túto súťaž. Tiež by sme chceli poďakovať MŠ SR, ktoré túto súťaž podporuje a pracovníkom MŠ, ktorí nám zabezpečili všetko potrebné pre cestu.

doc. RND. Gabriela Andrejková, CSc, PF UPJŠ

Zadania úloh 11. Stredoeurópskej informatickej olympiády

Mraky

Na oblohe je n mrakov, všetky sa posúvajú spolu s vetrom tým istým smerom a tou istou konštantnou rýchlosťou $v = (v_x, v_y)$, t. j. pre ľubovoľné reálne číslo $t \geq 0$ a ľubovoľný bod mraku, ktorý má počiatočné súradnice (x, y), pozícia tohto bodu v čase t je $(x + t * v_x, y + t * v_y)$. Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že mrak je polygón (patria k nemu aj hranice), ktorého vrcholy majú celočíselné súradnice. Tento polygón nemusí byť konvexný, ale žiadne dve z jeho hrán sa navzájom nepretínajú (s možnou výnimkou spoločných koncových bodov po sebe idúcich hrán). Mraky sa môžu prekrývať.

Na zemi sa nachádza centrum na kontrolu satelitov, má súradnice $(0, 0)$ a satelit je priamo nad kontrolným centrom a nad mrakmi. Z kontrolného centra priamo k satelitu je vysielaný laserový lúč. Tento lúč sa používa na komunikáciu so satelitom. Keď však lúč prechádza cez mrak, komunikácia nie je možná. Na začiatku lúč neprechádza cez žiadny mrak. Počas pozorovania môže nastať niekoľko momentov, keď laserový lúč prechádza cez mraky (jeden alebo viac) a komunikácia je prerušená. Komunikácia je na okamih prerušená aj vtedy, keď laserový lúč prechádza jediným bodom mraku. Napíšte program, ktorý vypočíta, koľkokrát je komunikácia prerušená, pokiaľ všetky mraky neutečú.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý:

- zo štandardného vstupu prečíta pozície, tvary a rýchlosť mrakov
- určí koľkokrát je komunikácia prerušená
- vypíše výsledky na štandardný výstup.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje tri celé čísla n, v_x a v_y, ktoré sú oddelené jednou medzerou, $1 \leq n \leq 1\,000$, $-1\,000\,000\,000 \leq v_x, v_y \leq 1\,000\,000\,000$; n je počet mrakov, $v = (v_x, v_y)$ je vektor rýchlosti mrakov ($v \neq (0, 0)$). x-ová súradnica zodpovedá východno-západnému smeru a y-ová súradnica zodpovedá severno-južnému smeru.

Nasledujúcich n riadkov obsahuje popis mrakov, jeden riadok pre jeden mrak. Každý z týchto riadkov obsahuje postupnosť celých čísel odelených jednou medzerou. Prvé celé číslo v riadku je počet vrcholov mraku k, $3 \leq k \leq 1\,000$. Za ním nasleduje $2k$ celých čísel: $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_k, y_k$, $-1\,000\,000\,000 \leq x_i, y_i \leq 1\,000\,000\,000$; body (x_1, y_1), (x_2, y_2), … ,(x_k, y_k) predstavujú súradnice po sebe nasledujúcich vrcholov mraku v smere hodinových ručičiek.

Formát výstupu Prvý a jediný riadok výstupu by mal obsahovať práve jedno celé číslo: počet prerušení komunikácie.

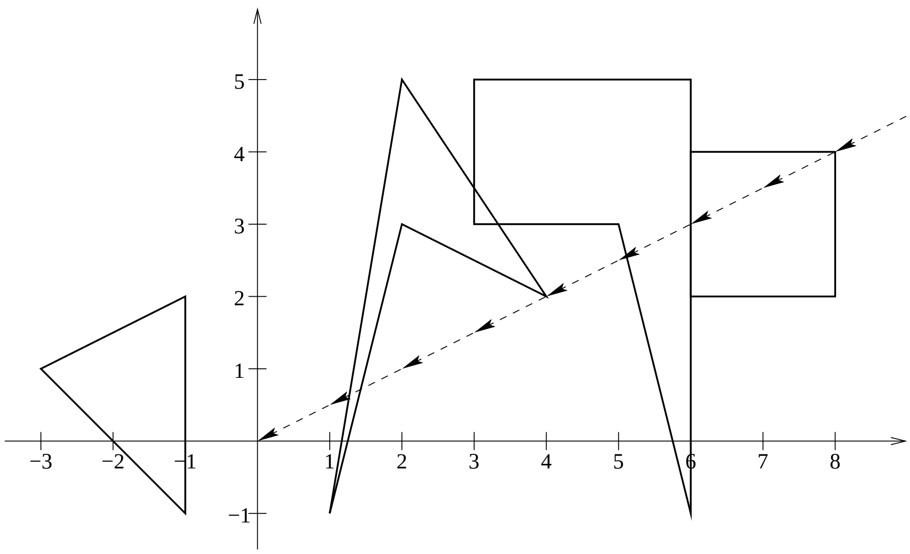
Príklad

Štandardný vstup

```
4 -2 -1
4 6 2 6 4 8 4 8 2
4 2 3 1 -1 2 5 4 2
3 -3 1 -1 2 -1 -1
5 5 3 3 3 3 5 6 5 6 -1
```

Štandardný výstup

```
3
```



Obr. 59

Obrázok obsahuje nakreslené mraky z príkladu pri pohľade zhora (stanica aj satelit sú teda v bode $(0, 0)$). Čiarkovaná čiara označuje body, ktoré prerušia laserový lúč.

Cukríky

Jakub dostal n vrecúšok s cukríkmi. V každom vrecúšku sa nachádza nejaký jeden druh cukríkov, ktorý je rôzny od druhov v ostatných vrecúškach (t. j. cukríky z toho istého vrecúška sú rovnakého druhu a cukríky z rôznych vrecúšok sú rôznych druhov). i-té vrecúško obsahuje m_i cukríkov. Jakub sa rozhodol zjesť niektoré z týchto cukríkov. Chcel by zjesť aspoň a ale nie viac ako b cukríkov. Problém je v tom, že Jakub sa nevie rozhodnúť koľko cukríkov a akého druhu by mohol zjesť. Koľkými spôsobmi by to mohol urobiť?

Súťažná úloha

Vašou úlohou je napísať program, ktorý:

- zo štandardného vstupu prečíta množstvo cukríkov v každom vrecúšku a celé čísla a a b,
- určí počet spôsobov, ktorými si Jakub môže cukríky vybrať a zjesť (splňujúc vyššie uvedené podmienky),

- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu V prvom riadku na vstupe sa nachádzajú tri celé čísla: n, a a b, ktoré sú oddelené jednou medzerou, ($1 \leq n \leq 10$, $0 \leq a \leq b \leq 10\,000\,000$). Každý z nasledujúcich n riadkov obsahuje jedno celé číslo. $(i+1)$-vý riadok obsahuje celé číslo m_i – počet cukríkov v i-tom vrecúšku ($0 \leq m_i \leq 1\,000\,000$).

Formát výstupu Nech k je počet rôznych spôsobov, ktorými si Jakub môže vybrať cukríky, ktoré chce zjesť. Prvý a jediný riadok na výstupe by mal obsahovať jedno celé číslo: k mod 2004 (t.j. zvýšok po delení k číslom 2004).

Príklad

Štandardný vstup	**Štandardný výstup**

`2 1 3`
`3`
`5`
	`9`

Jakub si môže vybrať cukríky nasledujúcimi spôsobmi:

$$(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(2,1)$$

Výlety

V súvislosti s dovolenkovou sezónou by sa mnohí ľudia radi vydali na nezabudnuteľné cesty. Každý chce cestovať so skupinou svojich priateľov, aby zväčšil svoje potešenie z cesty. Cestovná kancelária ponúka niekoľko výletov. V ponuke sú len výlety pre skupiny, pre každý výlet je veľkosť skupiny ohraničená: určený je minimálny a maximálny počet zúčastnených osôb. Každá skupina si môže vybrať len jeden výlet. Naviac, každý výlet môže byť vybratý len jednou skupinou. Cestovná kancelária Vás požiadala o pomoc. Chcela by zorganizovať čo najväčší možný počet výletov. Vašou úlohou je priradiť skupiny ľudí k výletom tak, aby bol zorganizovaný maximálny možný počet výletov.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý:

- zo štandardného vstupu prečíta popis skupín a výletov,
- priradí skupiny k výletom tak, aby sa uskutočnil maximálny možný počet výletov,
- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Ak existuje niekoľko možných riešení, Váš program by mal dať na výstup ľubovoľné z nich.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje dve celé čísla: n a m oddelené jednou medzerou, $1 \leq n \leq 400000$, $1 \leq m \leq 400000$; n je počet skupín a m je počet výletov. Skupiny sú očíslované od 1 po n a výlety sú očíslované od 1 po m.

Nasledujúcich n riadkov obsahuje veľkosti skupín, jednu v každom riadku. Riadok $i+1$ obsahuje celé číslo s_i – veľkosť i-tej skupiny, $1 \leq s_i \leq 10^9$.

Nasledujúcich m riadkov obsahuje popis výletov, v každom riadku jeden výlet. Riadok $n+j+1$ obsahuje dve celé čísla: l_j a u_j oddelené jednou medzerou. l_j je minimálna a u_j je maximálna veľkosť skupiny, pre ktorú môže byť výlet zorganizovaný, $1 \leq l_j \leq u_j \leq 10^9$.

Formát výstupu Prvý riadok výstupu obsahuje jedno celé číslo $k \geq 0$ – maximálny možný počet výletov, ktoré môžu byť zorganizované. Nasledujúcich k riadkov by malo obsahovať popis priradení. Každý z týchto riadkov by mal obsahovať dvojicu celých čísel oddelených jednou medzerou: číslo skupiny a číslo výletu. Môže sa stať, že existuje viac možných odpovedí, vtedy program môže vypísať jedno ľubovoľné z nich.

Príklad

Štandardný vstup

```
5 4
54
6
9
42
15
6 6
20 50
2 8
7 20
```

Štandardný výstup

```
3
2 1
3 4
4 2
```

Futbalová liga

Majme n tímov vo futbalovej lige (predpokladajme, že n je párne). Počas sezóny každý tím hrá s iným tímom práve raz. Sezóna pozostáva z $n-1$ kôl. Každý tím hrá práve raz počas každého kola. Tímy si želájú, aby po sebe idúce zápasy hrali na rôznych štadiónoch: jeden na domácom, jeden na súperovom, atď. Nanešťastie nie je vždy možné skonštruovať rozvrh zápasov tak, aby žiaden tím nehral dvakrát po sebe na domácom štadióne alebo dvakrát po sebe vonku. Rozvrh by mal byť konštruovaný tak, aby počet takýchto situácií bol čo najmenší. (Napríklad, ak tím hrá raz vonku, potom štyrikrát na domácom štadióne a potom znovu raz vonku, počíta sa to ako tri také situácie.)

Vašou úlohou je minimalizovať počet situácií, v ktorých tím hrá dvakrát po sebe doma alebo vonku a skonštruovať takýto rozvrh zápasov pre celú sezónu. Rozvrh by mal pozostávať z $n-1$ kôl. Každé kolo pozostáva z $\frac{n}{2}$ zápasov – každý tím hrá práve jeden zápas. V celej sezóne je $\frac{n(n-1)}{2}$ zápasov a každé dva tímy by mali hrať proti sebe práve jeden zápas. Každý zápas sa hrá na domácom štadióne jedného z hrajúcich tímov, teda jeden tím hrá doma a druhý vonku. Celkový počet situácií, v ktorých tím hrá dva po sebe idúce zápasy doma alebo vonku by mal byť čo najmenší.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý:

- zo štandardného vstupu načíta počet tímov,
- vypočíta minimálny celkový počet situácií, v ktorých tím hrá dvakrát po sebe doma alebo vonku a skonštruuje rozvrh zápasov,
- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu Prvý a jediný riadok štandardného vstupu obsahuje jedno párne celé číslo n $(2 \leq n \leq 1000)$ – počet tímov.

Formát výstupu Prvý riadok štandardného výstupu by mal obsahovať jediné celé číslo – minimálny celkový počet situácií, v ktorých tím hrá dvakrát po sebe doma alebo vonku. Nasledujúcich $n-1$ riadkov by malo obsahovať rozvrh zápasov: $(k+1)$-vý riadok by mal obsahovať popis k-tého kola.

Popis kola pozostáva z n rôznych čísel $d_1, d_2, \ldots, d_n$ z čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ pooddeľovaných jednou medzerou. Pre $i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ dvojica d_{2i-1}, d_{2i} vyjadruje zápas medzi tímami d_{2i-1} a d_{2i}. Tím d_{2i-1} hrá doma a tím d_{2i} hrá vonku.

Príklad

Štandardný vstup

```
4
```

Štandardný výstup

```
2
1 2 3 4
4 1 2 3
1 3 4 2
```

Puzzle

Kráľ Bytelandu dostal ako darček zvláštny puzzle. Puzzle pozostáva z hracej dosky veľkosti $n \times n$. Políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci $(1 \leq i, j \leq n)$ má súradnice (i, j) a obsahuje kúsok s číslom $p(i, j)$, $1 \leq p(i, j) \leq n^2$. Každé z čísel $1 \ldots n^2$ sa nachádza na práve jednom kúsku.

Aby ste vyriešili puzzle, musíte položiť kúsky v takom poradí, že pre každé $1 \leq i, j \leq n$ políčko (i, j) obsahuje kúsok s číslom $j + (i-1) * n$.

Povolené sú nasledujúce posuny pri riešení puzzle:

- cyklický posun všetkých kúskov v riadku o určitý počet políčok doprava,
- cyklický posun všetkých kúskov v stĺpci o určitý počet políčok nadol,

Kráľ Bytelandu sa pustil do riešenia svojho puzzle, ale nie je si istý, či by bol schopný vyriešiť ho, keby štartoval z inej počiatočnej pozície. Pomôžte mu vyriešiť tento problém.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý:

- Zo štandardného vstupu prečíta popis počiatočnej konfigurácie puzzle.
- Zistí, či kúsky na doske môžu byť položené v požadovanom poradí len použitím vyššie uvedených posunov. Ak je riešenie možné, program by mal nájsť posuny a umiestniť kúsky v požadovanom poradí.
- Vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu V prvom riadku štandardného vstupu je jedno celé číslo n – veľkosť strany hracej dosky, ($2 \leq n \leq 200$). Nasledujúcich n riadkov obsahuje popis počiatočnej konfigurácie. Riadok $i{+}1$ obsahuje n celých čísel $p(i,1), p(i,2), \ldots, p(i,n)$ pooddeľovaných jednou medzerou.

Formát výstupu Ak riešenie neexistuje, program by mal vypísať na štandardný výstup len jeden riadok obsahujúci jediné slovo `NO`.

Ak riešenie existuje, prvý riadok by mal obsahovať jedno celé číslo m – počet posunov vedúcich k riešeniu puzzle. Počet posunov vo vašom riešení nesmie prekročiť 400 000. Nasledujúcich m riadkov by malo obsahovať popis posunov, jedno v každom riadku.

Každý taký riadok by mal pozostávať z písmena `R` (pre posun riadku doprava) alebo `C` (pre posun stĺpca nadol), medzeru a dve celé čísla k a l oddelené medzerou; $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq n-1$. Riadok, ktorý obsahuje `R` k l, popisuje cyklický posun k-tého riadku o l políčok vpravo. Taký posun vedie k nasledujúcej konfigurácii na doske:

$$p'(i,j) = \begin{cases} p(i, j+n-l) & \text{ak } i = k \text{ a } j \leq l \\ p(i, j-l) & \text{ak } i = k \text{ a } j > l \\ p(i,j) & \text{ak } i \neq k \end{cases}$$

Podobne, riadok obsahujúci `C` k l popisuje cyklický posun k-tého stĺpca o l políčok nadol.

Ak je viac možných riešení, Váš program by mal vypísať ľubovoľné z nich.

Príklad

Štandardný vstup	**Štandardný výstup**
`4`	`C 2 1`
`4 6 2 3`	`R 1 3`
`5 10 7 8`	
`9 14 11 12`	
`13 1 15 16`	

Vyššie uvedená postupnosť dáva nasledujúcu postupnosť konfigurácií:

4	6	2	3
5	10	7	8
9	14	11	12
13	1	15	16

4	1	2	3
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Dve píly

Pozdĺž cesty, ktorá vedie z vrcholu hory na jej úpätie, rastie n starých stromov. Vláda sa rozhodla dať ich vyrezať. Aby nedošlo k znečisteniu lesa, každý strom musí byť transportovaný do piliarskeho závodu PÍLA.

Stromy môžu byť transportované len jedným smerom: smerom nadol. PÍLA je na dolnom konci cesty. Dva ďalšie piliarske závody môžu byť vybudované pozdĺž cesty. Rozhodnite, kde majú byť vybudované tak, aby bola minimalizovaná cena za transport. Cena za transport je jeden cent za prenos jedného kilogramu dreva po dĺžke jedného metra.

Súťažná úloha

Napíšte program, ktorý:

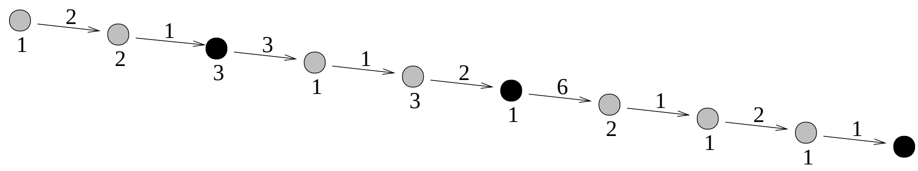
- zo štandardného vstupu prečíta počet stromov, ich váhy a ich umiestnenie,
- vypočíta minimálnu cenu transportu,
- vypíše výsledok na štandardný výstup.

Formát vstupu Prvý riadok vstupu obsahuje jedno celé číslo n – počet stromov ($2 \leq n \leq 20\,000$). Stromy sú očíslované $1, 2, \ldots, n$, začínajúc z vrcholu hory smerom nadol. Každý z nasledujúcich n riadkov obsahuje dve kladné celé čísla oddelené jednou medzerou. Riadok $i+1$ obsahuje: w_i – váha (v kilogramoch) i-tého stromu a d_i – vzdialenosť (v metroch) medzi stromami s číslami i a $i+1$, $1 \leq w_i \leq 10\,000$, $0 \leq d_i \leq 10\,000$. Posledné z týchto čísel, d_n, je vzdialenosť stromu s číslom n od dolného konca cesty. Je zaručené, že celková cena transportu všetkých stromov do závodu PÍLA na konci cesty je menšia ako $2\,000\,000\,000$ centov.

Formát výstupu Prvý a jediný riadok výstupu by mal obsahovať jedno celé číslo: minimálnu cenu transportu.

Príklad

Štandardný vstup	Štandardný výstup
9 1 2 2 1 3 3 1 1 3 2 1 6 2 1 1 2 1 1	26



Obr. 60

Obrázok ukazuje optimálne umiestnenie piliarskych závodov pre vyššie uvedené dáta. Stromy sú zobrazené ako krúžky s váhami uvedenými pod nimi. Piliarske závody sú čierne. Výsledok je rovný:

$$1 \cdot (2+1) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (1+2) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (1+2+1) + 1 \cdot (2+1) + 1 \cdot 1 = 26$$

16. Medzinárodná informatická olympiáda

V dňoch 11. až 18. septembra 2004 sa IOI už druhýkrát v histórii konala v hlavnom meste Grécka – Aténach. Zúčastnilo sa jej takmer 300 súťažiacich z približne 80 krajín sveta. Našu krajinu reprezentovali František Simančík (3. ročník, Gym. Grösslingová Bratislava), Miroslav Baláž (4. ročník, Gym. J. Hronca Bratislava), Marek Ludha (4. ročník) a Peter Perešíni (2. ročník, obaja Gym. J. G. Tajovského Banská Bystrica). Výpravu sprevádzali RNDr. Andrej Blaho (podpredseda Slovenskej komisie Matematickej olympiády pre kategóriu P) a Mgr. Michal Forišek (člen SK MO, predseda úlohovej komisie pre kategóriu P, obaja z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK).

Súťaž sa skladala z dvoch súťažných dní. Každý deň súťažiaci riešili tri úlohy algoritmického charakteru. Kvalita zadaných úloh oproti minulým rokom trochu poklesla, predsa len Grécko nepatrí medzi svetovú špičku v tejto oblasti. Napriek tomu žiaden zo sútažiacich nezískal plný počet bodov (600), absolútnym víťazom sa stal Paul Jefferys z Veľkej Británie, ktorý dosiahol 565 bodov.

Našim súťažiacim chýbala povestná trocha šťastia, dvom z nich by pár bodov navyše prinieslo lepšiu medailu. Napriek tomu je aj tohtoročný výsledok pre našu malú krajinu úspechom. Výsledky našich súťažiacich sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke:

Meno	Body za úlohy						Body	Medaila
	Art	Her	Pol	Emp	Phi	Far		
František Simančík	25	90	80	100	100	35	430	strieborná
Miroslav Baláž	25	85	0	95	100	90	395	strieborná
Peter Perešíni	20	55	0	95	100	90	360	bronzová
Marek Ludha	45	50	40	30	50	90	305	bronzová

Súčasťou neodborného programu bola návšteva aténskej Akropoly a lodný výlet spojený s návštevou niekoľkých ostrovov ležiacich pri pobreží. Večery si naši súťažiaci krátili zábavnou spoločenskou hrou Splash.

Aj na tejto IOI sa podarilo nášmu družstvu obstáť v čoraz silnejšej medzinárodnej konkurencii. Treba vyzdvihnúť prácu všetkých dobrovoľníkov, ktorí dokázali našich súťažiacich na túto súťaž zodpovedne pripraviť. Podľa slov našich súťažiacich dôležitú úlohu pri ich príprave zohral Korešpondenčný seminár z programovania (KSP), ktorý všetci riešili. KSP poskytuje talentovaným stredoškolákom možnosť riešiť zaujímavé úlohy olympiádneho charakteru v priebehu celého roka a pre najlepších riešiteľov organizuje sústredenia, kde im prednášajú študenti (ale aj pozvaní pedagógovia) z vysokých škôl.

Budúcoročnú medzinárodnú olympiádu organizujú naši severní susedia a odvekí rivali v programátorských súťažiach – Poliaci. Môžeme sa tešiť na kvalitné a primerane náročné príklady, ako aj na známe prostredie. Dúfame, že sa v týchto podmienkach nášmu družstvu podarí dosiahnuť čo najlepšie výsledky.

Mgr. Michal Forišek

Zadania úloh 16. Medzinárodnej informatickej olympiády

Artemis

Zeus dal Artemis, bohyni lovu a divokej prírody, obdĺžnikový kus pôdy, na ktorom mohla pestovať stromy. Ľavý dolný roh tejto oblasti dostal súradnice $(0, 0)$, jej ľavá strana ležala na kladnej poloosi osi y a dolná strana na kladnej poloosi osi x. Zeus prikázal Artemis, aby sadila stromy len v bodoch, ktoré majú celočíselné súradnice. Artemis však nechcela, aby jej les vyzeral umelo. Preto zasadila stromy tak, aby žiadna priamka spájajúca dva stromy nebola vodorovná ani zvislá.

Z času na čas si Zeus niečo zmyslí a chce po Artemis, aby vyťala niekoľko stromov z lesa. Pritom musí dodržať nasledujúce pravidlá:

1. Musí zoťať aspoň T stromov.
2. Stromy na sťatie vyberie tak, že si zvolí obdĺžnikovú oblasť, zotne všetky stromy vnútri nej a žiadne iné.
3. Strany tejto obdĺžnikovej oblasti musia byť rovnobežné so súradnicovými osami.
4. V dvoch protiľahlých rohoch zvolenej oblasti musia stáť stromy. Tieto dva stromy patria do zvolenej oblasti, a teda tiež musia byť sťaté.

Keďže Artemis má svoje stromy rada, chcela by ich zoťať čo najmenej. Podmienky, ktoré stanovil Zeus, však nesmie porušiť. Vašou úlohou je napísať program, ktorý z informácií o lese a čísla T zistí, ktorú oblasť si má Artemis zvoliť.

Formát vstupu Názov vstupného súboru je `artemis.in`. V jeho prvom riadku je číslo N – počet stromov v lese. V druhom riadku je číslo T – minimálny počet stromov, ktoré má Artemis zoťať. Nasleduje N riadkov, ktoré popisujú pozície stromov. V každom z nich sú dve čísla X, Y – súradnice jedného stromu. Stromy sú očíslované od 1 do N v poradí, v akom sú zadané vo vstupnom súbore.

Obmedzenia Vo všetkých vstupných súboroch platí $1 < N \leq 20\,000$, $0 \leq X, Y \leq 64\,000$ a $1 < T \leq N$. Navyše v 50% vstupoch platí $1 < N < 5\,000$.

Formát výstupu Názov výstupného súboru je `artemis.out`. Má obsahovať jediný riadok a na ňom dve celé čísla I, J oddelené medzerou. Tieto čísla sú čísla dvoch stromov, ktoré ležia v rohoch oblasti, ktorú si má Artemis zvoliť. Nezáleží na poradí týchto dvoch čísel. Ak je viac optimálnych riešení, môžete vypísať ľubovoľné z nich. Môžete predpokladať, že každý vstupný súbor má riešenie.

Príklad

Súbor `artemis.in`
```
3
2
1 1
2 3
5 6
```

Súbor `artemis.out`
```
1 2
```

Hermes

Grécki bohovia si na Olympe postavili mesto, v ktorom cesty tvoria nekonečnú štvorcovú sieť so stranami rovnobežnými so súradnicovými osami. Každému celému číslu Z zodpovedá jedna vodorovná cesta (s y-ovou súradnicou Z) a jedna zvislá cesta (s x-ovou súradnicou Z). Zjavne body s celočíselnými súradnicami zodpovedajú práve križovatkám, teda priesečníkom týchto ciest.

Počas horúcich gréckych letných dní bohovia vylihujú v kaviarničkách, ktoré sú postavené na niektorých križovatkách. Posol Hermes má dnes bohom doručiť správy. Pri tom sa ale môže pohybovať len po uliciach mesta. Každá správa je určená jednému konkrétnemu bohovi, ale neprekáža, ak ju uvidia aj iní bohovia.

Hermes dostal zoznam súradníc kaviarní, do ktorých má doručiť správy. Správy musí doručiť v poradí, v akom sú kaviarne uvedené v jeho zozname. Aby nemusel toľko lietať po meste, kúpil si Hermes dokonalé namakané laserové ukazovátko, ktorým vie svietiť pozdĺž ciest. Bohovia sediaci v kaviarňach pozdĺž cesty jeho svetlo okamžite vidia a pochopia z neho celú správu. Teda na to, aby Hermes doručil správu do kaviarne so súradnicami (X_i, Y_i), stačí mu prísť do hociktorého bodu na vodorovnej ulici s y-ovou súradnicou Y_i, resp. do hociktorého bodu na zvislej ulici s x-ovou súradnicou X_i. Hermes začína svoju púť v bode $(0, 0)$ a končí ju v okamihu, keď doručí poslednú správu.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý načíta postupnosť súradníc kaviarní a vypočíta, akú najmenšiu celkovú vzdialenosť musí Hermes prejsť na to, aby doručil všetky správy.

Formát vstupu Vstupný súbor sa volá `hermes.in`. V prvom riadku je jedno celé číslo N – počet správ, ktoré treba doručiť. Nasleduje N riadkov, ktoré obsahujú súradnice kaviarní, kam treba doručiť správy. Každý z týchto riadkov obsahuje dve celé čísla X_i, Y_i – súradnice križovatky, na ktorej stojí príslušná kaviareň. Správy treba do kaviarní doručiť v poradí, v akom sú kaviarne uvedené vo vstupnom súbore.

Obmedzenia Vo všetkých vstupných súboroch platí $1 \leq N \leq 20\,000$ a $-1\,000 \leq$ $\leq X_i, Y_i \leq 1\,000$. Navyše v 50% vstupných súborov platí $1 \leq N \leq 80$.

Formát výstupu Výstupný súbor sa volá `hermes.out`. Má obsahovať jediný riadok a na ňom jediné celé číslo – najmenšiu celkovú vzdialenosť, ktorú musí Hermes prejsť pri doručovaní správ.

Príklad

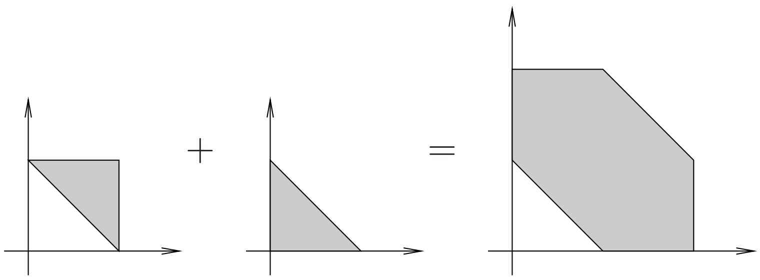
Súbor `hermes.in`
```
5
8 3
7 -7
8 1
-2 1
6 -5
```

Súbor `hermes.out`
```
11
```

Polygón

Polygón (mnohouholník) obsahuje všetky body, ktoré sú na jeho hranici alebo v jej vnútri. Konvexný polygón má tú vlastnosť, že pre každé jeho dva body X a Y, úsečka spájajúca X a Y je celá súčasťou polygónu. Všetky polygóny v tejto úlohe sú konvexné polygóny s minimálne dvoma vrcholmi, všetky vrcholy sú navzájom rôzne a majú celočíselné súradnice. Žiadne tri vrcholy neležia na jednej priamke. Slovo *polygón* ďalej označuje iba takéto polygóny.

Majme dva polygóny A a B. Minkowského súčet A a B sa skladá zo všetkých bodov tvaru $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ pre všetky body (x_1, y_1) v A a pre všetky body (x_2, y_2) v B. Je zaujímavé, že Minkowského súčet polygónov je opäť polygón. Obrázok nižšie to ilustruje na príklade: dva trojuholníky a ich Minkowského súčet.



Obr. 61

Ďalej nás bude zaujímať inverzná operácia k Minkowského súčtu. Pre daný polygón P budeme hľadať také dva polygóny A a B, pre ktoré:

- P je Minkowského súčet A a B,
- A má 2 až 4 rôzne vrcholy, t.j. je to úsečka (2 vrcholy), trojuholník (3 vrcholy) alebo štvoruholník (4 vrcholy),
- A by mal mať podľa možnosti čo najviac vrcholov, t.j.:
  - ak je to možné, A by mal byť štvoruholník,
  - ak A nemôže byť štvoruholník, mal by byť trojuholníkom – ak je to možné,
  - inak by mal byť úsečkou.

Zrejme ani A ani B sa nemôžu rovnať P, lebo potom by druhý sčítanec musel byť bod a to už nie je korektný polygón.

Dostávate sadu vstupných súborov, z ktorých každý obsahuje popis polygónu P. Pre každý vstupný súbor by ste mali nájsť nejaké polygóny A a B, ktoré vyhovujú podmienkam zadania. Takéto riešenie zapíšte do výstupného súboru. Môžete predpokladať, že pre všetky vstupné súbory existujú takéto polygóny A a B. Ak existuje viac správnych výsledkov, pošlite ľubovoľný z nich. Nebudete posielať program, ale len výstupné súbory.

Formát vstupu Dostávate 10 testovacích zadaní v textových súboroch s menami `polygon1.in` až `polygon10.in`, kde číslo za `polygon` je poradové číslo vstupu. Každý vstupný súbor má nasledovnú štruktúru:

- prvý riadok obsahuje jedno celé číslo N – počet vrcholov polygónu P.

- nasledujúcich N riadkov popisuje vrcholy proti smeru hodinových ručičiek – jeden vrchol na riadok. Riadok $i+1$ (pre $i = 1, 2, \ldots, N$) obsahuje dve celé čísla x_i a y_i, oddelené medzerou – sú to súradnice i-teho vrchola polygónu. Všetky súradnice na vstupe sú nezáporné celé čísla.

Formát výstupu Pošlite 10 výstupných súborov zodpovedajúcich vstupným súborom. Tieto súbory majú obsahovať popisy požadovaných polygónov A a B. Prvý riadok by mal vyzerať takto:

`#FILE polygon` i

kde celé číslo i ($1 \le i \le 10$) je poradové číslo príslušného vstupného súboru.

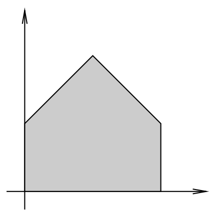
Výstupný formát je podobný vstupnému formátu. Druhý riadok by mal obsahovať jedno celé číslo N_A – počet vrcholov A ($2 \le N_A \le 4$). Nasledujúcich N_A riadkov popisuje vrcholy A proti smeru hodinových ručičiek. Riadok $i+2$ (pre $i = 1, 2, \ldots, N_A$) obsahuje dve celé čísla x_i a y_i, ktoré sú oddelené medzerou – súradnice i-teho vrchola polygónu A.

Riadok $N_A + 3$ by mal obsahovať jedno celé číslo N_B – počet vrcholov B, ($2 \le N_B$). Nasledujúcich N_B riadkov popisuje vrcholy B proti smeru hodinových ručičiek – jeden vrchol na riadok. Riadok $N_A + j + 3$ (pre $j = 1, 2, \ldots, N_B$) obsahuje dve celé čísla x_j a y_j, ktoré sú oddelené medzerou – súradnice j-teho vrchola polygónu B.

Príklad

Súbor `polygon0.in`

```
5
0 1
0 0
2 0
2 1
1 2
```

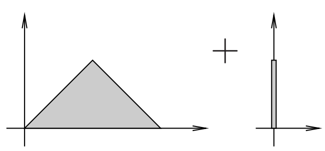


Obr. 62

Pre tento vstup sú oba výstupné súbory (pozri obrázky) správne, nakoľko v oboch prípadoch je A trojuholník a nemôže byť štvoruholníkom.

Súbor `polygon0.out`

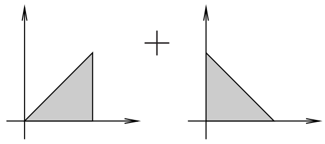
```
#FILE polygon 0
3
0 0
2 0
1 1
2
0 1
0 0
```



Obr. 63

Súbor `polygon0.out`

```
#FILE polygon 0
3
0 0
1 0
1 1
3
0 1
0 0
1 0
```



Obr. 64

Empódiá

Už antický matematik a filozof Pytagoras hlásal, že podstatou reality sú matematika a čísla. A naozaj, aj súčasní biológovia sa často stretnú s číslami. Jednu zaujímavú oblasť tvoria tzv. *biopostupnosti*. Biopostupnosť je postupnosť tvorená M celými číslami, ktorá:

- Obsahuje každé z čísel $0, 1, \ldots, (M-1)$.
- Začína číslom 0 a končí číslom $(M-1)$.
- Žiadne dva po sebe idúce členy postupnosti nie sú tvaru $E, E+1$ (v tomto poradí).

Súvislú podpostupnosť biopostupnosti voláme *interval*.

Interval je *uzavretý*, ak jeho prvý prvok je v ňom najmenší, posledný je najväčší a obsahuje všetky prvky, ktorých hodnota je medzi hodnotami koncových prvkov. Jeden prvok postupnosti netvorí uzavretý interval. Uzavretý interval voláme *empódio*, ak neobsahuje žiaden kratší uzavretý interval.

Ako príklad uvedieme biopostupnosť $(0, 3, 5, 4, 6, 2, 1, 7)$. Celá biopostupnosť je uzavretý interval. Nie je to však empódio, lebo obsahuje kratší uzavretý interval $(3, 5, 4, 6)$. Tento uzavretý interval už žiaden kratší uzavretý interval neobsahuje, preto je empódio. Je to dokonca jediné empódio v tejto biopostupnosti.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý v danej biopostupnosti nájde všetky empódiá.

Formát vstupu Vstupný súbor sa volá `empodia.in`. V jeho prvom riadku je jediné celé číslo M – dĺžka biopostupnosti. Nasleduje M riadkov, každý z nich obsahuje jeden prvok biopostupnosti. Prvky sú samozrejme uvedené v poradí, v akom po sebe v biopostupnosti nasledujú.

Obmedzenia V jednom vstupe platí $1\,000\,000 \leq M \leq 1\,100\,000$. Vo všetkých ostatných vstupoch platí $1 \leq M \leq 60\,000$. Navyše, v 50% vstupov platí $M \leq 2\,600$.

Formát výstupu Výstupný súbor sa volá `empodia.out`. V prvom riadku by malo byť uvedené jedno celé číslo H – počet empódií v zadanej biopostupnosti. Nasledujúcich H riadkov popisuje jednotlivé empódiá v poradí, v ktorom v biopostupnosti začínajú. Každý riadok má obsahovať dve celé čísla A, B oddelené jednou medzerou. Tieto čísla znamenajú, že príslušné empódio začína A-tym prvkom biopostupnosti a končí jej B-tym prvkom.

Príklad

Súbor `empodia.in`

```
8
0
3
5
4
6
2
1
7
```

Súbor `empodia.out`

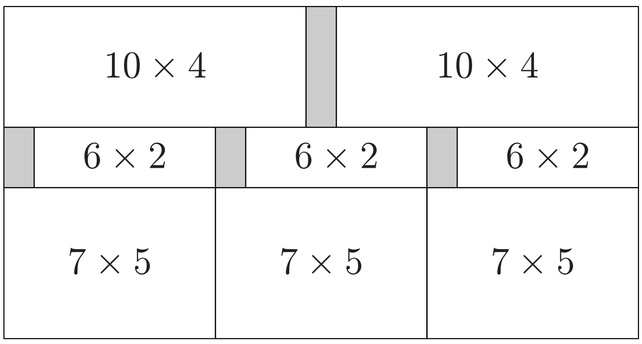
```
1
2 5
```

Phidias

Významný starogrécky sochár Phidias sa pripravuje na stavbu ďalšieho neuveriteľného monumentu. Kvôli tomu potrebuje obdĺžnikové mramorové doštičky rozmerov $\check{S}_1 \times V_1$, $\check{S}_2 \times V_2$, $\ldots$, $\check{S}_N \times V_N$.

Phidias získal veľkú mramorovú dosku obdĺžnikového tvaru. Chcel by ju rozpíliť na doštičky požadovaných rozmerov. Každý kus mramoru (doska alebo z nej odpílené kusy) môže rozpíliť buď vodorovne alebo zvislo na dve obdĺžnikové dosky s celočíselnými dĺžkami strán, pričom rez musí prechádzať naprieč celým kusom. Toto je jediný dovolený spôsob pílenia dosiek. Rozpílené časti sa už nedajú spájať dokopy. Nakoľko má mramor na sebe vzorku, doštičky sa nesmú otáčať: ak Phidias odpíli nejakú doštičku rozmerov $A \times B$, tak táto sa nemôže použiť ako doštička rozmerov $B \times A$ (samozrejme s výnimkou $A = B$). Doštičiek každého z požadovaných tvarov môže vyrobiť ľubovoľne veľa, aj nula. Kúsok mramoru ide po ukončení všetkých pílení do odpadu, ak nemá žiadne z množiny požadovaných rozmerov. Phidias by rád rozpílil pôvodnú mramorovú dosku tak, aby podľa možnosti vzniklo čo najmenej odpadu.

V nasledujúcom príklade predpokladáme, že na obrázku má pôvodná doska šírku 21 a výšku 11 a požadované rozmery doštičiek sú 10×4, 6×2, 7×5 a 15×10. Minimálna možná plocha odpadu je 10 a z obrázku sa dá zistiť nielen poradie pílení, ale aj kúsky, ktoré idú do odpadu. Ich celková plocha je naozaj 10.



Obr. 65

Vašou úlohou je napísať program, ktorý pre dané rozmery pôvodnej dosky a zadané rozmery doštičiek vypočíta minimálnu celkovú plochu, ktorá ide do odpadu.

Formát vstupu Meno vstupného súboru je `phidias.in`. Prvý riadok vstupu obsahuje dve celé čísla: $\check{S}$ – šírku pôvodnej dosky a V – výšku pôvodnej dosky. Druhý riadok obsahuje jedno celé číslo N – počet požadovaných rozmerov doštičiek. Nasledujúcich N riadkov obsahuje požadované rozmery doštičiek. Každý z týchto riadkov obsahuje dve celé čísla – najprv šírku $\check{S}_i$ a potom výšku V_i doštičky ($1 \leq i \leq N$).

Obmedzenia Pre všetky vstupy platí $1 \leq \check{S} \leq 600$, $1 \leq V \leq 600$, $0 < N \leq 200$, $1 \leq \check{S}_i \leq \check{S}$, a $1 \leq V_i \leq V$. Navyše v 50% vstupných súborov platí $\check{S} \leq 20$, $V \leq 20$ a $N \leq 5$.

Formát výstupu Meno výstupného súboru je `phidias.out`. Súbor by mal obsahovať jeden riadok s jediným celým číslom – minimálnou celkovou plochou, ktorá musí z pôvodnej dosky ísť do odpadu.

Príklad

Súbor `phidias.in`

```
5
21 11
4
10 4
6 2
7 5
15 10
```

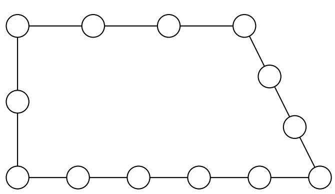
Súbor `phidias.out`

```
10
```

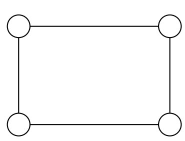
Farmár

Farmár má niekoľko polí. Okolo každého z nich rastú jablone. Okrem toho mu patrí niekoľko chodníkov. Takisto pozdĺž každého chodníka rastú jablone. Medzi každými dvoma susediacimi jabloňami (či už okolo polí alebo pozdĺž chodníkov) rastie jedna hruška. Každá farmárova jabloň stojí buď na obvode poľa alebo pri chodníku. Každá hruška rastie medzi niektorými dvoma susednými jabloňami.

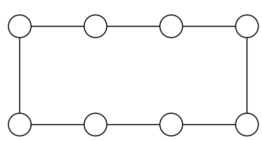
Jedného dňa prikvačila farmára choroba. Keď už týždeň trvala, pochopil farmár, že jeho dni sú zrátané. I zavolal si on najstaršieho syna a takto mu riekol: „Synu. Dám ti hociktorých Q jabloní, ktoré si vyberieš. Z každého poľa aj chodníka si môžeš vybrať ľubovoľnú kombináciu jabloní. Navyše ak niektoré dve jablone, čo si si vybral, susedia, pridám ti aj hrušku, čo stojí medzi nimi. Všetko ostatné dostanú tvoji bratia.“ Najstaršiemu synovi síce jablká nechutia, avšak hrušiek by chcel získať čo najviac.



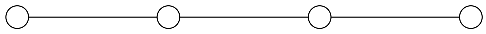
Pole 1 má 13 jabloní.



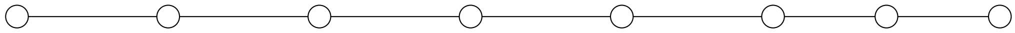
Pole 2 má 4 jablone.



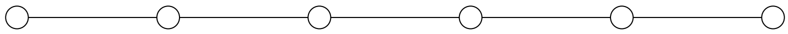
Pole 3 má 8 jabloní.



Chodník 1 má 4 jablone.



Chodník 2 má 8 jabloní.



Chodník 3 má 6 jabloní.

Obr. 66

Na obrázku 66 je možný farmárov majetok. Predpokladajme, že si syn môže vybrať $Q = 17$ jabloní. Aby zdedil čo najviac hrušiek, mal by si vybrať práve všetky jablone z polí 1 a 2. Takto zdedí 17 hrušiek.

Vašou úlohou je napísať program, ktorý z čísla Q a informácií o poliach a chodníkoch spočíta, koľko najviac hrušiek môže najstarší syn zdediť.

Formát vstupu Vstupný súbor sa volá `farmer.in`. V prvom riadku sú tri celé čísla Q, M a K. Q je počet jabloní, ktoré si má syn vybrať, M je počet polí a K je počet chodníkov, ktoré farmár vlastní. V druhom riadku je M celých čísel $N_1, \dots, N_M$, ktoré udávajú počty jabloní okolo jednotlivých polí. V treťom riadku je K celých čísel $R_1, \dots, R_K$, ktoré udávajú počty jabloní pozdĺž jednotlivých chodníkov.

Obmedzenia Vo všetkých vstupoch je $0 \leq Q \leq 150\,000$, $0 \leq M, K \leq 2\,000$, pre všetky i je $3 \leq N_i \leq 150$ a $2 \leq R_i \leq 150$. Celkový počet jabloní okolo polí a pri chodníkoch je aspoň Q. Navyše v 50% vstupných súborov platí $Q \leq 1\,500$.

Formát výstupu Výstupný súbor sa volá `farmer.out`. Má obsahovať jediný riadok a na ňom jediné celé číslo – najväčší možný počet hrušiek, ktoré môže syn zdediť.

Príklad

Súbor `farmer.in`

```
17 3 3
13 4 8
4 8 6
```

Súbor `farmer.out`

```
17
```

Korešpondenčný seminár SK MO

Korešpondenčný seminár Slovenskej komisie Matematickej olympiády (KS SK MO) vznikol už v 24. ročníku MO (vtedy ešte ako federálny seminár) preto, aby bolo umožnené venovať individuálnu starostlivosť aj tým študentom, ktorí nenavštevovali triedy so zameraním na matematiku. Neskôr vzniklo veľké množstvo iných matematických korešpondenčných seminárov, a aj počet škôl so zameraním na matematiku stúpol, KS SK MO sa preto zameriaval na zlepšenie prípravy všetkých študentov, ktorí preukázali svoje schopnosti v predchádzajúcich ročníkoch MO. Keďže úlohy tohto seminára svojou náročnosťou prevyšovali akúkoľvek inú matematickú súťaž pre stredoškolákov, seminár bol dôležitou súčasťou prípravy aj na medzinárodnú matematickú olympiádu.

Ako je písané aj v úvode Ročenky, v 52. ročníku mala MO na svoju činnosť nedostatočné finančné prostriedky. KS SK MO sa tak nepodarilo zorganizovať. V ostatných ročníkoch MO až po 51. ročník chod KS SK MO zabezpečovali najmä študenti FMFI UK, ktorí boli zároveň organizátormi iných stredoškolských matematických seminárov. Tieto semináre prešli v 51. ročníku MO veľkou zmenou, ktorú zavŕšilo spojenie dvoch seminárov (Stredoslovenského a Bratislavského) do jedného s názvom Korešpondenčný matematický seminár (KMS). Po roku činnosti sa organizátori rozhodli obnoviť KS SK MO ako osobitnú kategóriu seminára KMS. Od 53. ročníka je preto KS SK MO kategóriou GAMA seminára KMS a seminár KMS je oficiálnym seminárom SK MO.

Po ročnej prestávke a uvedených zmenách má KS SK MO každý rok šesť sérií a v každej sérii 5 úloh.

Celkové poradie KS SK MO 2003/2004

1. *Tomáš Váňa*, 4. ročník, Gymnázium M. R. Štefánika, Žiar nad Hronom, 220 bodov
2. *František Simančík*, 3. ročník, Gymnázium Grösslingová, Bratislava, 195 bodov
3. *Vítězslav Kala*, 4. ročník, Gymnázium kpt. Jaroše, Brno, 179 bodov
4. *Jaroslav Knebl*, 2. ročník, Gymnázium A.Bernoláka, Námestovo, 150 bodov
5. *Hana Budáčová*, 4. ročník, Gymnázium B. S. Timravy, Lučenec, 139 bodov

Uvádzame všetky príklady tohto ročníka súťaže spolu s riešeniami, často študentskými. Príklady boli vyberané z národných olympiád či iných súťaží.

Zadania súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Okolo okrúhleho stola sedí 30 ľudí. Každý z nich je buď múdry, alebo hlúpy. Každého z nich sa spýtame (práve raz), či jeho sused sediaci vpravo od neho je múdry alebo hlúpy. Pritom vieme, že múdry nám odpovedá pravdivo a hlúpy odpovedá náhodne. Počet hlupákov je najviac n. Pri akom najväčšom n môžeme s istotou nájsť múdreho človeka?

1.2 Kráľovské Mesto Seminára (KMS) má presne n obyvateľov. Chcú tam vytvoriť čo najviac klubov tak, aby ľubovoľné dva kluby mali spoločného člena, ale ľubovoľné tri kluby už nemali spoločného člena. Koľko najviac klubov môžu takto vytvoriť?

1.3 Dokážte, že pre každé celé číslo $n > 1$ môžeme napísať číslo $n^{12} + 64$ ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako 1.

1.4 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Na stranách AB a AC zvolíme po rade body M, N. Kružnice s priemermi BN a CM sa pretínajú v bodoch P a Q. Dokážte, že body P, Q a ortocentrum H trojuholníka ABC ležia na priamke.

1.5 Dokážte, že ak všetky steny štvorstena majú rovnaký obsah, tak jeho dve ľubovoľné protiľahlé hrany majú rovnakú dĺžku.

Druhá séria

2.1 Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Body C_1 a A_1 sú zvolené na polpriamkach BA a DC tak, že platí $|DA| = |DA_1|$ a $|BC| = |BC_1|$. Dokážte, že uhlopriečka DB pretína úsečku A_1C_1 v jej strede.

2.2 Nech Q je stred pripísanej kružnice k trojuholníku ABC, ktorá sa dotýka zvnútra strany BC. Nech M je stred strany AC a P priesečník MQ a BC. Dokážte, že $|AB| = |BP|$, ak $|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot |\sphericalangle ACB|$.

2.3 Uvažujme $2n$ rôznych prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ menších ako $n^2 + 1$ ($n > 2$). Dokážte, že nejaké tri z rozdielov $a_i - a_j$ (pre všetky možné $i \neq j$) sú rovnaké.

2.4 Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a_{n+1} = a_1)$ platí nerovnosť

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + a_{k+1}} \geqq \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

2.5 Ak pre prirodzené číslo n platí, že $4^n + 2^n + 1$ je prvočíslom, tak n je mocninou trojky. Dokážte!

TRETIA SÉRIA

3.1 Nech a, b, c, d sú také celé čísla, že a, b, c sú za sebou idúcimi členmi geometrickej postupnosti a zároveň b, c, d sú za sebou idúcimi členmi aritmetickej postupnosti. Okrem toho platí $a + b + c + d = 4 \cdot 3^{2003}$. Nájdite všetky takéto čísla.

3.2 Ukážte, že ak pre racionálne čísla x, y, z platí $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$, potom platí aj $x = y = z = 0$.

3.3 Hra *solitér* sa hrá na tabuľke $m \times n$ štvorčekov. V každom z nich je položená jedna minca. Na začiatku sú všetky mince okrem jednej v rohu otočené znakom nahor. V každom ťahu môžeme z tabuľky zobrať ľubovoľnú mincu, ktorá je otočená znakom nahor, ale súčasne musíme otočiť všetky mince v štvorčekoch, ktoré hranou susedia s tým, odkiaľ sme mincu práve zobrali. Nájdite všetky dvojice (m, n), pre ktoré je možné takýmito ťahmi zobrať všetky mince.

3.4 Nájdite všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, aby pre každé dva nesúdeliteľné delitele a, b čísla n bolo aj číslo $a + b - 1$ deliteľom n.

3.5 Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla a, b, c spĺňajúce rovnosť $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ platia nerovnosti

$$0 \leqq ab + bc + ac - abc \leqq 2.$$

Štvrtá séria

4.1 Juraj našiel na povale starú šachovú figúrku – delfína a spomenul si na vekmi zabudnutý kaprov problém. Delfín sa môže hýbať o jedno políčko doprava, o jedno políčko hore alebo o jedno políčko po diagonále doľava dole. Na začiatku stojí delfín v ľavom dolnom rohu šachovnice 8×8. Dá sa s ním prejsť celá šachovnica tak, aby na každom políčku stál práve raz?

4.2 Nech $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je neklesajúca postupnosť nezáporných celých čísel taká, že každé nezáporné celé číslo sa dá práve jedným spôsobom vyjadr1iť v tvare $a_i + {} + 2a_j + 4a_k$, kde i, j a k sú nie nutne rôzne. Určte všetky možné hodnoty a_{2004}.

4.3 Nech body A_1, B_1, C_1 ležia postupne na výškach (ako úsečkách) AA', BB', CC' ostrouhlého trojuholníka ABC tak, že súčet obsahov trojuholníkov ABC_1, BCA_1 a CAB_1 je rovný obsahu trojuholníka ABC. Nech H je ortocentrum trojuholníka ABC. Dokážte, že body A_1, B_1, C_1, H ležia na kružnici.

4.4 V magickom štvorci $n \times n$ sú vpísané čísla $1, 2, \ldots, n^2$ (každé práve raz). Stredy každých dvoch buniek sú spojené šípkami orientovanými z bunky s menším číslom do bunky s väčším číslom. Dokážte, že súčtom všetkých takýchto vektorov je nulový vektor.
Poznámka. Štvorec považujte za magický, ak súčet čísel v ľubovoľnom riadku alebo stĺpci je rovnaký.

4.5 Bod K leží vo vnútri rovnobežníka $ABCD$, pričom platí $|CL| = |LK|$ a $|AM| = {} = |MK|$, kde L a M sú postupne stredy strán AD a CD. Označme N stred úsečky BK. Ukážte, že $|\sphericalangle NAK| = |\sphericalangle NCK|$.

Piata séria

5.1 V rovnoramennom trojuholníku ABC ($|AB| = |BC|$) stredná priečka rovnobežná so stranou BC pretne vpísanú kružnicu trojuholníka ABC v bode F, ktorý neleží na základni AC. Dokážte, že dotyčnica ku vpísanej kružnici v bode F pretne os uhla ACB na strane AB.

5.2 V rovine je daný konvexný päťuholník $ABCDE$, pre ktorý platí $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|\sphericalangle ABC| = 150°$, $|\sphericalangle CDE| = 30°$ a $|BD| = 2\,\text{km}$. Zistite obsah päťuholníka $ABCDE$.

5.3 Dokážte, že pre každé prvočíslo $p > 3$ platí

$$p^3 \mid \binom{2p-1}{p-1} - 1.$$

5.4 Nech $x \neq y$ sú reálne čísla také, že pre štyri po sebe idúce prirodzené čísla n je výraz $(x^n - y^n)/(x - y)$ celé číslo. Ukážte, že potom je tento výraz celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.

5.5 Sú dané kladné reálne čísla x, y, z, a, b, c také, že $x+y+z = 1$ a $0 < a < b < c$. Ukážte, že

$$(ax + by + cz)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \leqq \frac{(a+c)^2}{4ac}.$$

Šiesta séria

6.1 Pre ľubovoľné reálne čísla x, y, z má binárna operácia $\diamond$ vlastnosť $(x \diamond y) \diamond z = x + y + z$. Ukážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$a \diamond b = a + b.$$

Poznámka. Binárna operácia je predpis, ktorý dvojici reálnych čísel priraďuje reálne číslo.

6.2 Je daná postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$, kde $m \geqq 3$. Označme $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ukážte, že platí nerovnosť

$$\sum_{n=2}^{m} \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leqq 12 \sum_{n=1}^{m} {a_n}^2.$$

6.3 Zostrojme postupnosť reťazcov$\{R_i\}_{i=1}^{\infty}$ takú, že $R_1 = 1$ a číslo R_{n+1} vznikne z čísla R_n tak, že každé číslo i v R_n nahradíme skupinou čísel $123\ldots i$ a na koniec pridáme číslo $n+1$. Ďalšie členy postupnosti potom vyzerajú nasledovne: $R_2 = 12$, $R_3 = 1123$, $R_4 = 11121234$. Ukážte, že ak si pre $n \geqq 2$ napíšeme číslo R_n do riadku a pod neho to isté číslo R_n s obráteným poradím cifier, tak v každom stĺpci bude práve jedna jednotka.

6.4 Osi uhlov pri vrcholoch A, B, C trojuholníka ABC postupne pretínajú jemu opísanú kružnicu v bodoch K, L, M. Na úsečke AB zvoľme bod R. Pre body P a Q platí nasledovné: $RP \parallel AK$, $BP \perp BL$, $RQ \parallel BL$, $AQ \perp AK$. Ukážte, že priamky KP, LQ a MR prechádzajú jedným bodom.

6.5 Nájdite všetky kladné celé čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ také, že platí

$$\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

pričom $a_0 = 1$ a $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqq a_k^2(a_k - 1)$ pre $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Riešenia súťažných úloh KS SK MO

Prvá séria

1.1 Ukážeme, že najväčšie n, pri ktorom vieme nájsť múdreho človeka, je 8. Najprv ukážeme príklad odpovedí pre $n = 9$, kde nebudeme vedieť s istotou nájsť múdreho človeka. Pre väčšie n nám stačí zobrať prípad, keď hlupákov bude 9 (hlupákov je najviac n) a budú odpovedať ako v prípade uvedenom dole. Odpovede budeme značiť do riadku, pričom predpokladáme, že sused po pravici znamená sused vpravo v riadku a že posledný človek je ľavý sused prvého človeka. Ak by sme dostali pri $n = 9$ takéto odpovede: MMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMH (tým myslíme, že na prvého povedali, že je múdry, … na šiesteho, že je hlúpy, … na posledného, že je hlúpy), tak daní ľudia mohli sedieť napríklad takto (presvedčte sa):

HHHHHMMMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMH,
MMMMMHHHHHHMMMMMMHMMMMMHMMMMMH,
MMMMMHMMMMMHHHHHHMMMMMMHMMMMMH,
MMMMMHMMMMMHMMMMMHHHHHHMMMMMMH,
MMMMMHMMMMMHMMMMMHMMMMMHHHHHHM.

Avšak teraz pre každé miesto vieme nájsť aspoň jedno z týchto rozsadení, kde je niekto hlúpy a aspoň jedno, kde je niekto múdry. Teda nevieme s istotou povedať o nikom, či je múdry. Poďme sa teraz pozrieť na prípad, keď $n \leqq 8$, to znamená, že počet hlupákov je najviac 8. Všimnime si teraz odpovede ľudí zľava doprava. Vyberme skupinky také, ktoré odpovedali na svojho suseda MM…MH, takéto skupinky nazvime múdre skupinky. Ak by bol ten, čo povedal H, hlúpy, tak musí byť hlúpy aj jeho sused po ľavici (múdry by nepovedal na hlupáka, že je múdry), takisto aj jeho sused po ľavici, atď., až na začiatok skupinky. Takže múdra skupinka pozostáva v skutočnosti buď zo samých hlúpych, alebo ten, čo povedal H, je určite múdry. Na druhej strane, ak zoberieme k za sebou idúcich múdrych takých, že majú zľava aj sprava hlúpeho, tak títo budú tvoriť múdru skupinku takú veľkú, aký je ich počet. Ukážeme, že najdlhšia múdra skupinka (ak ich je viac, tak ľubovoľná z nich) nemôže pozostávať zo samých hlúpych, a tým pádom ukážeme, že jej najpravejší člen bude určite múdry. Predpokladajme teda, že najdlhšia múdra skupinka, označme jej dĺžku k, pozostáva zo samých hlúpych. Potom vo zvyšku kruhu ostalo nanajvýš $8 - k$ hlúpych, ktorí rozdelia múdrych na nanajvýš $8 - k + 1 = 9 - k$ častí. Teda podľa Dirichletovho princípu bude existovať skupinka múdrych o veľkosti aspoň $22/(9 - k)$. Keďže táto skupinka je tvorená iba múdrymi, ich odpovede budú tvoriť múdru skupinku. Ukážeme teraz, že veľkosť tejto múdrej skupinky je viac ako k.

$$\begin{aligned} k &< \frac{22}{9-k}, \\ k\cdot(9-k) &< 22, \\ k^2 - 9k + 22 &> 0. \end{aligned}$$

Keďže kvadratický trojčlen $k^2 - 9k + 22$ má záporný diskriminant, táto nerovnosť vždy platí. Pretože úpravy boli ekvivalentné (za predpokladu $k < 9$), platí aj prvá nerovnosť. Teda sporom sme ukázali, že pre $n \leqq 8$ sa najdlhšia múdra skupinka nemôže skladať iba z hlúpych, preto jej najpravejší člen je určite múdry.

1.2 Označme n počet ľudí a k počet klubov. Pozrime sa na náš problém trošku obrátene a zamyslime sa najprv nad tým, koľko najmenej ľudí potrebujeme, aby sme mohli vytvoriť k klubov.

Čo nám hovoria podmienky zo zadania? To, že žiadne tri kluby nemôžu mať spoločného člena, znamená, že žiaden človek nemôže byť v troch a viacerých kluboch, lebo vtedy by on porušil túto podmienku. Z toho vyplýva, že každý človek môže byť v nanajvýš dvoch kluboch.

Máme teda k klubov a zaujíma nás minimálny počet obyvateľov. Keďže každé dva kluby majú spoločného člena, tento človek je v oboch týchto kluboch a z toho a z predchádzajúceho vyplýva, že nemôže byť v žiadnom ďalšom klube.

Teda každá dvojica klubov musí mať priradeného aspoň jedného človeka (ktorý, ako bolo spomenuté, je len v tejto dvojici klubov), lebo ak by ho nemala, znamenalo by to, že tieto dva kluby nemajú spoločného člena. Dvojíc klubov je $\binom{n}{2} = k(k-1)/2$. Teda na vytvorenie k klubov určite potrebujeme aspoň toľko ľudí. Treba však ukázať, že tento daný počet obyvateľov KMS vieme požadovaným spôsobom rozdeliť. To urobíme tak, že každému prieniku priradíme človeka a on bude členom klubov, ktorých prienikom je on sám. (Každý klub bude mať potom $k-1$ členov).

Nás však ale zaujímalo, koľko utvoríme klubov, ak máme k dispozícii n obyvateľov. Vieme, že musí platiť nerovnosť

$$\frac{k(k-1)}{2} \leqq n,$$

kde k je hľadaný počet klubov (ak by platila opačná nerovnosť, znamenalo by to, že pre dané k by sme určite nemali dostatok občanov). Pokúsime sa teraz vyjadriť k pomocou n:

$$\begin{aligned} \frac{k(k-1)}{2} &\leqq n, \\ k^2 - k &\leqq 2n, \\ k^2 - k - 2n &\leqq 0, \\ k_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+8n}}{2}. \end{aligned}$$

Riešením je interval $\langle(1-\sqrt{1+8n})/2,(1+\sqrt{1+8n})/2\rangle$. Keďže nás zaujíma maximálne k, zameriame sa na väčší koreň. Ak je prirodzený, potom je riešením a máme minimálny počet občanov potrebný pre vytvorenie k klubov. Ak nie je celočíselný, potom je riešením $\lfloor(1+\sqrt{1+8n})/2\rfloor$ (dolná celá časť), lebo je to najväčšie prirodzené číslo zo spomínaného intervalu a počet klubov musí byť prirodzené číslo. Takýto počet klubov vieme vytvoriť tak, že vytvoríme kluby postupom uvedeným vyššie a ľudia, ktorí ostanú nezadaní, nebudú členmi žiadneho klubu. Títo členovia nám k ničomu nepomôžu, lebo keby sme chceli ďalší klub, nemali by sme na neho dosť ľudí, čo vyplýva z predchádzajúceho postupu. Teda maximálny počet klubov je

$$k=\left\lfloor\frac{1+\sqrt{1+8n}}{2}\right\rfloor.$$

1.3 Kľúčom k zdolaniu úlohy je rozloženie polynómu $n^{12}+64$ na súčin štyroch zátvoriek. Hneď vidíme, že

$$n^{12}+64=(n^4)^3+4^3=(n^4+4)(n^8-4n^4+16).$$

Prvá zátvorka sa ešte dá upraviť ako

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Zatiaľ teda máme

$$n^{12}+64=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)(n^8-4n^4+16).$$

Na prvý pohľad nevidíme, či sa tretia zátvorka dá rozložiť. Avšak na začiatku sme mohli postupovať aj inak.

$$n^{12}+64=n^{12}+16n^6+64-16n^6=(n^6+8)^2-(4n^3)^2=(n^6+4n^3+8)(n^6-4n^3+8).$$

Spolu teda dostávame

$$(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)(n^8-4n^4+16)=(n^6+4n^3+8)(n^6-4n^3+8).$$

Polynóm n^2+2n+2 delí ľavú stranu, musí teda deliť aj pravú. Mohol by teda deliť jeden z polynómov n^6+4n^3+8 a n^6-4n^3+8. Po vydelení skutočne zistíme, že $n^6-4n^3+8=(n^2+2n+2)(n^4-2n^3+2n^2-4n+4)$. Podobne aj $n^6+4n^3+8=$ $=(n^2-2n+2)(n^4+2n^3+2n^2+4n+4)$. Konečne teda

$$n^{12}+64=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)(n^4-2n^3+2n^2-4n+4)(n^4+2n^3+2n^2+4n+4).\qquad(1)$$

Je ľahké už si len uvedomiť, že pre každé celé $n>1$ platia nerovnosti

$$1<n^2-2n+2<n^2+2n+2<n^4-2n^3+2n^2-4n+4<n^4+2n^3+2n^2+4n+4.$$

V (1) teda máme číslo $n^{12} + 64$ napísané ako súčin štyroch rôznych celých čísel väčších ako 1, čo sme chceli.

1.4 Označme kružnicu s priemerom BN ako k_{BN}, kružnicu s priemerom CM ako k_{CM} a päty výšok z bodov B, C po rade P_B, P_C. Zjavne P_B leží na k_{BN} a P_C leží na k_{CM}. Z tých istých príčin body P_B, P_C ležia na Tálesovej kružnici k nad priemerom BC, teda pre mocnosť ortocentra H ku k platí

$$|HC| \cdot |HP_C| = |HB| \cdot |HP_B|. \tag{1}$$

Mocnosť bodu H ku kružnici k_{BN} je $|HB| \cdot |HP_B|$ a ku kružnici k_{CM} je $|HC| \cdot |HP_C|$. Podľa (1) sú tieto mocnosti rovnaké a teda bod H leží na chordále týchto dvoch kružníc, teda na priamke PQ.

Poznámka. Chordála dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú k týmto kružniciam rovnakú mocnosť. Chordálou je vždy priamka kolmá na spojnicu stredov; ak sa tieto kružnice pretínajú, prechádza oboma priesečníkmi.

1.5 Zaveďme v priestore štvorstena $ABCD$ takú pravouhlú súradnicovú sústavu, že bod A má v nej súradnice $(0, 0, 0)$, bod B $(1, 0, 0)$, bod C $(a, b, 0)$ a bod D (x, y, z) (uvedomme si, že takto ju zaviesť bez ujmy na všeobecnosti skutočne môžeme). Pre obsah S trojuholníkov ABC a ABD, respektíve ACD a BCD potom z vektorového súčinu dostávame

$$2S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \qquad \text{resp.} \qquad 2S = |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}|.$$

Po vyjadrení vektorových súčinov pomocou súradníc a umocnení na druhú máme rovnosti

$$b^2 = y^2 + z^2 \tag{1}$$

a

$$b^2z^2 + a^2z^2 + (ay - bx)^2 = b^2z^2 + (1 - a)^2z^2 + [(a - 1)y - b(x - 1)]^2. \tag{2}$$

Úpravou (2) dostávame

$$0 = z^2(1 - 2a) + (b - y)^2 + 2(ay - bx)(b - y). \tag{3}$$

Z (1) dosaďme do (3) $z^2 = b^2 - y^2$,

$$0 = (b^2 - y^2)(1 - 2a) + (b - y)^2 + 2(ay - bx)(b - y). \tag{4}$$

Keďže $z \neq 0$ (bod D neleží v rovine ABC), z (1) nutne $b \neq y$ a teda môžeme rovnosť (4) vydeliť nenulovým výrazom $b - y$. Úpravami postupne dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= (b + y)(1 - 2a) + b - y + 2(ay - bx), \\ 0 &= 2b - 2ab - 2bx, \\ 1 &= a + x. \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme rovnosť vydelili výrazom $2b$. Ten je nenulový, nakoľko bod C neleží na priamke AB. Teraz už máme (využívajúc poslednú rovnosť a (1))

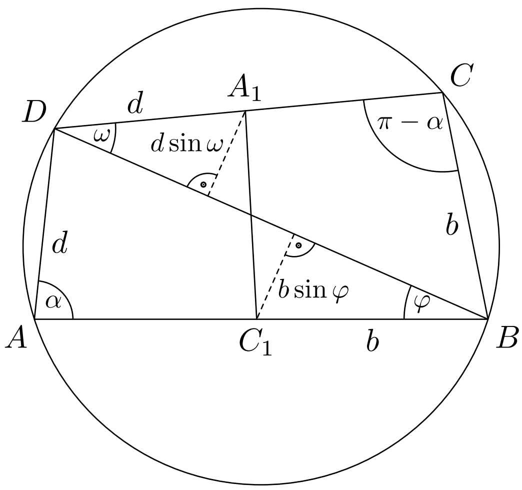
$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1-x)^2 + b^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = |BD|.$$

Zrejme podobne (napríklad zavedením úplne novej súradnicovej sústavy) dostaneme aj $|AB| = |CD|$ a $|BC| = |AD|$. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Úloha sa dala vyriešiť využitím kolmého priemetu hrany CD do roviny, ktorá je rovnobežná s CD a leží v nej AB. Následne sa potom dokáže, že stred CD sa premietne do stredu AB a teda $|AD| = |BC|$. Uvádzame analytické riešenie, nakoľko je možno celkom prekvapujúce, že na túto úlohu pomerne elegantne zaberie. A to najmä vďaka tomu, že obsahy trojuholníkov sa dajú pomocou súradníc pekne zrátať (vektorovým súčinom). Horšie sa obsahy počítajú s dĺžkami strán (tam vystupuje zložitý Herónov vzorec).

DRUHÁ SÉRIA

2.1 Kľúčovým v tejto úlohe bolo uvedomiť si jednu triviálnu, ale nie do očí bijúcu vec. Tou je, že ak sú body A_1, C_1 v rôznych polrovinách určených priamkou BD (a to sú), tak uhlopriečka BD prechádza stredom úsečky A_1C_1 práve vtedy, ak sú body A_1 a C_1 rovnako vzdialené od priamky BD (obr. 67). Označme $|BC| = |BC_1| = b$,



Obr. 67

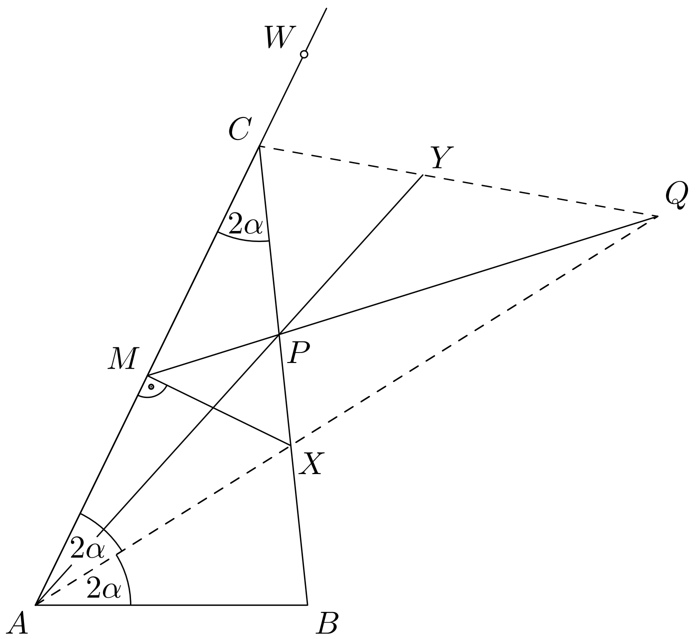
$|DA| = |DA_1| = d$, $|\sphericalangle ABD| = \varphi$, $|\sphericalangle CDB| = \omega$ a $|\sphericalangle BAD| = \alpha$. Vďaka tetivovosti štvoruholníka $ABCD$ platí $|\sphericalangle BCD| = 180° - \alpha$ a vzdialenosť bodu C_1 (resp. A_1) od priamky BD je $b\sin\varphi$ (resp. $d\sin\omega$) – a to bez ohľadu na to, či je uhol φ (resp. ω) ostrý alebo nie. Stačí nám teda dokázať rovnosť $b\sin\varphi = d\sin\omega$. Tú ale okamžite dostávame zo sínusových viet v trojuholníkoch ABD a CDB s využitím známeho vzťahu $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

$$\frac{d}{\sin\varphi} = \frac{|BD|}{\sin\alpha} = \frac{|BD|}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{b}{\sin\omega}, \quad \text{a teda} \quad d\sin\omega = b\sin\varphi.$$

Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Úloha sa dala vyriešiť aj bez použitia vzdialeností bodov A_1 a C_1 od priamky BD len pomocou sínusových viet. Takisto aj bez akýchkoľvek sínusových viet.

2.2 (Podľa *Františka Simančíka.*) Označme $\alpha = |\sphericalangle ACB|/2$. Ďalej označme W ľubovoľný bod na polpriamke opačnej k CA, bod X ako priesečník AQ a BC a bod Y ako priesečník CQ a AP (obr. 68). Bod Q je stred pripísanej kružnice k trojuholníku



Obr. 68

ABC k strane BC, musí preto ležať na osi uhlov BAC a WCB. Teda platí

$$|\sphericalangle CAQ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CAB| = 2\alpha,$$
$$|\sphericalangle BCQ| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCW| = \frac{180^\circ - |\sphericalangle ACB|}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Ďalej z trojuholníka AQC máme

$$|\sphericalangle CQA| = 180^\circ - |\sphericalangle ACQ| - |\sphericalangle CAQ| = 90^\circ - 3\alpha.$$

Zo sínusovej vety pre trojuholník CXQ vyplýva

$$\frac{|QX|}{|CX|} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Trojuholník AXC je rovnoramenný, teda $|AX| = |CX|$ a následne

$$\frac{|QX|}{|AX|} = \frac{|QX|}{|CX|} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha}.$$

Priamky AY, QM, CX sa pretínajú v jednom bode (P) a keďže sú priečkami v trojuholníku AQC, môžeme použiť Cèvovu vetu a dostávame

$$\frac{|MA|}{|CM|} \cdot \frac{|XQ|}{|AX|} \cdot \frac{|YC|}{|QY|} = 1 \quad \text{a teda} \quad \frac{|QY|}{|YC|} = \frac{|XQ|}{|AX|} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha},$$

pričom sme využili, že $|MA| = |CM|$. Ďalej zo sínusovej vety pre trojuholník AQC platí, že

$$\frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{\sin|\sphericalangle ACQ|}{\sin|\sphericalangle AQC|} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ - 3\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{|QY|}{|YC|},$$

teda AY je osou uhla CAQ. Preto $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PAX| = |\sphericalangle CAX|/2 = \alpha$. Potom platí

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle ACP| + |\sphericalangle CAP| = 3\alpha = |\sphericalangle PAX| + |\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle PAB|$$

a teda $|PB| = |AB|$. V trojuholníku ABC platí $6\alpha < 180^\circ$, takže $\alpha < 30^\circ$, teda všetky výrazy v menovateľoch zlomkov boli nenulové. Dokázali sme, že trojuholník ABP je rovnoramenný. Tým je úloha vyriešená.

2.3 Bez ujmy na všeobecnosti nech $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$. Trik je v tom, že nebudeme skúmať existenciu troch rovnakých rozdielov medzi všetkými možnými, ale len v podmnožine rozdielov typu $a_{i+1} - a_i$, $(1 \leqq i < 2n)$. Ďalej použijeme dôkaz sporom. Predpokladajme, že medzi rozdielmi typu $a_{i+1} - a_i$ sú najviac dva rovnaké. Potom súčet týchto rozdielov vieme zdola ohraničiť takto:

$$\begin{aligned}(a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) &\geqq \\ \geqq 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (n-1) + (n-1) + n&, \\ a_{2n} - a_1 \geqq n \cdot (n-1) + n&, \\ a_{2n} \geqq n^2 + a_1&.\end{aligned}$$

Keďže a_1 je prirodzené číslo, dostávame $a_{2n} \geqq n^2 + 1$, čo je spor so zadaním. Preto nejaké tri z týchto rozdielov musia byť rovnaké.

2.4 (Podľa *Vítězslava Kalu.*) Dokážeme nasledujúce (všeobecnejšie) tvrdenie: Nech pre $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \tag{1}$$

Potom platí nerovnosť

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geqq \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{2}$$

Nami zadané tvrdenie z tohto dostaneme špeciálnou voľbou $b_k = a_{k+1}$, $a_{n+1} = a_1$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Upravme nerovnosť (2).

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k - \frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} a_k - 2\sum\frac{a_kb_k}{a_k+b_k} \geqq \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \geqq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}.$$

Z rovnosti (1) vyplýva

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+b_k}{2}.$$

Nerovnosť (2) môžeme potom písať aj v tvare

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+b_k}{2} \geqq \sum_{k=1}^{n}\frac{2a_kb_k}{a_k+b_k}.$$

Táto nerovnosť je po členoch presne nerovnosť medzi aritmetickým a harmonickým priemerom pre čísla a_k a b_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Pre každé dve kladné čísla a, b totiž platí

$$\frac{a+b}{2} \geqq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = 2\frac{ab}{a+b}$$

a rovnosť nastáva iba pre $a = b$. Tým sme ukázali naše silnejšie tvrdenie. Ostáva nám už len konštatovať, že rovnosť v zadanej nerovnosti platí, iba ak sú všetky a_i rovnaké.

2.5 Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že n nie je tvaru $n = 3^k$. Inak povedané, že $n = 3^k\ell$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\ell \in \{2, 4, 5, 7, 8, 10\dots\}$ (ℓ nie je deliteľné tromi a nie je to jednotka). Takýto zápis je zrejme jednoznačný. Ukážeme, že potom $4^{3^k\ell} + 2^{3^k\ell} + 1 = 4^n + 2^n + 1$ je deliteľné číslom $4^{3^k} + 2^{3^k} + 1$. Pre $\ell \geqq 2$ je zrejme $4^{3^k\ell} + 2^{3^k\ell} + 1 > 4^{3^k} + 2^{3^k} + 1 > 1$ a tak by malo číslo $4^{3^k\ell} + 2^{3^k\ell} + 1 = 4^n + 2^n + 1$ nejakého netriviálneho deliteľa, čo by bol spor s tým, že by to malo byť prvočíslo.

Pre stručnejší zápis označme $a = 2^{3^k}$. Potrebujeme už len ukázať, že pre $a > 1$, $\ell \geqq 1$ (dovolili sme si pridať možnosť $\ell = 1$), $3 \nmid \ell$ platí

$$a^2 + a + 1 \mid a^{2\ell} + a^\ell + 1. \tag{1}$$

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou. Ale trochu netradičnou, lebo musíme vynechávať násobky trojky (pre $3 \mid \ell$ nemusí (1) platiť).

1° Overíme tvrdenie (1) pre $\ell = 1$ a $\ell = 2$. Pre $\ell = 1$ je to zrejmé a pre $\ell = 2$ stačí urobiť úpravu

$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 - a)\underline{(a^2 + 1 + a)}.$$

2° V druhom kroku sa prejaví netradičnosť. Budeme totiž dokazovať, že ak platí $T(\ell)$, potom platí $T(\ell{+}3)$, pričom $T(\ell)$ je tvrdenie (1). Pri pokuse využiť $T(\ell)$ pri rozpise $T(\ell + 3)$ nám to vyjde priamo:

$$\begin{aligned}a^{2(\ell+3)} + a^{\ell+3} + 1 &= a^6(a^{2\ell} + a^\ell + 1) + (-a^{\ell+6} - a^6 + a^{\ell+3} + 1) = \\ &= a^6(a^{2\ell} + a^\ell + 1) - (a^{\ell+3}(a^3 - 1) + a^6 - 1)) = \\ &= a^6(a^{2\ell} + a^\ell + 1) - (a^3 - 1)(a^{\ell+3} + a^3 + 1)) = \\ &= a^6\underline{(a^{2\ell} + a^\ell + 1)} - \underline{(a^2 + a + 1)}(a - 1)(a^{\ell+3} + a^3 + 1).\end{aligned}$$

Oba podčiarknuté výrazy sú (s využitím $T(\ell)$) deliteľné číslom $a^2 + a + 1$ a tak je týmto deliteľné aj $a^{2(\ell+3)} + a^{\ell+3} + 1$ ($a \in \mathbb{N}$), čo je práve tvrdenie $T(\ell)$.

Tým je tvrdenie dokázané.

Tretia séria

3.1 Nech q je kvocient geometrickej postupnosti, v ktorej a, b, c sú po sebe idúce členy. Potom $b = aq$, $c = aq^2$. Nech p je diferencia aritmetickej postupnosti, v ktorej b, c, d sú po sebe idúce členy. Potom $c = b + p$, $d = b + 2p$. Z týchto vzťahov dostávame

$$\begin{aligned}p &= c - b = aq^2 - aq,\\ d &= b + 2p = aq + 2(aq^2 - aq) = 2aq^2 - aq.\end{aligned}$$

Potom pre súčet všetkých štyroch členov postupností platí

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 4 \cdot 3^{2003},\\ a + aq + aq^2 + 2aq^2 - aq &= 4 \cdot 3^{2003},\\ a + 3aq^2 &= 4 \cdot 3^{2003},\\ a(1 + 3q^2) &= 4 \cdot 3^{2003}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Zrejme $a \neq 0$ (z (1)), z čoho vyplýva $q = b/a$. Keďže a, b sú celé čísla, q je racionálne číslo. Ak $q = 0$, tak postupne platia nasledovné vzťahy: $b = c = 0$, $p = 0$, $d = 0$, $a + b + c + d = a = 4 \cdot 3^{2003}$, čiže v tomto prípade a, b, c, d nadobúdajú hodnoty $a = 4 \cdot 3^{2003}$, $b = c = d = 0$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že tieto hodnoty spĺňajú zadanie, a teda sú riešením. Rozoberme teraz situáciu, keď $q \neq 0$. Nech $q = r/s$, kde r, s sú nesúdeliteľné celé čísla rôzne od nuly. Zo vzťahu (1) dostávame

$$\begin{aligned} a\left(1+\frac{3r^2}{s^2}\right) &= 4\cdot 3^{2003}, \\ a\left(\frac{s^2+3r^2}{s^2}\right) &= 4\cdot 3^{2003}, \\ a\left(s^2+3r^2\right) &= 4\cdot 3^{2003}s^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Keďže s a r sú celé čísla, výraz $s^2 + 3r^2$ nadobúda celočíselnú hodnotu. Môžu nastať dve možnosti:

a) Číslo 3 nedelí s^2. Potom ale 3 nedelí ani $s^2 + 3r^2$, čiže z platnosti (2) dostávame, že 3^{2003} delí a.

b) Číslo 3 delí s^2. Potom ale 3 delí s, čiže $s = 3t$, kde t je celé číslo. Zo vzťahu (2) dostávame

$$\begin{aligned} a(9t^2+3r^2) &= 4\cdot 3^{2003}\cdot 9t^2, \\ a(3t^2+r^2) &= 4\cdot 3^{2004}\cdot t^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Keďže s, r sú nesúdeliteľné a 3 delí s, 3 nedelí r ani r^2. Z toho vyplýva, že 3 nedelí $3t^2 + r^2$, čiže z platnosti (3) dostávame, že 3^{2004} delí a.

V oboch prípadoch platí, že 3^{2003} delí a, a teda $a = k \cdot 3^{2003}$, kde k je celé číslo. Vieme, že a je celé číslo rôzne od nuly. Pozrime sa na vzťah (1). Keďže $4 \cdot 3^{2003}$ je kladné celé číslo a výraz $1 + 3q^2$ je vždy väčší alebo rovný jednej, platí $0 < a \leqq 4 \cdot 3^{2003}$. Čiže k môže nadobudnúť hodnoty 1, 2, 3, alebo 4. Rozoberme tieto štyri možnosti.

Ak $k = 1$, potom $a = 3^{2003}$ a zo vzťahu (1) dostávame $q = \pm 1$. Pre $q = 1$ dostávame $b = c = d = 3^{2003}$. Pre $q = -1$ dostávame $b = -3^{2003}$, $c = 3^{2003}$, $d = 3^{2004}$. Ľahko sa môžeme presvedčiť, že obe možnosti spĺňajú zadanie, a teda sú riešením.

Ak $k = 2$, potom $a = 2 \cdot 3^{2003}$ a zo vzťahu (1) dostávame $q = \pm\sqrt{1/3}$, čo je v spore s racionálnosťou čísla q.

Ak $k = 3$, potom $a = 3^{2004}$ a zo vzťahu (1) dostávame $q = \pm 1/3$. Pre $q = 1/3$ dostávame $b = 3^{2003}$, $c = 3^{2002}$, $d = -3^{2002}$. Pre $q = -1/3$ dostávame $b = -3^{2003}$, $c = 3^{2002}$, $d = 5 \cdot 3^{2002}$. Opäť sa ľahko môžeme presvedčiť, že obe možnosti spĺňajú zadanie, a teda sú riešením.

Ak $k = 4$, potom $a = 4 \cdot 3^{2003}$ a zo vzťahu (1) dostávame $q = 0$. Túto možnosť sme už rozobrali.

Takže úloha má 5 rôznych riešení.

3.2 Tvrdenie dokážeme sporom. Nech platí $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$ a nech nejaké z x, y, z je nenulové. x, y, z sú racionálne, preto existujú $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{N}$

také, že $x = x_1/x_2$, $y = y_1/y_2$, $z = z_1/z_2$. Potom platí

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 + 9 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 - 9 \cdot \frac{x_1 y_1 z_1}{x_2 y_2 z_2} = 0.$$

Keďže x_2, y_2, z_2 sú nenulové, môžeme danú rovnosť prenásobiť výrazom $(x_2 y_2 z_2)^3$. Dostaneme

$$x_1^3 y_2^3 z_2^3 + 3y_1^3 x_2^3 z_2^3 + 9z_1^3 x_2^3 y_2^3 - 9x_1 y_1 z_1 x_2^2 y_2^2 z_2^2 = 0.$$

Ak teraz označíme $x_0 = x_1 y_2 z_2$, $y_0 = y_1 x_2 z_2$, $z_0 = z_1 x_2 y_2$, tak určite bude aspoň jedno z x_0, y_0, z_0 nenulové a platí $x_0^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 9x_0 y_0 z_0 = 0$. Teda stačí, ak ukážeme, že zadaná rovnica nemá nenulové riešenie pre celé čísla. Zadaná rovnica je homogénna, čo znamená, že ak má riešenie (a, b, c), potom má aj riešenie (ka, kb, kc), kde $k \in \mathbb{R}$. Ak má teda daná rovnica nenulové celočíselné riešenie, tak má aj také riešenie, pri ktorom najväčší spoločný deliteľ daných troch čísel je 1 (keďže dané riešenie je nenulové, tak také bude existovať). Označme také riešenie (x, y, z). Všetky výrazy okrem x^3 sú deliteľné troma. Teda musí platiť $3 \mid x^3$, čiže aj $3 \mid x$. Teda existuje také x', že platí $x = 3x'$. Potom po úprave platí

$$y^3 + 3z^3 + 9x'^3 - 9yzx' = 0.$$

To isté môžeme teraz aplikovať aj na y, dostaneme, že $3 \mid y$, teda existuje y' také, že $y = 3y'$. Potom po úprave platí

$$z^3 + 3x'^3 + 9y'^3 - 9zx'y' = 0.$$

To isté môžeme aplikovať aj pre z, dostaneme $3 \mid z$. Teda 3 by muselo deliť x, y, z. Avšak náš predpoklad bol, že najväčší spoločný deliteľ daných čísel je 1, čo je spor. Teda neexistujú také celé čísla x, y, z, že aspoň jedno z nich je nenulové a zároveň vyhovujú rovnici zo zadania. To ale znamená, ako sme vyššie ukázali, že neexistuje ani nenulové racionálne riešenie. Tým je úloha vyriešená.

3.3 Na začiatok si predstavme, že pre našu hru existuje vyhrávajúca stratégia, čiže sa nám podarilo odobrať všetky mince zo šachovnice. Položme si teraz otázku, koľko otočení mincí sme počas hry urobili. Ukážeme, že tento počet je rovný počtu vnútorných hrán na šachovnici (to sú hrany, ktoré nie sú na okraji šachovnice). Každá vnútorná hrana oddeľuje práve dve mince. Pri odobratí jednej z nich sa druhá otočí. Teda každému otočeniu vieme priradiť práve jednu vnútornú hranu šachovnice takú, že oddeľuje otočenú mincu a odobratú mincu, ktorá otočenie spôsobila. Každú hranu takto zrejme započítame najviac raz. Zároveň každú hranu započítame aspoň raz, lebo keď zoberieme prvú z dvoch mincí oddelených touto hranou, tak túto hranu započítame. Preto počet otočení je rovný počtu vnútorných hrán na šachovnici, čo je $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - (m+n)$.

Na šachovnici máme mn mincí, pričom $mn - 1$ je otočených znakom nahor a jedna znakom nadol. Mincu znakom nadol budeme označovať *zlá minca*. Pretože mincu je možné odobrať len keď je znakom nahor, musí platiť, že zlú mincu otočíme nepárny počet krát a zvyšné mince, ktorých počet je $mn-1$, otočíme párny počet krát. Celkový počet otočení preto musí byť nepárny. Porovnaním s predchádzajúcim vzťahom pre počet otočení dostávame nutnú podmienku existencie výhernej stratégie: $2mn-(m+n)$ je nepárne číslo a teda aj $m+n$ musí byť nepárne.

Stále sme ešte nedokázali, že taká stratégia existuje. V skutočnosti nie je veľmi zložité nájsť návod, pomocou ktorého pre šachovnice, kde $(m+n)=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, odstránime všetky mince zo šachovnice. Samozrejme, existuje viacero možností, uvedieme len jednu.

Bez ujmy na všeobecnosti otočme šachovnicu tak, aby počet stĺpcov bol párny (nech je to m), počet riadkov bol nepárny (n) a zlá minca nech je v ľavom hornom rohu. Prvým krokom bude odobrať mince z prvého riadku tak, že ako prvú zoberieme mincu susednú k zlej a potom každú druhú od nej (na „preskáčku"). Po tejto operácii budú všetky mince v prvom riadku, ktoré sme ešte nezobrali, otočené dvakrát (znakom nahor) a zlá minca iba raz (teda tiež znakom nahor), pričom medzi každými dvoma susednými bude jedno políčko prázdne. To nám umožní odobrať všetky zostávajúce mince v prvom riadku. Tým sme sa zbavili prvého riadku a všetky mince v druhom otočili práve raz (v prípade, že riadok bol len jeden, skončili sme). Zoberme teraz ľavý krajný stĺpec. Pôvodne v ňom bol nepárny počet mincí, ale my sme už jednu mincu z neho odobrali a jednu otočili znakom nadol (prvú v druhom riadku). Vzniknutá situácia je rovnaká ako pri prvom riadku na začiatku hry. Podľa rovnakého postupu môžeme odobrať všetky mince z tohto stĺpca a otočiť všetky mince vo vedľajšom. Tam sa minca v druhom riadku otočila druhý krát (znakom nahor) a všetky ostatné prvý krát (znakom nadol). Takto upravený stĺpec tiež vieme celý zobrať (začneme mincou znakom nahor, ktorá nám otočí znakom nahor mincu pod ňou a potom zoberieme tú, atď...). V susednom stĺpci (teda treťom od kraja) potom nastane rovnaká situácia ako v predošlom a tak sa ho zbavíme rovnakým spôsobom. Analogicky takto budeme môcť zobrať všetky ostávajúce stĺpce.

Tým sme dokázali, že pre šachovnice, kde $(m+n)=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ existuje vždy vyhrávajúca stratégia.

3.4 Idea riešenia je jasná: niekoľkokrát využijeme predpoklad, ktorý nám zadanie ponúka, vhodnou voľbou a a b. Ľahko sa presvedčíme, že čísla tvaru p^k, kde k je prirodzené, sú riešením. Ďalej nech n obsahuje v kanonickom rozklade aspoň dve prvočísla, teda

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_n.$$

Zvoľme $a = p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1$ (zrejme takto zvolené a, b sú nesúdeliteľné). Číslo $a+b-1$ je deliteľom n, teda sa dá písať v tvare

$$a+b-1 = p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} + p_1 - 1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \tag{1}$$

kde $\beta_i \leqq \alpha_i$ pre $i=1,2,\ldots,k$. Keďže $p_i > p_1 > p_1-1 > 0$ (pre $i=2,3,\ldots,k$), platí $(p_i, p_1-1)=1$. Takže p_i nedelí ľavú stranu (1) pre žiadne $i=2,3,\ldots,k$, preto p_i nedelí ani pravú stranu a $\beta_i=0$ pre všetky $i=2,3,\ldots,k$. Teda $p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1} - p_1 + 1$ a

$$n = p^\alpha (p^\beta - p + 1), \quad \text{kde } p \text{ je prvočíslo a} \quad 2 \leqq \beta \leqq \alpha. \tag{2}$$

Zvoľme teraz $a = p^\beta$, $b = p^\beta - p + 1$. Potom $2p^\beta - p \mid p^\alpha(p^\beta - p + 1)$, preto $2p^{\beta-1} - 1 \mid$ $\mid p^\beta - p + 1$, keďže $(2p^{\beta-1} - 1, p) = 1$. Teda pre nejaké $A \in \mathbb{N}$ platí

$$p^\beta - p + 1 = A \cdot (2p^{\beta-1} - 1). \tag{3}$$

Ak by bolo $A \geqq p$, tak $p^\beta - p + 1 = Ap^{\beta-1} + A(p^{\beta-1} - 1) \geqq p \cdot p^{\beta-1} \geqq p^\beta$, čo je spor. Preto $A \leqq p - 1$. Z (3) máme

$$A + 1 = 2Ap^{\beta-1} - p^\beta + p,$$

teda $p \mid A + 1$ (kvôli (2)), preto $p \leqq A + 1$. Spolu s predošlým ($A \leqq p - 1$) to dáva $A = p - 1$, po dosadení do (3) úpravou dostaneme $2p^{\beta-1} = p^\beta$, z toho $p = 2$. Preto

$$n = 2^\alpha(2^\beta - 1).$$

Zvoľme napokon $a = 4$ (môžeme, lebo $\alpha \geqq 2$ z (2)), $b = 2^\beta - 1$. Potom $2^\beta + 2 \mid 2^\alpha(2^\beta -$ $- 1)$, teda $2^{\beta-1} + 1 \mid 2^\beta - 1$. Keďže $2^{\beta-1} + 1 > 2^{\beta-1} = (2^\beta)/2 > (2^\beta - 1)/2$, musí platiť $2^{\beta-1} + 1 = 2^\beta - 1$. Z toho úpravou a porovnaním parity strán dostaneme $\beta = 2$, takže $n = 3 \cdot 2^\alpha$.

Ak by bolo $\alpha \geqq 3$, tak voľbou $a = 3$, $b = 2^3 = 8$ získame, že $3 + 8 - 1 = 10 \mid n$, ale $5 \nmid n$, čo je spor. Teda jediným párnym číslom prichádzajúcim do úvahy je $n = 12$, o ktorom ľahko overíme, že vyhovuje.

3.5 Označme (1) podmienku rovnosti zo zadania ($a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$) a dve nerovnosti, ktoré by sme radi dokázali ($0 \leqq ab + bc + ac - abc \leqq 2$), označme (2). V celom riešení budeme predpokladať, že $a, b, c \geqq 0$.

Najprv si všimnime, že zámenou a, b, c medzi sebou sa (1) ani (2) nezmenia, teda môžeme predpokladať, že $a \geqq b \geqq c$. Nie je ťažké sa presvedčiť o tom, že musí byť $c \leqq 1$, lebo v opačnom prípade by bolo $a \geqq b \geqq c > 1$ a následne $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$, čo je v spore s (1). Teraz už ľavú nerovnosť v (2) ukážeme jednou úpravou:

$$ab + bc + ca \geqq ab \geqq abc.$$

S pravou nerovnosťou je to zaujímavejšie. Prepíšme premenné a a b takto:

$$a = u + v, \quad b = u - v, \quad u, v \geqq 0,$$

a dosaďme to jednak do (1) a aj do pravej nerovnosti v (2). Po úprave dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 2u^2 + z^2 + u^2 z + (2 - z)v^2 = 4, \tag{3}$$
$$ab + bc + ac - abc = (1 - z)(u^2 - v^2) + 2uz. \tag{4}$$

Našou snahou je ukázať, že výraz (4) je najviac 2. Snažíme sa zistiť, kedy je pravá strana v rovnosti (4) najväčšia pri splnení podmienky (3). Pozrime sa na v. Ak ho v (3) zmenšíme, musí sa (aby platila rovnosť) zväčšiť u, lebo $2 - z > 0$. To nám ale v (4) spôsobí zväčšenie, lebo sa zväčší $(u^2 - v^2)$ aj $2u$ a aspoň jedno z čísel z, $1-z$ je nenulové $(z, 1-z \geqq 0)$. Preto najväčšiu hodnotu v (4) dostaneme pre najmenšie možné v, teda pre $v = 0$. Inak povedané, $a = b = u \geqq 0$.

Z podmienky (3) tak dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + abc = 2u^2 + z^2 + u^2 z &= 4, \\ u^2(2+z) &= (2-z)(2+z), \qquad (2+z) > 0, \\ z &= (2-u^2). \end{aligned}$$

Tento výsledok dosadíme do (4) a upravujeme

$$\begin{aligned} ab + bc + ac - abc = (1-z)u^2 + 2uz &\leqq 2, \qquad (5) \\ \big(1 - (2-u^2)\big)\, u^2 + 2u(2-u^2) &\leqq 2, \\ u^4 - 2u^3 - u^2 + 4u - 2 &\leqq 2, \\ (u-1)^2(u^2-2) &\leqq 0. \end{aligned}$$

Ostáva presvedčiť sa, že $u^2 = a^2 = b^2 \leqq 2$. Keby to ale neplatilo, tak $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geqq a^2 + b^2 > 2 + 2 = 4$, čo by bolo v spore s (1). Takže nerovnosť (5) skutočne platí a úloha je vyriešená.

Štvrtá séria

4.1 Po chvíli hrania sa s delfínom zistíme, že sa nám nedarí prejsť s delfínom celú šachovnicu. Sú dve možnosti, buď sme zle skúšali, alebo sa s delfínom naozaj šachovnica prejsť nedá. Prvá možnosť je, že budeme skúšať a skúšať, pokiaľ nás to neprestane baviť. Nakoniec pripusťme, že šachovnica sa obehať nedá. Ale ako to dokázať?

Budeme dokazovať sporom. Predpokladajme, že delfín obehal celú šachovnicu. Kde dostať spor? Delfín nie je figúrka ako napríklad strelec, ktorý pri svojom pohybe nemení farbu políčok, na ktorých stojí, ani ako pešiak, ktorý ide iba dopredu (či už rovno, alebo šikmo). Všimnime si, že pokiaľ očíslujeme riadky aj stĺpce postupne číslami $1, 2, \ldots, 8$ začínajúc z ľavého dolného rohu, tak zistíme, že delfín pri každom svojom kroku buď zvýši číslo riadku alebo stĺpca, na ktorom stojí, o 1, alebo zníži číslo riadku aj stĺpca o 1.

Skúsme si všimnúť v pohybe delfína nejaké zákonitosti (napríklad u pešiaka je takouto zákonitosťou, že v každom kroku sa zvýši číslo riadku o 1, u strelca, že súčet zmien riadku a stĺpca je vždy párne číslo a naopak u jazdca je to vždy nepárne číslo) a s ňou sa pokúsiť dokázať, že neprejdeme šachovnicu nejakých rozmerov. Teraz prichádza najťažší a najdôležitejší nápad celého dôkazu – nájsť takúto zákonitosť.

Ak vezmeme súčet riadku a stĺpca, tak táto veličina sa v každom kroku zväčší o jedna, alebo zmenší o dva. To ale znamená, že v každom kroku sa zvyšok po delení troma súčtu riadku a stĺpca zväčší o 1. V tomto okamihu sme už schopní dokončiť príklad.

Na začiatku stojí delfín na políčku, ktorého súčet riadku a stĺpca je 2. Po 63 ťahoch prešiel celú šachovnicu (to je náš predpoklad). Keďže sa zvyšok súčtu riadku a stĺpca po delení troma mení pravidelne, tak v týchto 63 krokoch budeme stáť 21 krát na políčku zo zvyškom 0, 1 a 2 (začiatočné políčko už nepočítame). Keď ale spočítame políčka, ktorých súčet riadku a stĺpca dáva zvyšok 2 po delení troma, tak dôjdeme k číslu 20 (okrem začiatočného políčka) a aj k hľadanému sporu.

4.2 (Podľa *Vítězslava Kalu.*) Hľadajme členy našej neklesajúcej postupnosti. Keby platilo $a_0 > 0$, tak $a_n > 0$ pre všetky nezáporné celé čísla n. Preto číslo 0 sa nedá napísať v požadovanom tvare. A to je spor s tým, že sa to dá a práve raz. Teda nutne $a_0 = 0$. Označme n_ℓ najmenšie číslo, ktoré sa nedá vyjadriť ako $a_i + 2a_j + 4a_k$ pre $i, j, k \in \{0, 1, \dots, \ell\}$. Keby platilo $a_{\ell+1} < n_\ell$, tak by to znamenalo, že $a_{\ell+1}$ sa dá vyjadriť nejakým požadovaným spôsobom a tiež ako $a_{\ell+1} = 1 \cdot a_{\ell+1} + 2 \cdot a_0 + 4 \cdot a_0$. Dostávame spor s jednoznačnosťou. Keby platilo $a_{\ell+1} > n_\ell$, tak by bolo $a_n > n_\ell$ pre všetky $n \geqq \ell + 1$. Preto ak $n_\ell = a_i + 2 \cdot a_j + 4 \cdot a_k$, potom nutne $i, j, k \leqq \ell$, teda máme spor s tým, že n_ℓ sa takto vyjadriť nedá. Čiže jediná prípustná možnosť je $a_{\ell+1} = n_\ell$. To pre nás znamená aj to, že keď naša postupnosť existuje, tak je len jedna, lebo jej členy sú jednoznačne určené. Teda stačí nájsť tú jedinú postupnosť, alebo ukázať, že taká neexistuje.

Definujme postupnosť (a_n) nasledovným spôsobom: $a_n = (x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_8$, pričom $(x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2 = n$ je binárny zápis čísla n. Čiže n-tý člen je číslo, ktoré dostaneme tak, že číslo n zapíšeme do dvojkovej sústavy a prečítame ho ako keby bolo napísané v osmičkovej sústave a toto číslo prepíšeme naspäť do desiatkovej sústavy. Napr. ak $n = 5$: $(5)_{10} = (101)_2$, tento zápis prečítame v osmičkovej: $(101)_8 = 65 = a_5$.

Teraz už máme postupnosť a o nej ukážeme, že:

a) každé nezáporné celé číslo sa dá vyjadriť pomocou nej;

b) žiadne číslo sa nedá vyjadriť viac ako jedným spôsobom.

a) Majme číslo $(y_m \dots y_0)_8$, $y_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Číslo y_i sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare $y_i = k_i + 2\ell_i + 4q_i$, kde $k_i, \ell_i, q_i \in \{0, 1\}$. Potom ale máme, že $(y_m \dots y_0)_8 = (k_m \dots k_0)_8 + 2 \cdot (\ell_m \dots \ell_0)_8 + 4 \cdot (q_m \dots q_0)_8 = K + 2L + 4Q$. Čísla K, L, Q vo svojom osmičkovom zápise obsahujú iba cifry 0, 1, preto pre nejaké i, j, k bude $a_i = K$, $a_j = L$ a $a_k = Q$. Teda každé nezáporné celé číslo vieme napísať pomocou tejto postupnosti v požadovanom tvare.

b) Z časti a) vyplýva aj to, že čísla K, L, Q sú určené jednoznačne, teda a_i, a_j, a_k sú tiež určené jednoznačne.

Teda naša postupnosť vyhovuje zadaniu, a už sme ukázali, že je jediná, preto nám neostáva nič iné, len určiť hodnotu a_{2004}. $2004 = (11111010100)_2$, preto $a_{2004} = (11111010100)_8 = 1227100224$.

4.3 Najprv trochu podiskutujeme o polohe bodov A_1, B_1, C_1. Ak aspoň dva z nich sú totožné s ortocentrom H, tak sme hotoví. Ak je jeden z nich totožný s H, stačí ukázať, že body A_1, B_1, C_1, H nie sú kolineárne (tento dôkaz ponecháme čitateľovi). Môžeme teda predpokladať, že všetky body A_1, B_1, C_1 sú rôzne od H. Ak by všetky tri boli na úseku zodpovedajúcej výšky medzi vrcholom a bodom H, tak súčet obsahov trojuholníkov zo zadania by bol väčší ako obsah trojuholníka ABC. Podobne, ak by všetky tri body A_1, B_1, C_1 ležali medzi pätou výšky a bodom H, tak súčet obsahov daných trojuholníkov by bol primalý. Preto stačí rozobrať dva prípady. Ukážeme tu jeden z nich (druhý by sa spravil analogicky). Nech $A_1 \in AH$, $B_1 \in B'H$, $C_1 \in C'H$. Skúsme nejako využiť rovnosť obsahov zo zadania. Trojnásobným použitím známeho vzťahu pre obsah trojuholníka $S = av_a/2$ dostaneme

$$|AB| \cdot |C'C_1| + |BC| \cdot |A'A_1| + |CA| \cdot |B'B_1| = 2S_{ABC}.$$

Keď bod H pospájame s vrcholmi trojuholníka ABC, dostaneme tri trojuholníky, pričom ich obsahy v súčte opäť dajú obsah trojuholníka ABC, takže

$$|AB| \cdot |C'H| + |BC| \cdot |A'H| + |CA| \cdot |B'H| = 2S_{ABC}.$$

Porovnaním dvoch predchádzajúcich vzťahov a drobnou úpravou dostaneme

$$|HA_1| \cdot |BC| = |HB_1| \cdot |AC| + |HC_1| \cdot |AB|. \tag{1}$$

Čo s tým? Pozrime sa, čo chceme dokázať. Ako výhodne popísať, že štyri body ležia na kružnici? Možností je veľa. Opíšeme trom z týchto bodov kružnicu a ukážeme, že na nej leží štvrtý bod pomocou obvodových uhlov (tak to urobil *Vítězslav Kala*). Alebo využijeme, že súčet protiľahlých uhlov v tetivovom štvoruholníku je 180° (riešenie *Františka Simančíka*). Či opíšeme nejakým dvom rôznym trojiciam z nich kružnice a dokážeme, že majú rovnaký polomer (syntetické riešenie pomocou goniometrie od *Stanislavy Sojákovej*). Prípadne pozrieme, čo už máme (vzťah (1)) a všimneme si podobnosť s Ptolemaiovou vetou (*Tomáš Váňa*, *Ondrej Budáč*). Na toto riešenie sa pozrieme bližšie. Ptolemaiova veta hovorí, že body H, B_1, A_1, C_1 ležia na jednej kružnici (v tomto poradí) práve vtedy, keď platí

$$|HA_1| \cdot |B_1C_1| = |HB_1| \cdot |A_1C_1| + |HC_1| \cdot |A_1B_1|. \tag{2}$$

Opäť to porovnáme s (1). Nechýba veľa, a bolo by to to isté. Úplne by stačilo, aby trojuholníky ABC a $A_1B_1C_1$ boli podobné. Sú, alebo nie? Ľahko si všimneme, že tieto podobnosti sú ekvivalentné s tým, že body H, B_1, A_1, C_1 ležia na kružnici, lebo $|\sphericalangle C'HA| = 90° - |\sphericalangle C'AH| = 90° - (90° - |\sphericalangle ABA'|) = \beta$, analogicky $|\sphericalangle AHB'| = \gamma$. Čo je to podobnosť? Nejaké pomery. Tak ich spravme. (1) je ekvivalentné s

$$|HA_1| = |HB_1| \cdot \frac{|AC|}{|BC|} + |HC_1| \cdot \frac{|AB|}{|BC|} = |HB_1| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + |HC_1| \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Na vyjadrenie pomerov na pravej strane sme použili sínusovú vetu pre trojuholník ABC. To isté by sme mohli spraviť aj s (2). Problémom je, že sme ešte nedokázali, že uhly v trojuholníku $A_1B_1C_1$ majú veľkosti α, β, γ. Nemohli by sme dokresliť do obrázka niečo nové, aby sme získali trojuholník, v ktorom by uhly mali tieto veľkosti? Zrejme kružnica opísaná trojuholníku HB_1C_1 pretína úsečku AH v nejakom bode, označme ho X. Všimnime si trojuholník B_1C_1X. Tento má všetky dobré vlastnosti, ktoré chceme. Z Ptolemaiovej vety (analogicky ako pri (2)) máme

$$|HX| \cdot |B_1C_1| = |HB_1| \cdot |XC_1| + |HC_1| \cdot |XB_1|. \tag{4}$$

Teraz však už vieme pomery strán v tomto trojuholníku previesť na pomery sínusov známych uhlov, (4) je ekvivalentné s

$$|HX| = |HB_1| \cdot \frac{|XC_1|}{|B_1C_1|} + |HC_1| \cdot \frac{|XB_1|}{|B_1C_1|} = |HB_1| \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + |HC_1| \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

Porovnáme (3) a (5) a vidíme, že $|HX| = |HA_1|$. Z toho už nutne vyplýva, že $X \equiv A_1$ a sme hotoví.

V prípade, že chceme úlohu riešiť analyticky, potrebujeme vhodne popísať, že štyri body ležia na kružnici. To nie je ľahké, keďže kružnica je krivka druhého stupňa a dostávame nelineárne rovnice. Oveľa ľahšie sa pracuje s priamkami. Ako previesť kružnicu na priamku? Predsa kružnicovou inverziou so stredom H, ako to spravil *Martin Adamčík*.

Iné riešenie. Krásne a elegantné riešenie našla *Hana Budáčová*. Čo vieme o obsahoch trojuholníkov? Napríklad toto: Nech p je priamka rovnobežná s priamkou AB a nech bod C leží na priamke p. Potom obsah trojuholníka ABC nezávisí od polohy bodu C. Veďme bodom C_1 rovnobežku p so stranou AB a bodom A_1 rovnobežku q so stranou BC. Označme D prienik priamok p, q. Kde môže ležať bod B_1? Z voľby p, q vieme, že $S_{ABC_1} = S_{ABD}$ a $S_{BCA_1} = S_{BCD}$. Zo zadania máme $S_{ABC_1} + S_{BCA_1} + S_{ACB_1} = S_{ABC}$. Aby platil tento vzťah, musí bod D ležať vnútri trojuholníka ABC. Preto $S_{ABD} + S_{BCD} + S_{ACD} = S_{ABC}$. Z tohto všetkého vyplýva, že $S_{ACB_1} = S_{ACD}$, teda bod B_1 leží na priamke r prechádzajúcej bodom D a rovnobežnej s AC. A keďže priamky p, q, r sú kolmé na zodpovedajúce výšky, ležia body A_1, B_1, C_1 na Tálesovej kružnici nad priemerom HD.

Túto ideu využil aj *Jaroslav Knebl*, ktorý tvrdenie zovšeobecnil pre ľubovoľný bod H vnútri trojuholníka ABC a body ležiace na kolmiciach na strany trojuholníka. Analogické tvrdenie platí aj pre štvorsten v trojrozmernom priestore.

4.4 (Podľa *Tomáša Váňu*.) Označme $\vec{u}_{ij}$ vektor vedúci z bunky s číslom i do bunky s číslom j (predpokladáme $i > j$, keďže ďalej budeme uvažovať len o takýchto vektoroch). Chceme dokázať, že súčet $S = \sum_{i<j} \vec{u}_{ij}$ je rovný 0.

Zrejme pre $i < j$ platí $\vec{u}_{in^2} = \vec{u}_{ij} + \vec{u}_{jn^2}$, takže $S = \sum_{i<j}(\vec{u}_{in^2} - \vec{u}_{jn^2})$. V takomto súčte sa vyskytujú len vektory $\vec{u}_{kn^2}$ pre $k = 1, 2, \dots, n^2$ s nejakými koeficientmi. Skúsme tieto koeficienty vypočítať. Všimnime si bunku s číslom k. Táto bunka je koncovou bunkou pre vektory $\vec{u}_{1k}, \vec{u}_{2k}, \dots, \vec{u}_{(k-1)k}$, teda so znamienkom mínus je vektor $\vec{u}_{kn^2}$ zarátaný $(k-1)$-krát. Začiatočnou bunkou je bunka s číslom k pre vektory $\vec{u}_{k(k+1)}, \vec{u}_{k(k+2)}, \dots, \vec{u}_{kn^2}$, teda so znamienkom plus je vektor $\vec{u}_{kn^2}$ zarátaný (n^2-k)-krát. Preto koeficient pri tomto vektore je

$$-(k-1) + (n^2 - k) = (n^2 - 2k + 1). \tag{1}$$

Preto $S = \sum_{k=1}^{n^2}(n^2 - 2k + 1)\vec{u}_{kn^2}$.

Ukážeme, že prvá zložka S (v smere riadkov) je nulová. Vezmime našu tabuľku, v nejakej bunke je n^2. Zrejme vektory medzi bunkami stĺpca, v ktorom je n^2, dávajú nulový súčet v prvej zložke. Prínosy ostatných vektorov sčítame po stĺpcoch. Nech teda nejaký stĺpec obsahuje čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. Štvorec je magický, teda $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (1 + 2 + \dots + n^2)/n = (n^3 + n)/2$. Pre prínos vektorov medzi bunkami s číslami $x_1, x_2, \dots, x_n$ kvôli (1) platí (d je vzdialenosť medzi stĺpcami s n^2 a x_i)

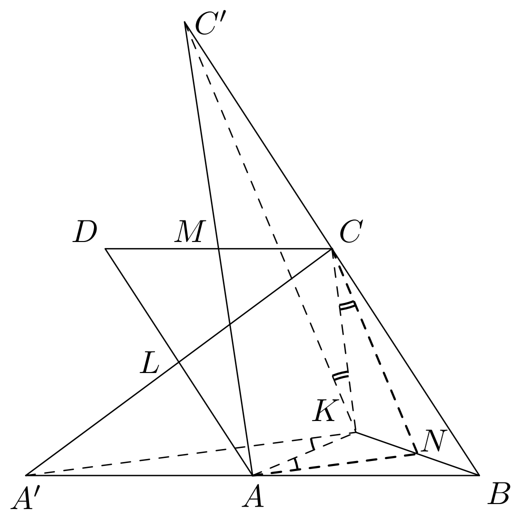
$$P(d) = d\sum_{i=1}^{n}(n^2 - 2x_i + 1) = d\left(\sum_{i=1}^{n}(n^2 + 1) + 2\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = d[n(n^2 + 1) - (n^3 + n)] = 0.$$

Toto platí pre všetky stĺpce, takže aj súčet týchto prínosov je nulový a preto prvá zložka S je nulová. Analogicky sa dá ukázať, že aj druhá zložka je nulová a teda naozaj $S = \vec{0}$.

Iné riešenie. (Podľa *Františka Simančíka.*) Označme $x_1, x_2, \dots, x_n$ čísla v nejakom stĺpci, ich súčet je $S = (1 + 2 + \dots + n^2)/n = (n^3 + n)/2$. Do bunky s číslom x_i vchádza $x_i - 1$ šípok (zo všetkých menších čísel) a vychádza z nej $n^2 - x_i$ šípok. Teda do celého stĺpca vchádza spolu $\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) = S - n$ šípok a vychádza z neho $\sum_{i=1}^{n}(n^2 - x_i) = n^3 - S = S - n$ šípok.

Vytvorme takýto orientovaný graf: Vrcholy reprezentujú jednotlivé stĺpce a medzi dvoma vrcholmi je pre každý vektor práve jedna orientovaná hrana. Niektoré hrany môžu byť viacnásobné či tvoriť slučky (t. j. začínať a končiť v tom istom vrchole), to však neprekáža. Na základe toho, čo sme už povedali, vieme, že z každého vrcholu vychádza rovnaký počet hrán, ako do neho vchádza. Graf sa môže skladať z niekoľkých komponentov (nesúvisiacich častí), vezmime nejaký z nich. V tejto časti existuje uzavretý Eulerov ťah (teda vieme ju nakresliť jedným ťahom tak, že po každej hrane prechádzame práve raz a skončíme vo vrchole, v ktorom sme začali). Toto sa dá dokázať indukciou podľa počtu hrán; využívame, že v žiadnom vrchole sa nemôžeme zaseknúť. Keďže po prejdení všetkých hrán skončíme v tom vrchole (stĺpci), v ktorom sme začali, je súčet riadkovej zložky vektorov medzi stĺpcami v tejto časti grafu nulový. Toto platí pre všetky časti grafu, teda súčet riadkových zložiek vektorov v tabuľke je 0, keďže každému vektoru z tabuľky prislúcha práve jedna hrana. Analogicky ukážeme, že súčet stĺpcovej zložky vektorov je 0.

4.5 (Podľa *Tomáša Váňu.*) Dokreslime niečo do obrázka. Máme tam stredy strán. Mohla by nám pri tejto príležitosti prísť na um stredová súmernosť podľa týchto stredov. Nech sú teda body A', C' obrazmi bodov C a A podľa stredovej súmernosti so stredmi v bodoch L, resp. M (obr. 69). Pretože $AD \parallel BC$, $|A'L| = 2|A'C|$, $2|AL| = |AD| = |BC|$, je trojuholník $A'AL$ podobný s trojuholníkom $A'BC$, teda A je stredom úsečky $A'B$. Podobne vieme ukázať, že C je stredom úsečky $C'B$. Stredné priečky



Obr. 69

AN a NC v trojuholníkoch $A'BK$ a $C'BK$ sú rovnobežné s príslušnými stranami, matematickejšie zapísané $AN \parallel A'K$ a $CN \parallel C'K$. Dvojice uhlov na obrázku sú teda nič iné ako dvojice rovnakých striedavých uhlov. Stačí nám už len ukázať, že tieto uhly sú rovnaké, t. j., že $|\sphericalangle C'KC| = |\sphericalangle A'KA|$.

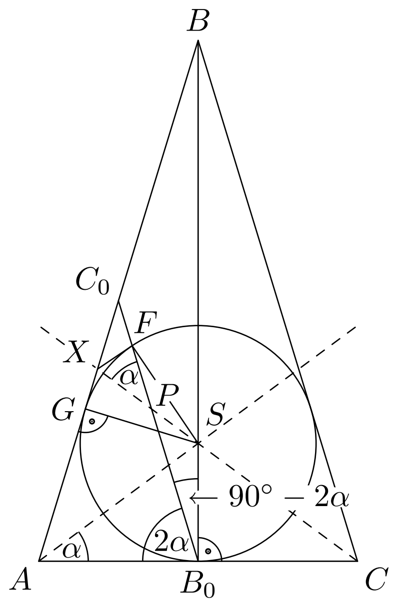
S pomocou zadania vieme, že $|LC| = |KL| = |A'L|$, preto niet inej možnosti ako tej, že bod L je stredom Tálesovej kružnice nad primerom $A'C$. Rovnakú situáciu prežíva bod M. Záverom môžeme teda písať

$$\underline{|\sphericalangle CKC'|} + |\sphericalangle C'KA'| = |\sphericalangle CKA'| = 90^\circ = |\sphericalangle C'KA| = |\sphericalangle C'KA'| + \underline{|\sphericalangle A'KA|}.$$

Piata séria

5.1 Označme body, ako na obr. 70. Existuje viacero rôznych spôsobov, ako dané tvrdenie dokázať. V našom prípade úlohu pretransformujeme na zisťovanie, či je úsečka FX dotyčnicou ku kružnici k vpísanej trojuholníku ABC. Všimnime si trojuholník SGX a trojuholník SFX, tie majú spoločnú jednu stranu SX a pretože SG aj SF sú polomery kružnice k, platí $|SG| = |SF|$. Pritom o strane GX vieme, že je dotyčnicou ku k. Ak sa nám podarí dokázať podobnosť (teda aj zhodnosť) týchto trojuholníkov, bude platiť $|\sphericalangle SFX| = |\sphericalangle SGX| = 90^\circ$, teda $|SF|$ skutočne bude dotyčnicou ku k. Pozrime sa na veľkosti uhlov GSX a FSX, ktoré vieme pomerne jednoducho vyjadriť. Pre jednoduchosť označme $\alpha = |\sphericalangle SAB_0|$.

Pretože B_0C_0 je strednou priečkou v trojuholníku ABC, platí $|\sphericalangle AB_0C_0| = 2\alpha$. V rovnoramennom trojuholníku ABC je os uhla pri vrchole B totožná s výškou, teda



Obr. 70

$|\sphericalangle SB_0C_0| = 90^\circ - 2\alpha$. V trojuholníku FSB_0 sú obe ramená polomermi kružnice k, takže $|\sphericalangle FB_0S| = |\sphericalangle B_0FS|$. Uhol FPS je susedný k uhlu B_0PS a ten je vrcholový k uhlu SCB. Veľkosť uhla SCB je α, lebo CS je osou uhla ACB a ten má veľkosť 2α. Preto $|\sphericalangle FPS| = 180^\circ - \alpha$. Konečne $|\sphericalangle FSX| = 180^\circ - |\sphericalangle PFS| - |\sphericalangle FPS| = 180^\circ - (90^\circ - 2\alpha + 180^\circ - \alpha) = 3\alpha - 90^\circ$.

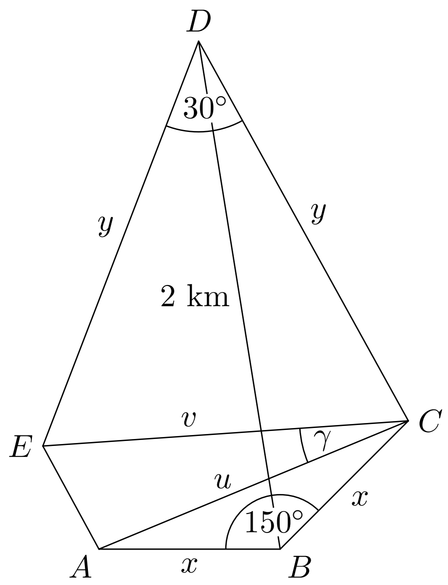
Zjavne trojuholníky AGS, AB_0S a CB_0S sú zhodné, takže $|\sphericalangle GSA| = |\sphericalangle B_0SA| = |\sphericalangle B_0SC| = 90^\circ - \alpha$. Následne $|\sphericalangle GSX|$ je doplnkom týchto troch do priameho uhla, preto $|\sphericalangle GSX| = 180^\circ - 3(90^\circ - \alpha) = 3\alpha - 90^\circ$. Platí $|\sphericalangle GSX| = |\sphericalangle FSX|$, teda X je skutočne priesečníkom všetkých troch spomínaných úsečiek.

Poznámka. Pri $\alpha < 30^\circ$ je poradie bodov C_0 a X na strane AB opačné ako na obr. 70. V tomto prípade treba použiť (trochu upravený) analogický postup.

5.2 Označme $|AB| = x$, $|CD| = y$, $|AC| = u$, $|EC| = v$ a $\gamma = |\sphericalangle ACE|$ (obr. 71). Obsah päťuholníka vypočítame ako súčet obsahov trojuholníkov ABC,ACE a ECD (to platí vďaka konvexnosti nášho päťuholníka). Keďže oba trojuholníky ABC aj ECD sú rovnoramenné, platí $|\sphericalangle BCD| = 90^\circ + \gamma$. V trojuholníkoch ABC, ECD a BCD použitím kosínusovej vety (vďaka tomu, že $|\sphericalangle BCD| < 180^\circ$) dostaneme

$$\begin{aligned} u^2 &= 2x^2(1 - \cos 150^\circ) = x^2(2 + \sqrt{3}), \\ v^2 &= 2y^2(1 - \cos 30^\circ) = y^2(2 - \sqrt{3}), \\ 4\,\mathrm{km}^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos(90^\circ + \gamma) = x^2 + y^2 + 2xy\sin\gamma. \end{aligned}$$

Z tretej rovnice vyjadríme $\sin\gamma$ a tieto tri vzťahy využijeme pri počítaní obsahu



Obr. 71

päťuholníka $ABCDE$.

$$
\begin{aligned}
S &= S_{ABC} + S_{ACE} + S_{ECD} = \\
&= \frac{1}{2}x^2 \sin 150^\circ + \frac{1}{2}y^2 \sin 30^\circ + \frac{1}{2}uv \sin\gamma = \\
&= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})(4-x^2-y^2)}}{4xy} = \\
&= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{(4-x^2-y^2)}{4} = \\
&= 1\,\mathrm{km}^2.
\end{aligned}
$$

Poznámka. Úloha sa dá riešiť viacerými spôsobmi, k pekným riešeniam patrí aj preklápanie častí päťuholníka, čím dostaneme rovnoramenný trojuholník, pravouhlý lichobežník alebo deltoid, ktorého obsah sa dá spočítať priamočiaro.

5.3 (Podľa *Jaroslava Knebla* a *Tomáša Váňu*.) Zrejme

$$
\binom{2p-1}{p-1} - 1 = \frac{(2p-1)!}{p!\,(p-1)!} - 1 = \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)-(p-1)!}{(p-1)!}.
$$

Keďže čísla p^3 a $(p-1)!$ sú nesúdeliteľné, stačí ukázať, že

$$
p^3 \mid (2p-1)\cdots(p+1)-(p-1)!.
$$

Ukázať deliteľnosť číslom p^3 nie je jednoduché, napríklad nevieme rozumne využiť, že vieme zvyšok po delení p, lebo o zvyšku po delení číslom p^3 to veľa nehovorí. Lepšie by sa ukazovalo, že čosi je deliteľné p. Skúsme teda najprv vyriešiť ľahší problém. Preskúmajme zvyšok čísla $V=(2p-1)\cdots(p+1)$ po delení nižšími mocninami p. Zrejme

$$\begin{aligned} V &= (2p-1)\cdots(p+1) = (p+p-1)(p+p-2)\cdots(p+1) \equiv \\ &\equiv (p-1)(p-2)\cdots 1 = (p-1)! \pmod{p}. \end{aligned}$$

Čo s p^2? V predošlom prípade sme využili, že sa vieme zbaviť jedného p zo zátvoriek. Ale s p^2 už to takto priamo nepôjde. Skúsme preto v zátvorkách nejaké p^2 vytvoriť.

$$\begin{aligned} V &= (2p-1)(2p-2)\cdots(p+2)(p+1) = \\ &= (2p-1)(p+1)\cdot(2p-2)(p+2)\cdots\left(2p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p+\frac{p-1}{2}\right) = \\ &= (2p^2+p-1)(2p^2+2p-4)(2p^2+3p-6)\cdots\left(2p^2+p\cdot\frac{p-1}{2}-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right) \equiv \\ &\equiv 1(p-1)\cdot 2(p-2)\cdots\left(\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\right) = (p-1)! \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Šikovné manipulácie a vhodné roznásobenia teda pomáhajú. Navyše si môžeme všimnúť, že výraz V má podobnú štruktúru a rovnako veľa členov ako $(p-1)!$. Ak výraz $T = V-(p-1)!$ úplne poroznásobujeme a upravíme, skoro všetky členy budú obsahovať p s exponentom aspoň 3, preto nás nebudú zaujímať, podstatný je ten zvyšok. Označme

$$S_2 = \sum_{1\leqq i<j\leqq p-1}\frac{(p-1)!}{ij}, \quad S_1 = \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i}.$$

Potom

$$\begin{aligned} T &= (p+p-1)(p+p-2)\cdots(p+2)(p+1) - \\ &- (p-(p-1))(p-(p-2))\cdots(p-2)(p-1) = \\ &= \big(p^{p-1}+\cdots+S_2p^2+S_1p+(p-1)!\big) - \\ &- \big(p^{p-1}+\cdots+(-1)^{p-3}S_2p^2+(-1)^{p-2}S_1p+(-1)^{p-1}(p-1)!\big) \equiv \\ &\equiv 2S_1p \pmod{p^3}. \end{aligned}$$

Z predpokladu $p>3$ vyplýva, že p je nepárne a spomenuté členy existujú. Stačí nám ukázať, že $p^2 \mid 2S_1$, úspešne sme znížili exponent p o 1. Čo ďalej? Pomôže nám trik podobný ako v riešení pre p^2, popárujeme členy prvý s posledným, druhý s predposledným a tak ďalej.

$$\begin{aligned} 2S_1 &= \sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i} = 2\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{(p-1)!}{i}+\frac{(p-1)!}{p-i}\right) = 2\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(p-1)!\frac{p}{i(p-i)} = \\ &= p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{(p-1)!}{i(p-i)}. \end{aligned}$$

Všimnime si, že každý člen sumy je celé číslo. Stačí nám teda ukázať, že posledná suma je deliteľná číslom p. Aké zvyšky môžu nadobúdať členy sumy? Bolo by dobré sa zbaviť tých čísel v menovateli. Nech $(p-1)!/[i(p-i)] \equiv a_i \pmod p$. Keďže $1 \leqq i \leqq p-1$, sú i a p nesúdeliteľné. Preto táto kongruencia je ekvivalentná s $(p-1)! \equiv i(p-i)a_i \pmod p$. Wilsonova veta hovorí, že pre prvočíslo p platí $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, takže po drobnej úprave dostaneme

$$i^2 a_i \equiv 1 \pmod p. \tag{1}$$

Toto je lineárna kongruencia, skúsme niečo o takýchto kongruenciách zistiť. Kongruencia $ax \equiv 1 \pmod p$ má pre pevné $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ práve jedno riešenie, lebo čísla $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ dávajú rôzne zvyšky po delení p (ak by dávali nejaké dve z nich rovnaký zvyšok, tak ich rozdiel je deliteľný p a z toho už dostaneme spor). Týchto čísel je $p-1$ a každý zvyšok z $\{1, 2, \dots, p-1\}$ nadobudne práve jedno z nich.

Preto existuje pre pevné i práve jedno také $b_i \in \{1, \dots, p-1\}$, že $ib_i \equiv 1 \pmod p$. Takisto existuje práve jedno a_i také, že $i^2 a_i \equiv 1 \pmod p$. Toto a_i musí byť rovné b_i^2, lebo $i^2 b_i^2 = (ib_i)^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod p$ a teda b_i je riešením (1). Pre $i = 1, 2, \dots, p-1$ nadobúda b_i každú z hodnôt $1, 2, \dots, p-1$ práve raz, teda $a_i \equiv b_i^2$ nadobúda hodnoty $1^2, 2^2, \dots, (p-1)^2$, opäť každú práve raz. Preto

$$U = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i(p-i)} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} a_i \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \pmod p.$$

Keďže $p \neq 3$, je U deliteľné číslom p a to sme chceli.

5.4 (Čiastočne podľa *Tomáša Váňu.*) Nech výraz zo zadania je celé číslo pre $n = m, m+1, m+2, m+3$, kde m je nejaké prirodzené číslo. Pre lepšiu manipuláciu jednotlivé výrazy označme

$$A = \frac{x^m - y^m}{x-y}, \quad B = \frac{x^{m+1} - y^{m+1}}{x-y}, \quad C = \frac{x^{m+2} - y^{m+2}}{x-y}, \quad D = \frac{x^{m+3} - y^{m+3}}{x-y}.$$

Skúšajme sa s celými číslami A, B, C, D hrať. Kombinujme ich, či nám nevyjde nejaký vhodný výraz. Pritom v menovateli každého výrazu je v exponentoch iné číslo. Aby sme mali šancu pri odčítaní nejaké členy zrušiť (chceme čo najjednoduchší výsledok), musia byť v odčitovaných výrazoch exponenty rovnaké. To dosiahneme napríklad pri odčítaní AC od B^2. Skutočne, po úprave dostaneme

$$B^2 - AC = (xy)^m.$$

Keďže A, B, C sú celé čísla, je celé aj $(xy)^m$. Podobne dostaneme

$$C^2 - BD = (xy)^{m+1}, \qquad BC - AD = (x+y)(xy)^m,$$

takže aj výrazy $(xy)^{m+1}$ a $(x+y)(xy)^m$ sú celé čísla. Označme $xy = p$. Keďže p^{m+1} aj p^m sú celé čísla, nutne ich podiel p je racionálne číslo. Pomerne jednoducho možno odvodiť tvrdenie, že ak je nejaká mocnina racionálneho čísla celým číslom, potom je toto racionálne číslo tiež celé. Na základe toho je p celé číslo.

Označme ešte $x + y = q$. Pri tomto označení sa dá všimnúť, že $C = qB - pA$ a $D = qC - pB$. Platí to aj všeobecnejšie. Ak označíme $V_n = (x^n - y^n)/(x - y)$, tak

$$V_{n+2} = qV_{n+1} - pV_n. \tag{1}$$

Naviac $V_1 = 1$ a $V_2 = q$. Pre celočíselnosť všetkých V_n (to chceme dokázať) teda stačí celočíselnosť čísel p a q (stačí použiť indukciu a (1)). Zatiaľ máme iba celočíselnosť p. Číslo q je podielom celých čísel $(x + y)(xy)^m$ a $(xy)^m$, je teda racionálne. Potrebujeme už iba dokázať, že je celé. Pomôže nám vyjadrenie (1). Použijúc ho pre malé n máme

$$\begin{aligned}
V_3 &= q \cdot q - p \cdot 1 = q^2 - p,\\
V_4 &= q(q^2 - p) - p \cdot q = q^3 - 2pq,\\
V_5 &= q(q^3 - 2pq) - p(q^2 - p) = q^4 - 3pq^2 + p^2,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ľahko si možno všimnúť a indukciou dokázať, že každé V_n sa dá vyjadriť ako polynóm v premennej q s celočíselnými koeficientmi (p je celé číslo), pričom najvyššia mocnina q má koeficient 1. Z vyjadrenia $V_m = A$ tak máme rovnicu

$$q^{m-1} + (\dots)q^{m-2} + \dots + (\dots) - A = 0, \tag{2}$$

(v zátvorkách sú nejaké celé čísla) ktorej racionálnym koreňom je q. Podľa známeho kritéria, ak koreň polynomickej rovnice je racionálne číslo a/b (a, b sú nesúdeliteľné), potom a delí absolútny člen a b delí koeficient pri najvyššej mocnine, ktorý je v našom prípade 1. Každý racionálny koreň (2) je teda nutne celé číslo, preto aj q je celé číslo, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. V riešení sme nerozobrali možnosť $xy = 0$ (delili sme výrazom xy). Jej osobitné prešetrenie však nerobí ťažkosti.

5.5 Najprv sa na nerovnosť trochu pozrime. Napríklad zistime, kedy nastáva rovnosť. Zvyčajnú možnosť $a = b = c$ nám zakazuje priamo zadanie, ani $x = y = z = 1/3$ nevedie k cieľu. Všimnime si, že pravá strana nezávisí od b (a vôbec nie od x, y, z). To nám našepkáva, že dobrým ťahom by mohlo byť dosadenie $y = 0$. Skutočne, rovnosť nastáva iba v prípade $x = z = 1/2$ pre ľubovoľné a, b, c. Pozrime sa teraz na riešenie.

Označme zátvorky na ľavej strane dokazovanej nerovnosti

$$A = ax + by + cz, \qquad B = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}.$$

Zadanie hovorí, že máme dokázať $AB \leqq (a+c)^2/(4ac)$. Pohrajme sa s výrazom $A+acB$. Doplníme to na začiatku AG-nerovnosťou a úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}2\sqrt{A\cdot acB} &\leqq A+acB=(ax+by+cz)+\left(xc+\frac{ac}{b}y+za\right)=\\&=(a+c)(x+z)+y\left(b+\frac{ac}{b}\right)=(a+c)(1-y)+y\left(b+\frac{ac}{b}\right)=\\&=(a+c)+y\left(b+\frac{ac}{b}-a-c\right)=(a+c)+y\left(\frac{b^2+ac-ab-bc}{b}\right)=\\&=(a+c)+y\left(\frac{(b-a)(b-c)}{b}\right)\leqq(a+c).\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť platí, pretože zo zadania ($0<a<b<c$) vieme, že $b-a>0>b-c$, $0\leqq y$, $0<b$, takže

$$y\left(\frac{(b-a)(b-c)}{b}\right)\leqq 0.$$

Ak sa teraz pozrieme na začiatok a koniec našich úprav, po umocnení a jednoduchej úprave dostaneme, čo sme chceli dokázať.

Poznámka. Vítězslav Kala ukázal pekné zovšeobecnenie: Pre $x_1,x_2,\dots,x_n$, $n\geqq 2$, $x_1+x_2+\dots+x_n=1$ a $0<a_1<a_2<\dots<a_n$ platí

$$(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n)\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\dots+\frac{x_n}{a_n}\right)\leqq\frac{(a_1+a_n)^2}{4a_1a_n}.$$

Šiesta séria

6.1 Skúšajme do zadanej rovnosti dosadzovať za x, y a z rôzne čísla (to si môžeme dovoliť, nakoľko rovnosť platí pre ľubovoľné reálne čísla). Zamerajme sa najprv na výraz $0\diamond 0$ a snažme sa určiť jeho hodnotu. Po chvíľke hrania sa dostaneme podľa zadania pre $x=0$, $y=0$ a $z=0\diamond 0$

$$(0\diamond 0)\diamond(0\diamond 0)=0+0+(0\diamond 0)=0\diamond 0. \tag{1}$$

Pre $x=0\diamond 0$, $y=0\diamond 0$ a $z=0$ zasa dostaneme

$$((0\diamond 0)\diamond(0\diamond 0))\diamond 0=(0\diamond 0)+(0\diamond 0)+0=2\cdot(0\diamond 0). \tag{2}$$

Na druhej strane, podľa (1) máme

$$((0\diamond 0)\diamond(0\diamond 0))\diamond 0=(0\diamond 0)\diamond 0=0+0+0=0. \tag{3}$$

Porovnaním (2) a (3) dostávame $2 \cdot (0 \diamond 0) = 0$ a teda $0 \diamond 0 = 0$. Dokazované tvrdenie už teraz dostaneme pomerne priamočiaro. Dosadením $x = 0$, $y = 0$ a $z = a$ do zadanej rovnosti máme

$$a = 0 + 0 + a = (0 \diamond 0) \diamond a = 0 \diamond a \tag{4}$$

a dosadením $x = 0$, $y = a$ a $z = b$ konečne (s využitím (4) v záverečnej úprave)

$$a + b = 0 + a + b = (0 \diamond a) \diamond b = a \diamond b.$$

Poznámka. Skúšku, či operácia $x \diamond y = x + y$ vyhovuje zadanej podmienke, v tomto prípade nebolo potrebné urobiť, nakoľko úlohou nebolo nájsť binárnu operáciu spĺňajúcu zadanú rovnosť. Úlohou bolo iba dokázať nejaké tvrdenie, čo sa nám podarilo aj bez skúšky.

6.2 Pre $n = 1, 2, \ldots, m$ vďaka nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom platí

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 = \left(a_n + \frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 \leqq 2a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 = 4a_n^2 + 2\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4a_n\frac{A_n}{n},$$

takže máme

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leqq 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 4\sum_{n=1}^{m} a_n\frac{A_n}{n}. \tag{1}$$

Odhadneme tretí výraz na pravej strane ostatnej nerovnosti. Keďže

$$-2a_nA_n = -(A_n^2 - A_{n-1}^2) - a_n^2 \leqq -(A_n^2 - A_{n-1}^2),$$

získame odhad

$$-2\sum_{n=1}^{m} a_n\frac{A_n}{n} \leqq -\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2 - A_{n-1}^2}{n} = -\sum_{n=1}^{m-1}\frac{A_n^2}{n(n+1)} - \frac{A_m^2}{m},$$

teda aj

$$-2\sum_{n=1}^{m} a_n\frac{A_n}{n} \leqq -\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2}{n(n+1)}. \tag{2}$$

Spojením nerovností (1) a (2) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leqq 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - 2\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2}{n(n+1)} =$$
$$= 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{m}\frac{A_n^2}{n^2(n+1)},$$

a tak po úprave konečne

$$\sum_{n=1}^{m}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \leqq 4\sum_{n=1}^{m} a_n^2. \tag{3}$$

Zadaná nerovnosť už priamo vyplýva z (3), pretože pre $n=1$ platí $1-2/(n+1)=0$ a pre $n \geqq 2$ platí $1-2/(n+1) \geqq 1/3$.

6.3 (Podľa *Františka Simančíka.*) Zadefinujme si reláciu „$\equiv$" medzi dvoma reťazcami čísel tak, že pre dva reťazce A, B platí $A \equiv B$ práve vtedy, keď majú oba rovnaký počet čísel a po napísaní jedného z nich pod druhý v opačnom poradí bude v každom stĺpci práve jedna jednotka. Ďalej nech AB značí reťazec, ktorý vznikne napísaním reťazca B za A. Zrejme platí, že ak $A \equiv X$ a $B \equiv Y$, potom aj $AB \equiv YX$ (podobne aj pre viac reťazcov). Definujme reťazec S_i^k nasledovne:

1) S_1^k je reťazec pozostávajúci z jediného čísla k;
2) S_i^k (pre $i \geqq 2$) vznikne z S_{i-1}^k tak, že každé číslo x v ňom nahradíme reťazcom čísel $12\ldots x$.

Dokážeme, že $S_b^a \equiv S_a^b$ pre všetky prirodzené čísla a, b okrem prípadu $a=b=1$. Postupujeme matematickou indukciou podľa súčtu $a+b$.

1° Ak $a+b=3$ (najmenší prípad), potom S_2^1 je 1, S_1^2 je 2, teda platí $S_2^1 \equiv S_1^2$.

2° Predpokladajme, že pre n ($n \geqq 3$) platí indukčný predpoklad, teda $S_b^a \equiv S_a^b$ pre všetky prirodzené čísla a, b, pre ktoré $a+b=n$. Zoberme ľubovoľné priodzené čísla a, b, pre ktoré $a+b=n+1$. Ak je jedno z nich 1 (bez ujmy na všeobecnosti nech je to a), tak $S_b^1 = 1$ a $S_1^b = b \geqq 3$, teda $S_b^1 \equiv S_1^b$. Teraz ak $a>1$ aj $b>1$, uvedomme si jednu vec. Keď rozdelíme reťazec na dve časti a tie budeme postupne rozvíjať, tak po spojení týchto reťazcov dostaneme reťazec, ktorý by sme dostali rozvíjaním pôvodného reťazca. Ďalej si uvedomme, že potom platí $S_x^a = S_x^{a-1}S_{x-1}^a$ pre všetky $x \geqq 2$, čiže aj pre $x=b$. Potom $S_b^a = S_b^{a-1}S_{b-1}^a$ a podobne aj $S_a^b = S_a^{b-1}S_{a-1}^b$. Podľa indukčného predpokladu

$$S_a^{b-1} \equiv S_{b-1}^a,\ S_b^{a-1} \equiv S_{a-1}^b \quad\Longrightarrow\quad S_b^{a-1}S_{b-1}^a \equiv S_a^{b-1}S_{a-1}^b \quad\Longrightarrow\quad S_b^a \equiv S_a^b.$$

Tvrdenie teda platí aj pre súčet $a+b=n+1$.

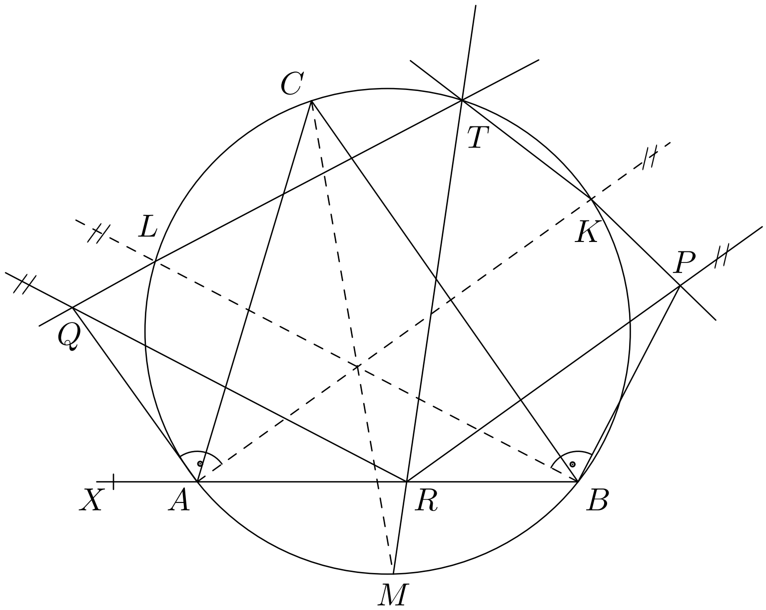
Tým sme dokázali, že $S_b^a \equiv S_a^b$ pre všetky dvojice prirodzených čísel (a,b) okrem $(1,1)$. Ďalej dokážeme, že $R_n = S_n^1 S_{n-1}^2 S_{n-2}^3 \ldots S_1^n$. Opäť použijeme matematickú indukciu.

1° Ľahko overíme platnosť tvrdenia pre $n=1,2,3$.

2° Predpokladajme, že $R_n = S_n^1 S_{n-1}^2 S_{n-2}^3 \ldots S_1^n$. Potom R_{n+1} je rozvinutý reťazec R_n s na konci pridaným číslom $n+1$. Alebo môže vzniknúť aj tak, že R_n nasekáme na časti, rozvinieme každú z nich, spojíme ich a na koniec pridáme číslo $n+1 = S_1^{n+1}$, čiže $R_{n+1} = S_{n+1}^1 S_n^2 S_{n-1}^3 \ldots S_2^n S_1^{n+1}$.

Takže naozaj pre všetky prirodzené čísla n sa R_n dá pospájať z S-reťazcov tak, ako sme už spomenuli. My však už vieme, že $S_n^1 \equiv S_1^n, S_{n-1}^2 \equiv S_2^{n-1}, \ldots$, preto $R_n \equiv R_n$.

6.4 (Podľa *Tomáša Váňu.*) Po nakreslení dobrého obrázka dostaneme pocit, že spoločným priesečníkom týchto troch priamok bude priesečník priamky MR s kružnicou opísanou trojuholníku ABC rôzny od bodu M. Označme ho T. Vzhľadom na komplikovanosť obrázku sa diskusii sotva vyhneme. Ako najrozumnejšie sa ukáže robiť ju vzhľadom na polohu bodu T. Predpokladajme najskôr, že T leží na oblúku LB



Obr. 72

neobsahujúcom bod A (obr. 72). Keďže bod M je priesečník osi uhla a opísanej kružnice, tak bude ležať v strede oblúka AB a preto aj priamka MT bude osou uhla ATB. Tento je zhodný s obvodovým uhlom ACB nad tou istou tetivou AB. Pri štandardnom označení uhlov trojuholníka ABC teda $|\sphericalangle MTA| = \gamma/2$. Podľa zadania je priamka RQ rovnobežná s BL, takže súhlasné uhly ARQ a ABL sa rovnajú a platí $|\sphericalangle ARQ| = \beta/2$. Podľa zadania sú AQ a AK kolmé, takže $|\sphericalangle RAQ| = \pi/2 + \alpha/2$. V trojuholníku ARQ platí $|\sphericalangle AQR| = \pi - |\sphericalangle ARQ| - |\sphericalangle RAQ| = \gamma/2$. Keďže $|\sphericalangle MTA| = |\sphericalangle RTA| = \gamma/2 = |\sphericalangle RQA|$ a body T, Q zjavne ležia oba v tej istej polrovine vzhľadom na priamku AB (lebo $|\sphericalangle QAX| > |\sphericalangle QRX|$), štvoruholník $ARTQ$ je tetivový. Označme L_0 priesečník priamky QT s kružnicou opísanou trojuholníku ABC. V štvoruholníku $ARTQ$ sa uhly nad tetivou RT zhodujú, platí $|\sphericalangle RQT| = |\sphericalangle RAT|$. Navyše nad tetivou BT v pôvodnej kružnici platí $|\sphericalangle BAT| = |\sphericalangle BL_0T|$. Máme teda $|\sphericalangle BL_0T| = |\sphericalangle RQT|$ a to v spojení s tým, že T, L_0 a Q sú kolineárne, implikuje rovnobežnosť priamok RQ a BL_0. Avšak priamka RQ je rovnobežná aj s BL, čiže body L a L_0 sú totožné. Dokázali sme, že aj priamka LQ prechádza bodom T.

Aby sa nám to isté podarilo dokázať v situácii, keď bod T leží na oblúku LA, prípadne, keď bod T leží na oblúku DA (kde D je priesečníkom polpriamky AQ s kružnicou opísanou trojuholníku ABC), musíme postup obmeniť. Vtedy totiž bod Q leží na úsečke DA, čiže vnútri kružnice. Dôkaz tiež vyzerá trochu inak, ak sa bude T nachádzať v hraničných bodoch L, D, A.

Nakoľko je situácia symetrická, analogickým postupom dokážeme, že aj priamka PK prechádza bodom T. Priamky PK, LQ a RM teda naozaj prechádzajú tým istým bodom.

6.5 (Čiastočne podľa *Tomáša Váňu.*) Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ spĺňajú podmienku rovnosti zo zadania. Naším cieľom je postupne vypočítať hodnoty $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pretože $a_0 = 1$ a ľavá strana v zadaní je menšia ako 1, musí platiť $a_i/a_{i+1} < 1$ pre $i = 0, 1, \dots, n-1$, z čoho máme $1 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$, teda $a_i \geqq 2$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Podmienku zo zadania $(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqq a_k^2(a_k - 1)$ šikovne prepíšeme.

$$\frac{a_k}{a_{k+1}-1} \leqq a_{k-1}\left(\frac{1}{a_k(a_k-1)}\right),$$

$$\frac{a_k}{a_{k+1}-1} \leqq a_{k-1}\left(\frac{1}{a_k-1} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{a_{k-1}}{a_k-1} - \frac{a_{k-1}}{a_k},$$

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_{k+1}-1} \leqq \frac{a_{k-1}}{a_k-1}. \tag{1}$$

Ak sčítame nerovnosti (1) pre $k = i+1, i+2, \dots, n-1$, veľa členov nám vypadne a dostaneme nerovnosť

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n - 1} \leqq \frac{a_i}{a_{i+1}-1},$$

z ktorej využitím $a_{n-1}/a_n < a_{n-1}/(a_n - 1)$ dostaneme ostrú nerovnosť

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_i}{a_{i+1}-1}.$$

(Túto nerovnosť je možné dokázať aj matematickou indukciou, ako to urobil *Tomáš Váňa.*) Z nej, použitím toho, že všetky zlomky na pravej strane zadanej nerovnosti sú kladné, dostaneme postupne hľadané celé čísla. Pre $i = 0$ máme

$$\frac{1}{a_1} \leqq \frac{99}{100} < \frac{1}{a_1 - 1},$$

$$1 < \frac{100}{99} \leqq a_1 < \frac{199}{99} < 3 \quad\Longrightarrow\quad a_1 = 2.$$

Podobne pre ďalšie hodnoty $i = 2, 3, 4$ dostaneme jediné možnosti pre a_i.

$$\frac{1}{a_2} \leqq \frac{1}{a_1}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1}\right) < \frac{1}{a_2 - 1} \quad\Longrightarrow\quad a_2 = 5,$$

$$\frac{1}{a_3} \leqq \frac{1}{a_2}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{1}{a_3 - 1} \quad\Longrightarrow\quad a_3 = 56,$$

$$\frac{1}{a_4} \leqq \frac{1}{a_3}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3}\right) < \frac{1}{a_4 - 1} \quad\Longrightarrow\quad a_4 = 78400.$$

Ak by sme teraz rovnako chceli pokračovať, dostali by sme

$$\frac{1}{a_5} \leqq \frac{1}{a_4}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{56} - \frac{56}{78400}\right) = 0,$$

čo je nemožné. Ľahko sa možno presvedčiť, že pre $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 5, 56, 78400)$ nastáva rovnosť v zadaní a z postupu riešenia vyplýva, že žiadne iné riešenie neexistuje.

Iné korešpondenčné semináre

Okrem matematickej olympiády sú pre študentov základných aj stredných škôl počas školského roka organizované aj iné matematické súťaže. Patria medzi ne predovšetkým korešpondenčné semináre. Tieto súťaže sa v detailoch istotne líšia, avšak základné črty majú spoločné. Počas školského roka prebiehajú dve časti (letná a zimná), ktoré pozostávajú zväčša z troch sérií úloh rozosielaných riešiteľom do škôl alebo domov. Riešenia súťažiaci vypracovávajú rovnakou formou ako v MO a v určenom termíne ich odosielajú na adresu príslušného seminára, odkiaľ sa po niekoľkých dňoch až týždňoch vrátia opravené spolu so vzorovými riešeniami a výsledkovou listinou. Mladší a menej skúsení riešitelia zväčša nemusia riešiť tie najzložitejšie príklady, aby aj oni mali šancu ovplyvniť poradie na prvých miestach. Na konci oboch častí súťaže sú približne tridsiati najúspešnejší riešitelia pozývaní na týždňové sústredenie, účasť na ktorom býva často najsilnejšou motiváciou na riešenie úloh. Nie je ale možné nespomenúť, že takýto pravidelný tréning sa odráža aj na výsledkoch dosahovaných v MO, a že drvivá väčšina reprezentantov Slovenska a Českej republiky na IMO a IOI sa aktívne zapájala do viacerých z týchto seminárov.

Nižšie uvedené korešpondenčné semináre (KS) sú určené predovšetkým študentom stredných škôl, svojím záberom pokrývajú územie celého Slovenska a často majú aj riešiteľov z Českej republiky. Je však možné, že vo svojom okolí nájdete aj menšie súťaže podobného druhu.

Korešpondenčný matematický seminár — KMS

KMS vznikol v minulom ročníku spojením Bratislavského a Stredoslovenského korešpondenčného matematického seminára (BKMS a SKMS), ktoré ešte v 51. ročníku MO prebiehali samostatne. Organizovaný je študentmi FMFI UK v Bratislave.

KMS má tri kategórie. Začínajúcim a mladším riešiteľom je určená kategória ALFA, pre skúsenejších je kategória BETA. Rozdelenie do kategórií umožňuje bojovať o miesta na sústredení aj neskúseným študentom, ktorí by v príliš silnej konkurencii strácali motiváciu. Od tohto ročníka pribudol ako kategória GAMA seminár SK MO, ktorému je venovaná predchádzajúca kapitola.

KMS
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava

e-mail: kms@kms.sk
URL: http://kms.sk

Súťaž talentovaných riešiteľov obľubujúcich matematiku — STROM

Korešpondenčný seminár STROM je organizovaný z PF UPJŠ v Košiciach skupinou nadšencov, väčšinou bývalých riešiteľov seminára a študentov UPJŠ. Riešiteľskú základňu má na východnom Slovensku. Je pokračovateľom najstaršieho korešpondenčného seminára v bývalom Československu. V posledných rokoch ho pomáhali organizovať najmä študenti FMFI UK pochádzajúci z východného Slovenska. Po vzniku KMS sa STROM opäť snaží vybudovať základňu organizátorov na pôde UPJŠ.

STROM
PF UPJŠ
Jesenná 5
041 54 Košice

e-mail: strom@strom.sk
URL: http://www.strom.sk

Korešpondenčný seminár z programovania — KSP

Na rozdiel od predchádzajúcich KS, je KSP súťažou v programovaní. Všetky jeho súťažné úlohy sú, podobne ako na IOI, praktické. KSP je organizovaný zanietenou skupinkou študentov FMFI UK v Bratislave, ktorí majú zároveň na starosti všetky ostatné súťaže v programovaní od COFAX-u až po MO–P. Sústredenia bývajú na jar a na jeseň.

KSP
KVI FMFI UK
Mlynská Dolina
842 48 Bratislava

e-mail: ksp@ksp.sk
URL: http://www.ksp.sk

Ak ste sa rozhodli do niektorého zo seminárov zapojiť, najrozumnejšie je požiadať o zaslanie úloh prvej série začiatkom septembra alebo začiatkom januára, prípadne si zadania a pravidlá nájsť na internete.

doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc. – Mgr. Michal Forišek
RNDr. Karel Horák, CSc. – Mgr. Vladimír Koutný
Ján Mazák – Mgr. Peter Novotný
Úlohová komisia MO

**Päťdesiatytretí ročník
Matematickej olympiády
na stredných školách**

Sadzbu programom AMS-TEX a LATEX pripravili RNDr. Karel Horák, CSc.,
Mgr. Vladimír Koutný a Mgr. Peter Novotný
Zostavil: Mgr. Vladimír Koutný
Recenzoval: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Grafická úprava obálky: Mgr. Vladimír Koutný
Vydal: Iuventa, Bratislava, 2005
Náklad: 500 ks

ISBN 80–8072–038–X